完全版

概率论与数理统计习题答案 第四版 盛骤 (浙江大学)

浙大第四版（高等教育出版社）

第一章　　概率论的基本概念

1.[一]　写出下列随机试验的样本空间

（1）记录一个小班一次数学考试的平均分数（充以百分制记分）（[一] 1）

$$S=\left\{\frac{o}{n},\frac{1}{n}\cdots\cdots\frac{n\times 100}{n}\right\}$$，n 表小班人数

（3）生产产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数。（[一] 2）

S={10，11，12，………，n，………}

（4）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如连续查出二个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果。

查出合格品记为“1”，查出次品记为“0”，连续出现两个“0”就停止检查，或查满 4 次才停止检查。（[一] (3)）

S={00，100，0100，0101，1010，0110，1100，0111，1011，1101，1110，1111，}

2.[二]　设 A，B，C 为三事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列事件。

（1）A 发生，B 与 C 不发生。

表示为：　　$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-(AB+AC)$ 或 $A-(B\cup C)$

（2）A，B 都发生，而 C 不发生。

表示为：　　$AB\overline{C}$ 或 $AB-ABC$ 或 $AB-C$

（3）A，B，C 中至少有一个发生　　　表示为：$A+B+C$

（4）A，B，C 都发生，　　　表示为：ABC

（5）A，B，C 都不发生，　　　表示为：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $S-(A+B+C)$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$

（6）A，B，C 中不多于一个发生，即 A，B，C 中至少有两个同时不发生

相当于 $\bar{A}\bar{B},\bar{B}\bar{C},\bar{A}\bar{C}$ 中至少有一个发生。故　表示为：$\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C}$ 。

（7）A，B，C 中不多于二个发生。

相当于：$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 中至少有一个发生。故　表示为：$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$或$\overline{ABC}$

（8）A，B，C 中至少有二个发生。

相当于：AB，BC，AC 中至少有一个发生。故　表示为：$AB+BC+AC$

6.[三]　设 A，B 是两事件且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$. 问(1)在什么条件下 $P(AB)$取到最大值，最大值是多少？（2）在什么条件下 $P(AB)$取到最小值，最小值是多少？

解：由 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$ 即知 $AB\neq\varphi$ ，（否则 $AB=\varphi$ 依互斥事件加法定理，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.6+0.7=1.3>1$ 与 $P(A\cup B)\leqslant 1$ 矛盾）.

从而由加法定理得

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$　　　　　　(*)

（1）从 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)$知，当 $AB=A$，即 $A\cap B$ 时 $P(AB)$取到最大值，最大值为

$P(AB)=P(A)=0.6$，

（2）从(*)式知，当 $A\cup B=S$ 时，$P(AB)$取最小值，最小值为

$P(AB)=0.6+0.7-1=0.3$ 。

7.[四] 设 A，B，C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$. 求 A，B，C 至少有一个发生的概率。

解：P (A，B，C 至少有一个发生)$=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}$

8.[五]　在一标准英语字典中具有 **55** 个由二个不相同的字母新组成的单词，若从 **26** 个英语字母中任取两个字母予以排列，问能排成上述单词的概率是多少？

记 ***A*** 表“能排成上述单词”

∵　从 **26** 个任选两个来排列，排法有 A_{26}^{2} 种。每种排法等可能。

字典中的二个不同字母组成的单词：**55** 个

∴　$$P(A)=\frac{55}{A_{26}^{2}}=\frac{11}{130}$$

9.　在电话号码薄中任取一个电话号码，求后面四个数全不相同的概率。（设后面 **4** 个数中的每一个数都是等可能性地取自 **0**，**1**，**2……9**）

记 ***A*** 表“后四个数全不同”

∵　后四个数的排法有 10^4 种，每种排法等可能。

后四个数全不同的排法有 A_{10}^{4}

∴　$$P(A)=\frac{A_{10}^{4}}{10^4}=0.504$$

10.[六]　在房间里有 **10** 人。分别佩代着从 **1** 号到 **10** 号的纪念章，任意选 **3** 人记录其纪念章的号码。

（**1**）求最小的号码为 **5** 的概率。

记“三人纪念章的最小号码为 **5**”为事件 ***A***

∵　**10** 人中任选 **3** 人为一组：选法有 $\binom{10}{3}$ 种，且每种选法等可能。

又事件 ***A*** 相当于：有一人号码为 **5**，其余 **2** 人号码大于 **5**。这种组合的种数有 $1\times\binom{5}{2}$

∴　$$P(A)=\frac{1\times\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{12}$$

（**2**）求最大的号码为 **5** 的概率。

记“三人中最大的号码为 5”为事件 B，同上 10 人中任选 3 人，选法有$\binom{10}{3}$种，且每种选法等可能，又事件 B 相当于：有一人号码为 5，其余 2 人号码小于 5，选法有$1\times\binom{4}{2}$种

$$P(B)=\frac{1\times\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{20}$$

11.[七]　某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶，红漆 3 桶。在搬运中所标笺脱落，交货人随意将这些标笺重新贴，问一个定货 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆顾客，按所定的颜色如数得到定货的概率是多少？

记所求事件为 *A*。

在 17 桶中任取 9 桶的取法有 C_{17}^{9} 种，且每种取法等可能。

取得 4 白 3 黑 2 红的取法有 $C_{10}^{4}\times C_{4}^{3}\times C_{3}^{2}$

故 $$P(A)=\frac{C_{10}^{4}\times C_{4}^{3}\times C_{3}^{2}}{C_{17}^{6}}=\frac{252}{2431}$$

12.[八]　在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任意取 200 个。

（1）求恰有 90 个次品的概率。

记“恰有 90 个次品”为事件 *A*

∵　在 1500 个产品中任取 200 个，取法有$\binom{1500}{200}$种，每种取法等可能。

200 个产品恰有 90 个次品，取法有$\binom{400}{90}\binom{1100}{110}$种

∴ $$P(A)=\frac{\binom{400}{90}\binom{1100}{110}}{\binom{1500}{200}}$$

（2）至少有 2 个次品的概率。

记：**A** 表“至少有 **2** 个次品”

B_0 表“不含有次品”，B_1 表“只含有一个次品”，同上，**200** 个产品不含次品，取法有 $\binom{1100}{200}$ 种，**200** 个产品含一个次品，取法有 $\binom{400}{1}\binom{1100}{199}$ 种

∵　　$\overline{A}=B_0+B_1$ 且 B_0，B_1 互不相容。

∴　　$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-[P(B_0)+P(B_1)]=1-\left[\frac{\binom{1100}{200}}{\binom{1500}{200}}+\frac{\binom{400}{1}\binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}}\right]$$

13.[九]　从 **5** 双不同鞋子中任取 **4** 只，**4** 只鞋子中至少有 **2** 只配成一双的概率是多少？

记 **A** 表“**4** 只全中至少有两支配成一对”

则 $\overline{A}$ 表“**4** 只人不配对”

∵　从 **10** 只中任取 **4** 只，取法有 $\binom{10}{4}$ 种，每种取法等可能。

要 **4** 只都不配对，可在 **5** 双中任取 **4** 双，再在 **4** 双中的每一双里任取一只。取法有 $\binom{5}{4}\times 2^4$

∴　$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

15.[十一]　将三个球随机地放入 **4** 个杯子中去，问杯子中球的最大个数分别是 **1**，**2**，**3**，的概率各为多少？

记 A_i 表“杯中球的最大个数为 i 个”　i**=1,2,3,**

三只球放入四只杯中，放法有 4^3 种，每种放法等可能

对 A_1：必须三球放入三杯中，每杯只放一球。放法 **4×3×2** 种。

(选排列：好比 3 个球在 4 个位置做排列)

$$P(A_1)=\frac{4\times 3\times 2}{4^3}=\frac{6}{16}$$

对 A_2：必须三球放入两杯，一杯装一球，一杯装两球。放法有 $C_3^2\times 4\times 3$ 种。

(从 3 个球中选 2 个球，选法有 C_3^2，再将此两个球放入一个杯中，选法有 4 种，最后将剩余的 1 球放入其余的一个杯中，选法有 3 种。

$$P(A_2)=\frac{C_3^2\times 4\times 3}{4^3}=\frac{9}{16}$$

对 A_3：必须三球都放入一杯中。放法有 **4** 种。**(只需从 4 个杯中选 1 个杯子，放入此 3 个球，选法有 4 种)**

$$P(A_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

16.[十二]　50 个铆钉随机地取来用在 10 个部件，其中有三个铆钉强度太弱，每个部件用 3 只铆钉，若将三只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

记 A 表“**10** 个部件中有一个部件强度太弱”。

法一：用古典概率作：

把随机试验 **E** 看作是用三个钉一组，三个钉一组去铆完 **10** 个部件（在三个钉的一组中不分先后次序。但 **10** 组钉铆完 **10** 个部件要分先后次序）

对 E：铆法有 $C_{50}^3\times C_{47}^3\times C_{44}^3\cdots\cdots\times C_{23}^3$ 种，每种装法等可能

对 A：三个次钉必须铆在一个部件上。这种铆法有〔$C_3^3\times C_{47}^3\times C_{44}^3\cdots\cdots C_{23}^3$〕×**10** 种

$$P(A)=\frac{[C_3^3\times C_{47}^3\times C_{44}^3\cdots\cdots\times C_{23}^3]\times 10}{C_{50}^3\times C_{47}^3\times\cdots\cdots\times C_{23}^3}=\frac{1}{1960}=0.00051$$

法二：用古典概率作

把试验 E 看作是在 **50** 个钉中任选 **30** 个钉排成一列，顺次钉下去，直到把部件铆完。（铆钉要计先后次序）

对 E：铆法有 A_{50}^3 种，每种铆法等可能

对 A：三支次钉必须铆在“**1，2，3**”位置上或“**4，5，6**”位置上，**…**或“**28，29，**

30”位置上。这种铆法有 $A_3^3\times A_{47}^{27}+A_3^3\times A_{47}^{27}+\cdots\cdots+A_3^3+A_{47}^{27}=10\times A_3^3\times A_{47}^{27}$**种**

$$P(A)=\frac{10\times A_3^3\times A_{47}^{27}}{A_{50}^{30}}=\frac{1}{1960}=0.00051$$

17.[十三] 已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5,$ 求$P(B|A\cup\overline{B})$。

解一：

$P(A)=1-P(\overline{A})=0.7,\ P(\overline{B})=1-P(B)=0.6,\ A=AS=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$
注意 $(AB)(A\overline{B})=\phi$. 故有

P **(*AB*)=*P* (*A*)－*P* (*A*** $\overline{B}$ **)=0.7－0.5=0.2。**

再由加法定理，

P **(*A*∪** $\overline{B}$ **)= *P* (*A*)+ *P* (** $\overline{B}$ **)－*P* (*A*** $\overline{B}$ **)=0.7+0.6－0.5=0.8**

于是 $P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=0.25$

解二：$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}\mid A)\xrightarrow{\text{由已知}}05=07\cdot P(\overline{B}\mid A)$

$\therefore\quad P(\overline{B}\mid A)=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}\Rightarrow P(B\mid A)=\frac{2}{7}$ 故 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{5}$

$$P(B\mid A\cup\overline{B})\overset{\text{定义}}{=\!=\!=}\frac{P(BA\cup B\overline{B})}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{\frac{1}{5}}{0.7+0.6-0.5}=0.25$$

18.[十四] $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求$P(A\cup B)$。

解：由 $P(A|B)\overset{\text{定义}}{=\!=\!=}\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}\xrightarrow{\text{由已知条件}}$有 $\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}$

由乘法公式，得 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$

由加法公式，得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

19.[十五]　掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 **7**，求其中有一颗为 **1** 点的概率（用两种方法）。

解：（方法一）（在缩小的样本空间 **SB** 中求 **P(A|B)**，即将事件 **B** 作为样本空间，求事件 **A** 发生的概率）。

掷两颗骰子的试验结果为一有序数组（***x, y***）（***x, y*=1,2,3,4,5,6**）并且满足 ***x*,+*y*=7**，则样本空间为

S={(*x, y*)| (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}

每种结果（***x, y***）等可能。

A={掷二骰子，点数和为 **7** 时，其中有一颗为 **1** 点。故 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ **}**

方法二：（用公式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

S={(*x, y*)| *x* =1,2,3,4,5,6; *y* = 1,2,3,4,5,6}每种结果均可能

A=“掷两颗骰子，***x*, *y*** 中有一个为“**1**”点”，**B=**“掷两颗骰子，***x*,+*y*=7**”。则 $P(B)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}, P(AB)=\frac{2}{6^2}$，

故 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{6^2}}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

20.[十六]　据以往资料表明，某一 **3** 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：***P*(*A*)=*P*{**孩子得病**}=0.6**，***P* (*B*|*A*)=*P*{**母亲得病|孩子得病**}=0.5**，***P* (*C*|*AB*)=*P*{**父亲得病|母亲及孩子得病**}=0.4**。求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解：所求概率为 $P(AB\overline{C})$（注意：由于“母病”，“孩病”，“父病”都是随机事件，这里不是求 $P(\overline{C}|AB)$

$P(AB)=P(A)=P(B|A)=0.6\times0.5=0.3, P(\overline{C}|AB)=1-P(C|AB)=1-0.4=0.6.$

从而 $P(AB\overline{C})=P(AB)\cdot P(\overline{C}|AB)=0.3\times0.6=0.18.$

21.[十七]　已知 **10** 只晶体管中有 **2** 只次品，在其中取二次，每次随机地取一只，作

不放回抽样，求下列事件的概率。

（**1**）二只都是正品（记为事件 **A**）

法一：用组合做 在 **10** 只中任取两只来组合，每一个组合看作一个基本结果，每种取法等可能。

$$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}=0.62$$

法二：用排列做 在 **10** 只中任取两个来排列，每一个排列看作一个基本结果，每个排列等可能。

$$P(A)=\frac{A_8^2}{A_{10}^2}=\frac{28}{45}$$

法三：用事件的运算和概率计算法则来作。

记 $\boldsymbol{A_1}$，$\boldsymbol{A_2}$ 分别表第一、二次取得正品。

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A)P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$$

（**2**）二只都是次品（记为事件 **B**）

法一： $$P(B)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$$

法二： $$P(B)=\frac{A_2^2}{A_{10}^2}=\frac{1}{45}$$

法三： $$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

（**3**）一只是正品，一只是次品（记为事件 ***C***）

法一： $$P(C)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$$

法二：$$P(C)=\frac{(C_8^1\times C_2^1)\times A_2^2}{A_{10}^2}=\frac{16}{45}$$

法三：$$P(C)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)\text{且}A_1\overline{A}_2\text{与}\overline{A}_1A_2\text{互斥}$$

$$=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid \overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$$

（**4**）第二次取出的是次品（记为事件 ***D***）

法一：因为要注意第一、第二次的顺序。不能用组合作，

法二：$$P(D)=\frac{A_9^1\times A_2^1}{A_{10}^2}=\frac{1}{5}$$

法三：$$P(D)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_2)\text{且}A_1\overline{A}_2\text{与}\overline{A}_1A_2\text{互斥}$$

$$=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid \overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$$

22.[十八]　某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随机的拨号，求他拨号不超过三次而接通所需的电话的概率是多少？如果已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

记 ***H*** 表拨号不超过三次而能接通。

A**i** 表第 ***i*** 次拨号能接通。

注意：第一次拨号不通，第二拨号就不再拨这个号码。

$$\because\quad H=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\quad\text{三种情况互斥}$$

$$\therefore\quad P(H)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$$

如果已知最后一个数字是奇数（记为事件 ***B***）问题变为在 ***B*** 已发生的条件下，求 ***H*** 再发生的概率。

$$P(H\mid B)=PA_1\mid B+\overline{A}_1A_2\mid B+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\mid B)$$

$$=P(A_1\mid B)+P(\overline{A}_1\mid B)P(A_2\mid B\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1\mid B)P(\overline{A}_2\mid B\overline{A}_1)P(A_3\mid B\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

24.[十九]　设有甲、乙二袋，甲袋中装有 n 只白球 m 只红球，乙袋中装有 N 只白球 M 只红球，今从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，问取到（即从乙袋中取到）白球的概率是多少？（此为第三版 19 题(1)）

记 A_1，A_2 分别表“从甲袋中取得白球，红球放入乙袋”

再记 B 表“再从乙袋中取得白球”。

∵　　$B=A_1B+A_2B$ 且 A_1，A_2 互斥

∴　　$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$$=\frac{n}{n+m}\times\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{n+m}\times\frac{N}{N+M+1}$$

[十九](2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球。先从第一盒子中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒子中任取一只球，求取到白球的概率。

记 C_1 为“从第一盒子中取得 2 只红球”。

C_2 为“从第一盒子中取得 2 只白球”。

C_3 为“从第一盒子中取得 1 只红球，1 只白球”，

D 为“从第二盒子中取得白球”，显然 C_1，C_2，C_3 两两互斥，$C_1\cup C_2\cup C_3=S$，由全概率公式，有

$P(D)=P(C_1)P(D|C_1)+P(C_2)P(D|C_2)+P(C_3)P(D|C_3)$

$$=\frac{C_5^2}{C_9^2}\cdot\frac{5}{11}+\frac{C_4^2}{C_9^2}\cdot\frac{7}{11}+\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}\cdot\frac{6}{11}=\frac{53}{99}$$

26.[二十一]　已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解：A_1={男人}，A_2={女人}，B={色盲}，显然 $A_1\cup A_2=S$，$A_1A_2=\varphi$

由已知条件知 $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$ 。$P(B|A_1)=5\%,\ P(B|A_2)=0.25\%$

由贝叶斯公式，有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{10000}}=\frac{20}{21}$$

[二十二] 一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次及格的概率为 P，若第一次及格则第二次及格的概率也为 P；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{P}{2}$ **（1）**若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。**（2）**若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解：A_i={他第 i 次及格}，i=1,2

已知 $P(A_1)=P(A_2|A_1)=P$， $P(A_2|\overline{A}_1)=P/2$

（1）B={至少有一次及格}

所以 $\overline{B}=\{两次均不及格\}=\overline{A}_1\overline{A}_2$

$$\therefore P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)$$

$$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2|\overline{A}_1)]$$

$$=1-(1-P)(1-\frac{P}{2})=\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}P^2$$

（2）$P(A_1A_2)\overset{定义}{=\!=\!=}\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}$ （*）

由乘法公式，有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P^2$

由全概率公式，有 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$

$$=P\cdot P+(1-P)\cdot\frac{P}{2}$$

$$=\frac{P^2}{2}+\frac{P}{2}$$

将以上两个结果代入（*）得 $P(A_1|A_2)=\frac{P^2}{\frac{P^2}{2}+\frac{P}{2}}=\frac{2P}{P+1}$

28.[二十五] 某人下午 **5:00** 下班，他所积累的资料表明：

到家时间	5:35~5:39	5:40~5:44	5:45~5:49	5:50~5:54	迟于 5:54
乘地铁到家的概率	**0.10**	**0.25**	**0.45**	**0.15**	**0.05**
乘汽车到家的概率	**0.30**	**0.35**	**0.20**	**0.10**	**0.05**

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 **5:47** 到家的，试求他是乘地铁回家的概率。

解：设 ***A***=“乘地铁”，***B***=“乘汽车”，***C***=“**5:45~5:49** 到家”，由题意,$AB=\varphi$,$A\cup B=S$

已知：$P(A)=0.5$,　$P(C|A)=0.45$,　$P(C|B)=0.2$,　$P(B)=0.5$

由贝叶斯公式有

$$P(A|C)=\frac{P(C|A)P(A)}{P(C)}=\frac{0.5\times0.45}{P(C|A)\frac{1}{2}+P(C|B)\frac{1}{2}}=\frac{0.45}{0.65}=\frac{9}{13}=0.6923$$

29.[二十四] 有两箱同种类型的零件。第一箱装 **5** 只，其中 **10** 只一等品；第二箱 **30** 只，其中 **18** 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。试求（**1**）第一次取到的零件是一等品的概率。（**2**）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率。

解：设 B_i 表示“第 **i** 次取到一等品”　**i=1，2**

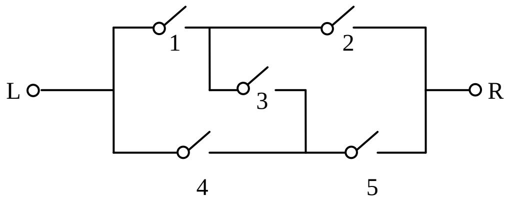
A_j 表示“第 **j** 箱产品”**j=1,2**，显然 $A_1\cup A_2=S$　　$A_1A_2=\varphi$

（**1**）$P(B_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{30}=\frac{2}{5}=0.4$（$B_1=A_1B+A_2B$ 由全概率公式解）。

（**2**）$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{10}{50}\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\frac{18}{30}\frac{17}{29}}{\frac{2}{5}}=0.4857$

（先用条件概率定义，再求 $P(B_1B_2)$时，由全概率公式解）

32.[二十六（2）]　如图 **1**，**2**，**3**，**4**，**5** 表示继电器接点，假设每一继电器接点闭合的概率为 p，且设各继电器闭合与否相互独立，求 L 和 R 是通路的概率。



记 A_i 表第 i 个接点接通

记 A 表从 L 到 R 是构成通路的。

∵　$A=A_1A_2+A_1A_3A_5+A_4A_5+A_4A_3A_2$ 四种情况不互斥

∴　$P(A)=P(A_1A_2)+P(A_1A_3A_5)+P(A_4A_5)+P(A_4A_3A_2)-P(A_1A_2A_3A_5)$

$+P(A_1A_2A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4)+P(A_1A_3A_4A_5)$

$+P(A_1A_2A_3A_4A_5)\ P(A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)$

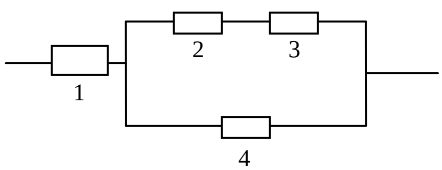
$+(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)$

又由于 A_1，A_2，　A_3，　A_4，A_5 互相独立。

故　　　$P(A)=p^2+p^3+p^2+p^3-[p^4+p^4+p^4+p^4+p^5+p^4]$

$+[p^5+p^5+p^5+p^5]-p^5=2p^2+3p^3-5p^4+2p^5$

[二十六（1）]设有 **4** 个独立工作的元件 **1**，**2**，**3**，**4**。它们的可靠性分别为 P_1，P_2，P_3，P_4，将它们按图（**1**）的方式联接，求系统的可靠性。



记 A_i 表示第 i 个元件正常工作，i=**1**，**2**，**3**，**4**，

A 表示系统正常。

∵　$A=A_1A_2A_3+A_1A_4$ 两种情况不互斥

∴　$P(A)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$　　**(**加法公式**)**

$=P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$

$=P_1P_2P_3+P_1P_4-P_1P_2P_3P_4$　　$(A_1, A_2, A_3, A_4$ 独立**)**

34.[三十一]　袋中装有 m 只正品硬币，n 只次品硬币，(次品硬币的两面均印有国徽)。在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽。问这只硬币是正品的概率为多

少？

解：设“出现 ***r*** 次国徽面”=B_r　“任取一只是正品”=A

由全概率公式，有

$$P(B_r)=P(A)P(B_r\mid A)+P(\overline{A})P(B_r\mid \overline{A})=\frac{m}{m+n}(\frac{1}{2})^r+\frac{n}{m+n}\times 1^r$$

$$\therefore\quad P(A\mid B_r)=\frac{P(A)P(B_r\mid A)}{P(B_r)}=\frac{\frac{m}{m+n}(\frac{1}{2})^r}{\frac{m}{m+n}(\frac{1}{2})^r+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

（条件概率定义与乘法公式）

35．甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7。飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落。求飞机被击落的概率。

解：高 H_i 表示飞机被 i 人击中，i=1，2，3。B_1，B_2，B_2 分别表示甲、乙、丙击中飞机

∵　$H_1=B_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2B_3$，三种情况互斥。

$H_2=B_1B_2\overline{B}_3+B_1\overline{B}_2B_3+\overline{B}_1B_2B_3$　三种情况互斥

$H_3=B_2B_2B_3$

又 B_1，B_2，B_2 独立。

∴　$P(H_1)=P(B_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)$

$+P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(B_3)=0.4\times 0.5\times 0.3+0.6$
$\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7=0.36$

$P(H_2)=P(B_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)+P(B_1)P(\overline{B}_2)P(B_3)$

$+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(B_3)=0.4\times 0.5\times 0.3$

+ 0.4×0.5×0.7+0.6×0.5×0.7=0.41

$P(H_3)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$

又因：　　$A=H_1A+H_2A+H_3A$　　三种情况互斥

故由全概率公式，有

$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(AH_3)$

$=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$

36.[三十三]设由以往记录的数据分析。某船只运输某种物品损坏 **2%**（这一事件记为 A_1），**10%**（事件 A_2），**90%**（事件 A_3）的概率分别为 $P(A_1)=0.8$, $P(A_2)=0.15$, $P(A_2)=0.05$，现从中随机地独立地取三件，发现这三件都是好的（这一事件记为 B），试分别求 $P(A_1|B)$ $P(A_2|\mathrm{B})$, $P(A_3|\mathrm{B})$（这里设物品件数很多，取出第一件以后不影响取第二件的概率，所以取第一、第二、第三件是互相独立地）

∵　B 表取得三件好物品。

$B=A_1B+A_2B+A_3B$　三种情况互斥

由全概率公式，有

∴　$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.8\times(0.98)^3+0.15\times(0.9)^3+0.05\times(0.1)^3=0.8624$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.8\times(0.98)^3}{0.8624}=0.8731$$
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.15\times(0.9)^3}{0.8624}=0.1268$$
$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.05\times(0.1)^3}{0.8624}=0.0001$$

37.[三十四]　将 ***A***，***B***，***C*** 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为α，而输出为其它一字母的概率都是(1－α)/2。今将字母串 ***AAAA***，***BBBB***，***CCCC*** 之一输入信道，输入 ***AAAA***，***BBBB***，***CCCC*** 的概率分别为 p_1, p_2, p_3 $(p_1+p_2+p_3=1)$，已知输出为 ***ABCA***，问输入的是 ***AAAA*** 的概率是多少？（设信道传输每个字母的工作是相互独立的。）

解：设 D 表示输出信号为 ***ABCA***，B_1、B_2、B_3 分别表示输入信号为 ***AAAA***，***BBBB***，***CCCC***，则 B_1、B_2、B_3 为一完备事件组，且 $P(B_i)=P_i$, $i=1, 2, 3$。

再设 A 发、A 收分别表示发出、接收字母 A，其余类推，依题意有

$P(A_{收}|A_{发})=P(B_{收}|B_{发})=P(C_{收}|C_{发})=\alpha$，

$P(A_{收}|B_{发})=P(A_{收}|C_{发})=P(B_{收}|A_{发})=P(B_{收}|C_{发})=P(C_{收}|A_{发})=P(C_{收}|B_{发})=\dfrac{1-\alpha}{2}$

又 $P(ABCA|AAAA)=P(D|B_1)=P(A_{收}|A_{发})\,P(B_{收}|A_{发})\,P(C_{收}|A_{发})\,P(A_{收}|A_{发})$

$$=\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2,$$

同样可得 $P(D|B_2)=P(D|B_3)=\alpha\cdot\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)^3$

于是由全概率公式，得

$$P(D)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(D|B_i)$$
$$=p_1a^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2+(P_2+P_3)\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3$$

由 **Bayes** 公式，得

$$P(AAAA|ABCA)=P(B_1|D)=\frac{P(B_1)P(D|B_1)}{P(D)}$$

$$=\frac{2\alpha P_1}{2\alpha P_1+(1-\alpha)(P_2+P_3)}$$

[二十九] 设第一只盒子装有 **3** 只蓝球，**2** 只绿球，**2** 只白球；第二只盒子装有 **2** 只蓝球，**3** 只绿球，**4** 只白球。独立地分别从两只盒子各取一只球。（**1**）求至少有一只蓝球的概率，（**2**）求有一只蓝球一只白球的概率，（**3**）已知至少有一只蓝球，求有一只蓝球一只白球的概率。

解：记 A_1、A_2、A_3 分别表示是从第一只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球，B_1、B_2、B_3 分别表示是从第二只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球。

（**1**）记 C={至少有一只蓝球}

$C=A_1B_1+A_1B_2+A_1B_3+A_2B_1+A_3B_1$，**5** 种情况互斥

由概率有限可加性，得

$$P(C)=P(A_1B_1)+P(A_1B_2)+P(A_1B_3)+P(A_2B_1)+P(A_3B_1)$$

$$\overset{\text{独立性}}{=\!=\!=}P(A_1)P(B_1)+P(A_1)P(B_2)+P(A_1)P(B_3)+P(A_2)P(B_1)+P(A_3)P(B_1)$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

（2）记 *D*={有一只蓝球，一只白球}，而且知 $D=A_1B_3+A_3B_1$ 两种情况互斥

$$P(D)=P(A_1B_3+P(A_3B_1)=P(A_1)P(B_3)+P(A_3)P(B_1)$$
$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{63}$$

（3） $P(D|C)=\frac{P(CD)}{P(C)}=\frac{P(D)}{P(C)}=\frac{16}{35}\qquad(\text{注意到}CD=D)$

[三十]　*A*，*B*，*C* 三人在同一办公室工作，房间有三部电话，据统计知，打给 *A*，*B*，*C* 的电话的概率分别为 $\frac{2}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{5}$**。他们三人常因工作外出，*A*，*B*，*C* 三人外出的概率分别为** $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{4}$**，设三人的行动相互独立，求**

（1）无人接电话的概率；（2）被呼叫人在办公室的概率；若某一时间断打进了 3 个电话，求（3）这 3 个电话打给同一人的概率；（4）这 3 个电话打给不同人的概率；（5）这 3 个电话都打给 *B*，而 *B* 却都不在的概率。

解：记 C_1、C_2、C_3 分别表示打给 *A*，*B*，*C* 的电话

D_1、D_2、D_3 分别表示 *A*，*B*，*C* 外出

注意到 C_1、C_2、C_3 独立，且 $P(C_1)=P(C_2)=\frac{2}{5}$，　$P(C_3)=\frac{1}{5}$

$$P(D_1)=\frac{1}{2},\quad P(D_2)=P(D_3)=\frac{1}{4}$$

（1）*P*（无人接电话）$=P(D_1D_2D_3)=P(D_1)P(D_2)P(D_3)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

（2）记 *G*=“被呼叫人在办公室”， $G=C_1\overline{D_1}+C_2\overline{D_2}+C_3\overline{D_3}$ **三种情况互斥，由有限可加性与乘法公式**

$$P(G)=P(C_1\overline{D_1})+P(C_2\overline{D_2})+P(C_3\overline{D_3})$$
$$=P(C_1)P(\overline{D_1}\mid C_1)+P(C_2)P(\overline{D_2}\mid C_2)+P(C_3)P(\overline{D_3}\mid C_3)\quad\begin{pmatrix}\text{由于某人外出与}\\ \text{否和来电话无关}\\ \text{故}P(\overline{D_k}\mid C_k)=P(\overline{D_k})\end{pmatrix}$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{13}{20}$$

（3）*H* 为“这 3 个电话打给同一个人”

$$P(H)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{17}{125}$$

（4）*R* 为“这 3 个电话打给不同的人”

R 由六种互斥情况组成，每种情况为打给 A，B，C 的三个电话，每种情况的概率为

$$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{125}$$

于是 $P(R)=6\times\frac{4}{125}=\frac{24}{125}$

（5）由于是知道每次打电话都给 *B*，其概率是 1，所以每一次打给 *B* 电话而 *B* 不在的概率为 $\frac{1}{4}$**，且各次情况相互独立**

于是　**P（3 个电话都打给 *B*，*B* 都不在的概率）=** $(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$

第二章　　随机变量及其分布

1.[一]　一袋中有 5 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、5，在其中同时取三只，以 *X* 表示取出的三只球中的最大号码，写出随机变量 *X* 的分布律

解：*X* 可以取值 3，4，5，分布律为

$$P(X=3)=P(\text{一球为3号, 两球为1,2号})=\frac{1\times C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=4)=P(\text{一球为4号, 再在1,2,3中任取两球})=\frac{1\times C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=5)=P(\text{一球为5号, 再在1,2,3,4中任取两球})=\frac{1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

也可列为下表

***X*：　3，　4，5**

***P*：** $\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{6}{10}$

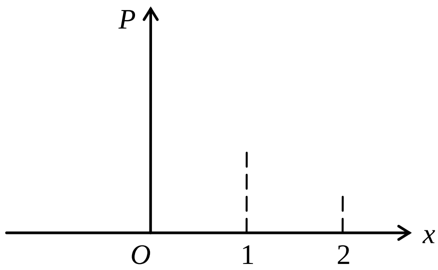
3.[三]　设在 **15** 只同类型零件中有 **2** 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 **X** 表示取出次品的只数，（**1**）求 **X** 的分布律，（**2**）画出分布律的图形。

解：任取三只，其中新含次品个数 **X** 可能为 **0**，**1**，**2** 个。

$$P(X=0)=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$$



再列为下表

***X*：　0，　1，　2**

***P*：** $\frac{22}{35},\frac{12}{35},\frac{1}{35}$

4.[四]　进行重复独立实验，设每次成功的概率为 ***p***，失败的概率为 ***q* =1－*p*(0<*p*<1)**

（**1**）将实验进行到出现一次成功为止，以 ***X*** 表示所需的试验次数，求 ***X*** 的分布律。（此时称 ***X*** 服从以 ***p*** 为参数的几何分布。）

（**2**）将实验进行到出现 ***r*** 次成功为止，以 **Y** 表示所需的试验次数，求 ***Y*** 的分布律。（此时称 ***Y*** 服从以 ***r, p*** 为参数的巴斯卡分布。）

（**3**）一篮球运动员的投篮命中率为 **45%**，以 ***X*** 表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出 ***X*** 的分布律，并计算 ***X*** 取偶数的概率。

解：（**1**）$P(X=k)=q^{k-1}p$　　　　$k=1,2,\cdots\cdots$

（**2**）$Y=r+n=\{$最后一次实验前 $r+n-1$ 次有 n 次失败，且最后一次成功$\}$

$P(Y=r+n)=C_{r+n-1}^{n}q^{n}p^{r-1}p=C_{r+n-1}^{n}q^{n}p^{r}, \quad n=0,1,2,\cdots,$ 其中 **q=1－p**，

或记 **r+n=k**，则 **P{Y=k}=**$C_{k-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r}, \quad k=r,r+1,\cdots$

（3）**$P(X=k)=(0.55)^{k-1}0.45$** **k=1,2…**

P (X 取偶数)=$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{\infty}(0.55)^{2k-1}0.45=\frac{11}{31}$

6.[六] 一大楼装有 **5** 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻 ***t*** 每个设备使用的概率为 **0.1**，问在同一时刻

（**1**）恰有 **2** 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X=2)=C_{5}^{2}p^{2}q^{5-2}=C_{5}^{2}\times(0.1)^{2}\times(0.9)^{3}=0.0729$$

（**2**）至少有 **3** 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\geq 3)=C_{5}^{3}\times(0.1)^{3}\times(0.9)^{2}+C_{5}^{4}\times(0.1)^{4}\times(0.9)+C_{5}^{5}\times(0.1)^{5}=0.00856$$

（**3**）至多有 **3** 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\leq 3)=C_{5}^{0}(0.9)^{5}+C_{5}^{1}\times 0.1\times(0.9)^{4}+C_{5}^{2}\times(0.1)^{2}\times(0.9)^{3}$$
$$+C_{5}^{3}\times(0.1)^{3}\times(0.9)^{2}=0.99954$$

（**4**）至少有一个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.59049=0.40951$$

[五] 一房间有 **3** 扇同样大小的窗子，其中只有一扇是打开的。有一只鸟自开着的窗子飞入了房间，它只能从开着的窗子飞出去。鸟在房子里飞来飞去，试图飞出房间。假定鸟是没有记忆的，鸟飞向各扇窗子是随机的。

（**1**）以 ***X*** 表示鸟为了飞出房间试飞的次数，求 ***X*** 的分布律。

（**2**）户主声称，他养的一只鸟，是有记忆的，它飞向任一窗子的尝试不多于一次。以 ***Y*** 表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数，如户主所说是确实的，试求 ***Y*** 的分布律。

（**3**）求试飞次数 ***X*** 小于 ***Y*** 的概率；求试飞次数 ***Y*** 小于 ***X*** 的概率。

解：（**1**）***X*** 的可能取值为 **1，2，3，…，*n*，…**

P {X=n}=P {前 ***n*** **－1** 次飞向了另 **2** 扇窗子，第 ***n*** 次飞了出去**}**

$$=(\frac{2}{3})^{n-1}\cdot\frac{1}{3}, \quad n=1, 2, \cdots\cdots$$

（**2**）***Y*** 的可能取值为 **1，2，3**

P {Y=1}=P {第 **1** 次飞了出去**}=**$\frac{1}{3}$

P {Y=2}=P {第 **1** 次飞向 另 **2** 扇窗子中的一扇，第 **2** 次飞了出去**}**

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

***P* {*Y*=3}=*P* {第 1，2 次飞向了另 2 扇窗子，第 3 次飞了出去}**

$$=\frac{2!}{3!}=\frac{1}{3}$$

$$(3)\ P\{X<Y\}=\sum_{k=1}^{3}P\{Y=k\}P\{X<Y\mid Y=k\}$$

$$=\sum_{k=2}^{3}P\{Y=k\}P\{X<Y\mid Y=k\}\quad\left(\begin{array}{l}\text{全概率公式并注意到}\\ P\{X<Y\mid Y=1\}=0\end{array}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{3}P\{Y=k\}P\{X<k\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right]=8/27$$

注意到X,Y独立即

$$P\{X<Y\mid Y=k\}=P\{X<k\}$$

同上，$P\{X=Y\}=\sum_{k=1}^{3}P\{Y=k\}P\{X=Y\mid Y=k\}$

$$=\sum_{k=1}^{3}P\{Y=k\}P\{X=k\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{27}=\frac{19}{81}$$

故 $P\{Y<X\}=1-P\{X<Y\}-P\{X=Y)=\frac{38}{81}$

8.[八]　甲、乙二人投篮，投中的概率各为 0.6, 0.7，令各投三次。求

（1）二人投中次数相等的概率。

记 *X* 表甲三次投篮中投中的次数

***Y* 表乙三次投篮中投中的次数**

由于甲、乙每次投篮独立，且彼此投篮也独立。

***P* (*X*=*Y*)=*P* (*X*=0, *Y*=0)+*P* (*X*=2, *Y*=2)+*P* (*X*=3, *Y*=3)**

= *P* (*X*=0) *P* (*Y*=0)+ *P* (*X*=1) *P* (*Y*=1)+ *P* (*X*=2) *P* (*Y*=2)+ *P* (*X*=3) *P* (*Y*=3)

$$=(0.4)^3\times(0.3)^3+[C_3^1\times0.6\times(0.4)^2]\times[C_3^1\times0.7\times(0.3)^2]$$

$$+[C_3^2\times(0.6)^2\times0.4]\times[C_3^2\times(0.7)^2\times.3]+(0.6)^3$$

$$\times(0.7)^3=0.321$$

（2）甲比乙投中次数多的概率。

***P* (*X*>*Y*)=*P* (*X*=1, *Y*=0)+*P* (*X*=2, *Y*=0)+*P* (*X*=2, *Y*=1)+**

***P* (*X*=3) *P* (*Y*=0)+ *P* (*X*=3) *P* (*Y*=1)+ *P* (*X*=3) *P* (*Y*=2)**

=*P* (*X*=1) *P* (*Y*=0) + *P* (*X*=2, *Y*=0)+ *P* (*X*=2, *Y*=1)+

P (X=3) P (Y=0)+ P (X=3) P (Y=1)+ P (X=3) P (Y=2)

$$=[C_3^1\times 0.6\times(0.4)^2]\times(0.3)^3+[C_3^2\times(0.6)^2\times 0.4]\times(0.3)^8+$$
$$[C_3^2\times(0.6)^2\times 0.4]\times[C_3^1\times 0.7\times(0.3)^2]+(0.6)^3$$
$$\times(0.3)^3+(0.6)^3\times[C_3^1\times 0.7\times(0.3)^2]+(0.6)^3$$
$$\times[C_3^2\times(0.7)^2\times 0.3]=0.243$$

9.[十]　有甲、乙两种味道和颜色极为相似的名酒各 **4** 杯。如果从中挑 **4** 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次。

（**1**）某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

（**2**）某人声称他通过品尝能区分两种酒。他连续试验 **10** 次，成功 **3** 次。试问他是猜对的，还是他确有区分的能力（设各次试验是相互独立的。）

解：（**1**）P (一次成功)= $\frac{1}{C_8^4}=\frac{1}{70}$

（**2**）P (连续试验 **10** 次，成功 **3** 次)= $C_{10}^3(\frac{1}{70})^3(\frac{69}{70})^7=\frac{3}{10000}$。此概率太小，按实际推断原理，就认为他确有区分能力。

[九]　有一大批产品，其验收方案如下，先做第一次检验：从中任取 **10** 件，经验收无次品接受这批产品，次品数大于 **2** 拒收；否则作第二次检验，其做法是从中再任取 **5** 件，仅当 **5** 件中无次品时接受这批产品，若产品的次品率为 **10%**，求

（**1**）这批产品经第一次检验就能接受的概率

（**2**）需作第二次检验的概率

（**3**）这批产品按第 **2** 次检验的标准被接受的概率

（**4**）这批产品在第 **1** 次检验未能做决定且第二次检验时被通过的概率

（**5**）这批产品被接受的概率

解：X 表示 **10** 件中次品的个数，Y 表示 **5** 件中次品的个数，

由于产品总数很大，故 X~B（**10**，**0.1**），Y~B（**5**，**0.1**）（近似服从）

（**1**）$P\{X=0\}=0.9^{10}\approx 0.349$

（**2**）$P\{X\leqslant 2\}=P\{X=2\}+P\{X=1\}=C_{10}^2 0.1^2 0.9^8+C_{10}^1 0.1\, 0.9^9\approx 0.581$

（**3**）$P\{Y=0\}=0.9^5\approx 0.590$

（**4**）$P\{0<X\leqslant 2，Y=0\}$　　($\{0<X\leqslant 2\}$与$\{Y=2\}$独立)

$=P\{0<X\leqslant 2\}P\{Y=0\}$

$=0.581\times0.590\approx0.343$

（5）$P\{X=0\}+P\{0<X\leqslant 2,\ Y=0\}$

$\approx 0.349+0.343=0.692$

12.[十三] 电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布，求

（1）每分钟恰有 8 次呼唤的概率

法一： $P(X=8)=\frac{4^8}{8!}e^{-4}=0.029770$（直接计算）

法二： $P(X=8)=P(X\geqslant 8)-P(X\geqslant 9)$（查λ = 4 泊松分布表）。

$= 0.051134-0.021363=0.029771$

（2）每分钟的呼唤次数大于 10 的概率。

$P(X>10)=P(X\geqslant 11)=0.002840$（查表计算）

[十二 (2)]每分钟呼唤次数大于 3 的概率。

$P\{X>3\}=P\{X\geq 4\}=0.566530$

[十六] 以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一顾客到达的等待时间(以分计)，X 的分布函数是

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-0.4x}, & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

求下述概率：

（1）P\{至多 3 分钟\}；（2）P \{至少 4 分钟\}；（3）P\{3 分钟至 4 分钟之间\}；

（4）P\{至多 3 分钟或至少 4 分钟\}；（5）P\{恰好 2.5 分钟\}

解：（1）P\{至多 3 分钟\}= $P\{X\leqslant 3\}=F_X(3)=1-e^{-1.2}$

（2）P \{至少 4 分钟\} $P(X\geqslant 4)=1-F_X(4)=e^{-1.6}$

（3）P\{3 分钟至 4 分钟之间\}= $P\{3<X\leqslant 4\}=F_X(4)-F_X(3)=e^{-1.2}-e^{-1.6}$

（4）P\{至多 3 分钟或至少 4 分钟\}= P\{至多 3 分钟\}+P\{至少 4 分钟\}

$=1-e^{-1.2}+e^{-1.6}$

（5）P\{恰好 2.5 分钟\}= $P(X=2.5)=0$

18.[十七] 设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0, x<1,\\ \ln x, 1\leq x<e,\\ 1, x\geq e.\end{cases}$，

求（1）$P(X<2)$, $P\{0<X\leqslant 3\}$, $P(2<X<5/2)$；（2）求概率密度 $f_X(x)$.

解：（1）$P(X\leqslant 2)=F_X(2)=\ln 2$， $P(0<X\leqslant 3)=F_X(3)-F_X(0)=1$，

$$P(2<X<\frac{5}{2}=F_X(\frac{5}{2})-F_X(2)=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}$$

（**2**） $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},1<x<e,\\ 0,\text{其它}\end{cases}$

20.[十八（2）]设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为

（**1**） $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（**2**） $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

求 X 的分布函数 $F(x)$，并作出（2）中的 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的图形。

解：当－1≤x≤1 时：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\,dx+\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_{-1}^{X}$$

$$=\frac{1}{\pi}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}$$

当 1<x 时： $F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\,dx+\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2dx}+\int_{1}^{x}0\,dx=1$

故分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{\pi}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2} & -1\le x\le 1\\ 1 & 1<x\end{cases}$$

解：（2） $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

当$x<0$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0$

当$0\le x<1$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{x}t\,dt=\frac{x^2}{2}$

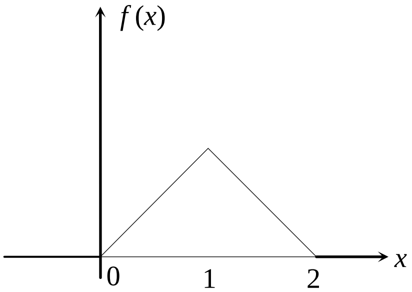
当$1\le x\le 2$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{1}t\,dt+\int_{1}^{x}(2-t)dt=2x-\frac{x^2}{2}-1$

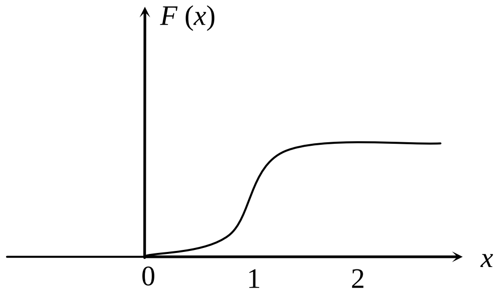
当$2<x$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{1}t\,dt+\int_{1}^{2}(2-t)dt+\int_{2}^{x}0\,dt=1$

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\le x\le 2\\ 1 & 2<x\end{cases}$$

（2）中的 *f* (*x*)与 *F* (*x*)的图形如下





22.[二十]　某种型号的电子的寿命 *X*（以小时计）具有以下的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2} & x>1000\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

现有一大批此种管子（设各电子管损坏与否相互独立）。任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少？

解：一个电子管寿命大于 1500 小时的概率为

$$P(X>1500)=1-P(X\le 1500)=1-\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}dx=1-\left\{1000(-\frac{1}{x})\Big|_{1000}^{1500}\right\}$$

$$=1-(1-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$$

令 *Y* 表示“任取 5 只此种电子管中寿命大于 1500 小时的个数”。则 $Y\sim B(5,\dfrac{2}{3})$**，**

$$P(Y\ge 2)=1-P(Y<2)=1-\{P(Y=0)+P(Y=1)\}=1-\left\{(\frac{1}{3})^5+C_5^1\cdot(\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{3})^4\right\}$$

$$=1-\frac{1+5\times 2}{3^5}=1-\frac{11}{243}=\frac{232}{243}$$

23.[二十一]　设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 *X*（以分计）服从指数分布，其概率密度为：

$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, x>0\\ 0, 其它\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 **10** 分钟他就离开。他一个月要到银行 **5** 次。以 ***Y*** 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出 ***Y*** 的分布律。并求 ***P*****（*Y*≥1）**。

解：该顾客“一次等待服务未成而离去”的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}f_X(x)dx=\frac{1}{5}\int_{10}^{+\infty}e^{-\frac{x}{5}}dx=-e^{-\frac{x}{5}}\Big|_{10}^{+\infty}=e^{-2}$$

因此$Y\sim B(5,e^{-2})$.即 $P(Y=k)=\binom{5}{k}e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k},(k=1,2,3,4,5$

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5=1-(1-\frac{1}{7.389})^5=1-(1-0.1353363)^5$$

$$=1-0.8677^5=1-0.4833=0.5167.$$

24.[二十二]　设 K 在（0，5）上服从均匀分布，求方程$4x^2+4xK+K+2=0$**有实根的概率**

∵　***K*** **的分布密度为：** $f(K)=\begin{cases}\frac{1}{5-0} & 0<K<5\\ 0 & 其他\end{cases}$

要方程有根，就是要 *K* 满足$(4K)^2-4\times 4\times(K+2)\geq 0$。

解不等式，得 *K*≥2 时，方程有实根。

∴　$$P(K\geq 2)=\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^5\frac{1}{5}dx+\int_5^{+\infty}0\,dx=\frac{3}{5}$$

25.[二十三]　设 *X*～*N*（3.2^2）

（1）求 *P* (2<*X*≤5)，*P* (－4)<*X*≤10)，*P*{|*X*|>2}，*P* (*X*>3)

∵　**若 *X*～*N*（μ，σ^2），则 *P* (α<*X*≤β)=**$\varphi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)-\varphi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$

∴　$$P(2<X\leq 5)=\varphi\left(\frac{5-3}{2}\right)-\varphi\left(\frac{2-3}{2}\right)=\varphi(1)-\varphi(-0.5)$$

$$=0.8413-0.3085=0.5328$$

$$P(-4<X\leq 10)=\varphi\left(\frac{10-3}{2}\right)-\varphi\left(\frac{-4-3}{2}\right)=\varphi(3.5)-\varphi(-3.5)$$

$$=0.9998-0.0002=0.9996$$

$$P(|X|>2)=1-P(|X|<2)=1-P(-2<P<2)$$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right)\right]$$

=1－φ (－0.5) +φ (－2.5)

=1－0.3085+0.0062=0.6977

$$P(X>3)=1-P(X\leqslant 3)=1-\varphi\left(\frac{3-3}{2}\right)=1-0.5=0.5$$

（2）决定 C 使得 $P(X>C)=P(X\leqslant C)$

∵ $P(X>C)=1-P(X\leqslant C)=P(X\leqslant C)$

得 $P(X\leqslant C)=\frac{1}{2}=0.5$

又 $P(X\leqslant C)=\varphi\left(\frac{C-3}{2}\right)=0.5$, 查表可得 $\frac{C-3}{2}=0$ ∴ $C=3$

26.[二十四] 某地区 18 岁的女青年的血压（收缩区，以 mm-Hg 计）服从 $N(110,12^2)$ 在该地区任选一 18 岁女青年，测量她的血压 X。求

（1）$P(X\leq 105)$，$P(100<X\leq 120)$. （2）确定最小的 X 使 $P(X>x)\leq 0.05$.

解: $(1)\ P(X\leq 105)=\Phi(\frac{105-110}{12})=\Phi(-0.4167)=1-\Phi(0.4167)=1-0.6616=0.3384$

$$P(100<X\leq 120)=\Phi(\frac{120-110}{12})-\Phi(\frac{100-110}{12})=\Phi(\frac{5}{6})-\Phi(-\frac{5}{6})$$

$$=2\Phi(\frac{5}{6})-1=2\Phi(0.8333)-1=2\times 0.7976-1=0.5952$$

$$(2)\ P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-\Phi(\frac{x-110}{12})\leq 0.05\Rightarrow \Phi(\frac{x-110}{12})\geq 0.95.$$

查表得 $\frac{x-110}{12}\geq 1.645.\Rightarrow x\geq 110+19.74=129.74.$ 故最小的 $X=129.74.$

27.[二十五] 由某机器生产的螺栓长度（*cm*）服从参数为 $\mu=10.05$，$\sigma=0.06$ 的正态分布。规定长度在范围 10.05±0.12 内为合格品，求一螺栓为不合格的概率是多少？

设螺栓长度为 X

$P\{X$ 不属于$(10.05-0.12, 10.05+0.12)$

$=1-P(10.05-0.12<X<10.05+0.12)$

$$=1-\left\{\Phi\left[\frac{(10.05+0.12)-10.05}{0.06}\right]-\Phi\left[\frac{(10.05-0.12)-10.05}{0.06}\right]\right\}$$

$=1-\{\varphi(2)-\varphi(-2)\}$

$=1-\{0.9772-0.0228\}$

$=0.0456$

28.[二十六] 一工厂生产的电子管的寿命 X（以小时计）服从参数为 $\mu=160$，σ (未知)的正态分布，若要求 $P(120<X\leqslant 200==0.80$，允许 σ 最大为多少？

∵ $P(120 < X \leqslant 200) = \Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right) = 0.80$

又对标准正态分布有**φ (－*x*)=1－φ (*x*)**

∴ 上式变为$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\right] \geq 0.80$

解出$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)$便得：$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geq 0.9$

再查表，得$\frac{40}{\sigma} \geq 1.281 \quad \sigma \leq \frac{40}{1.281} = 31.25$

30.[二十七] 设随机变量 ***X*** 的分布律为：

X：	－2，	－1，	0，	1，	3
P：	$\frac{1}{5}$，	$\frac{1}{6}$，	$\frac{1}{5}$，	$\frac{1}{15}$，	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布律

∵

$Y=X^2$：	$(-2)^2$	$(-1)^2$	$(0)^2$	$(1)^2$	$(3)^2$
P：	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

再把 X^2 的取值相同的合并，并按从小到大排列，就得函数 ***Y*** 的分布律为：

∴

Y：	0	1	4	9
P：	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

31.[二十八] 设随机变量 ***X*** 在（0，1）上服从均匀分布

（1）求 $Y=e^X$ 的分布密度

∵ ***X*** 的分布密度为：$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x\text{为其他} \end{cases}$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数

又 $X=h(Y)=\ln Y$，反函数存在

且 $\alpha = \min[g(0), g(1)] = \min(1, e) = 1$

$\beta = \max[g(0), g(1)] = \max(1, e) = e$

∴ ***Y*** 的分布密度为：$\psi(y) = \begin{cases} f[h(y)]\cdot|h'(y)| = 1\cdot\frac{1}{y} & 1 < y < e \\ 0 & y\text{为其他} \end{cases}$

（2）求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度。

∵ $Y=g(X)=-2\ln X$ 是单调减函数

又 $X = h(Y) = e^{-\frac{Y}{2}}$ 反函数存在。

且　　　$\alpha = min[g(0), g(1)] = min(+\infty, 0) = 0$

　　　　$\beta = max[g(0), g(1)] = max(+\infty, 0) = +\infty$

∴　**Y** 的分布密度为：$\psi(y)=\begin{cases} f[h(y)]\cdot|h'(y)|=1\cdot\left|-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right|=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<y<+\infty \\ 0 & y\text{为其他} \end{cases}$

32.[二十九]　设 $X \sim N$（**0，1**）

（**1**）求 $Y=e^X$ 的概率密度

∵　**X** 的概率密度是 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$

　　$Y=g(X)=e^X$　是单调增函数

又　　　$X=h(Y)=lnY$　反函数存在

且　　　$\alpha = min[g(-\infty), g(+\infty)] = min(0, +\infty) = 0$

　　　　$\beta = max[g(-\infty), g(+\infty)] = max(0, +\infty) = +\infty$

∴　**Y** 的分布密度为：

$$\psi(y)=\begin{cases} f[h(y)]\cdot|h'(y)|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{y} & 0<y<+\infty \\ 0 & y\text{为其他} \end{cases}$$

（**2**）求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度。

在这里，$Y=2X^2+1$ 在 $(+\infty，-\infty)$ 不是单调函数，没有一般的结论可用。

设 **Y** 的分布函数是 $F_Y(y)$，

则　　　　$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(2X^2+1\leqslant y)$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

当 $y<1$ 时：$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant 1$ 时：$F_y(y)=P\left(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)=\displaystyle\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

故 **Y** 的分布密度 $\psi(y)$ 是：

当 $y\leqslant 1$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>1$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}$$

（3）求 $Y=|X|$ 的概率密度。

∵ Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(|X|\leqslant y)$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(|X|\leqslant y)=P(-y\leqslant X\leqslant y)=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

∴ Y 的概率密度为：

当 $y\leqslant 0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

33.[三十] （1）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，求 $Y=X^3$ 的概率密度。

∵ $Y=g(X)=X^3$ 是 X 单调增函数，

又 $X=h(Y)=Y^{\frac{1}{3}}$，反函数存在，

且 $\alpha=\min[g(-\infty),g(+\infty)]=\min(0,+\infty)=-\infty$

$\beta=\max[g(-\infty),g(+\infty)]=\max(0,+\infty)=+\infty$

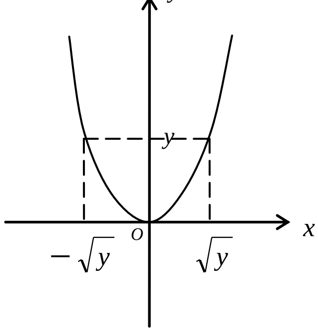
∴ Y 的分布密度为：

$$\psi(y)=f[h(h)]\cdot|h'(y)|=f(y^{\frac{1}{3}})\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}},-\infty<y<+\infty,\text{但}y\neq 0$$

$$\psi(0)=0$$

（2）设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

法一：∵ X 的分布密度为：$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$



$Y=x^2$ 是非单调函数

当 $x<0$ 时 $y=x^2$↙ 反函数是 $x=-\sqrt{y}$

当 $x<0$ 时 $y=x^2$↗ $x=\sqrt{y}$

∴ $Y\sim f_Y(y)=f(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'+f(\sqrt{y})(\sqrt{y})'$

$$=\begin{cases}0+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

法二：$Y\sim F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\sqrt{y}<X\le\sqrt{y})=P(X\le\sqrt{y})-P(X\le-\sqrt{y})$

$$\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}}e^{-x}dx+0=1-e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

∴ $Y\sim f_Y(y)=$ $\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0.\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

34.[三十一]　设 *X* 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & 0<x<\pi\\ 0 & x\text{为其他}\end{cases}$$

求 *Y*=sin *X* 的概率密度。

∵　$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)$

$\qquad=P(\sin X\leqslant y)$

当 $y<0$ 时：$F_Y(y)=0$

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时：$F_Y(y)=P(\sin X\leqslant y)=P(0\leqslant X\leqslant \arcsin y$ 或 $\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant\pi)$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$$

当 $1<y$ 时：$F_Y(y)=1$

∴　*Y* 的概率密度 $\psi(y)$ 为：

$y\leqslant 0$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

$0<y<1$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=$ $\left(\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx\right)'$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

$1\leqslant y$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(1)'=0$

36.[三十三]　某物体的温度 T (^0F)是一个随机变量，且有 $T\sim N(98.6，2)$，试求 θ(℃)

的概率密度。[已知$\theta=\frac{5}{9}(T-32)$]

法一：∵ ***T*** 的概率密度为 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(t-98.6)^2}{2\times 2}}$，$-\infty<t<+\infty$

又 $\theta=g(T)=\frac{5}{9}(T-32)$ 是单调增函数。

$T=h(\theta)=\frac{9}{5}\theta+32$ 反函数存在。

且 **$\alpha=min[g(-\infty), g(+\infty)]=min(-\infty,+\infty)=-\infty$**

$\beta=max[g(-\infty), g(+\infty)]=max(-\infty,+\infty)=+\infty$

∴ **θ** 的概率密度**ψ (θ)**为

$$\psi(\theta)=f[h(\theta)]\cdot|h'(\theta)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(\frac{9}{5}\theta+32-98.6)^2}{4}}\cdot\frac{9}{5}$$

$$=\frac{9}{10\sqrt{\pi}}e^{-\frac{81(\theta-37)^2}{100}},-\infty<\theta<+\infty$$

法二：根据定理：若 ***X***～***N***（α_1, σ_1），则 ***Y=aX+b***～***N*** **($a\alpha_1+b$, $a^2\sigma^2$)**

由于 ***T***～***N***（**98.6, 2**）

故 $\theta=\frac{5}{9}T-\frac{160}{9}\sim N\left[\frac{5}{9}\times 98.6-\frac{160}{9},\left(\frac{5}{9}\right)^2\times 2\right]=N\left[\frac{333}{9},\left(\frac{5}{9}\right)^2\times 2\right]$

故**θ** 的概率密度为：

$$\psi(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{5}{9}\sqrt{2}}e^{-\frac{\left(\theta-\frac{333}{9}\right)^2}{2\times\left(\frac{5}{9}\right)^2\times 2}}=\frac{9}{10\sqrt{\pi}}e^{-\frac{81(\theta-37)^2}{100}},\quad -\infty<\theta<+\infty$$

第三章　多维随机变量及其分布

1.[一] 在一箱子里装有 **12** 只开关，其中 **2** 只是次品，在其中随机地取两次，每次取一只。考虑两种试验：（**1**）放回抽样，（**2**）不放回抽样。我们定义随机变量 ***X***，***Y*** 如下：

$$X=\begin{cases}0, \text{若第一次取出的是正品,}\\ 1, \text{若第一次取出的是次品。}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, \text{若第二次取出的是正品,}\\ 1, \text{若第二次取出的是次品。}\end{cases}$$

试分别就（1）（2）两种情况，写出 *X* 和 *Y* 的联合分布律。

解：（1）放回抽样情况

由于每次取物是独立的。由独立性定义知。

$$P(X=i,\quad Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$$

$$P(X=0, Y=0)=\frac{10}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{25}{36}$$

$$P(X=0, Y=1)=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{5}{36}$$

$$P(X=1, Y=0)=\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{5}{36}$$

$$P(X=1, Y=1)=\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{1}{36}$$

或写成

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

（2）不放回抽样的情况

$$P\{X=0, Y=0\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$$

$$P\{X=0, Y=1\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{10}{66}$$

$$P\{X=1, Y=0\}=\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}=\frac{10}{66}$$

$$P\{X=1, Y=1\}=\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$$

或写成

Y \ X	0	1

0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

3.[二]　盒子里装有 3 只黑球，2 只红球，2 只白球，在其中任取 4 只球，以 *X* 表示取到黑球的只数，以 *Y* 表示取到白球的只数，求 *X*，*Y* 的联合分布律。

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

解：（*X*，*Y*）的可能取值为(i, j)，i=0，1，2，3，　j=0，12，$i+j\geqslant 2$，联合分布律为

$$P\{X=0, Y=2\}=\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35}$$

$$P\{X=1, Y=1\}=\frac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35}$$

$$P\{X=1, Y=2\}=\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$$

$$P\{X=2, Y=0\}=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$$

$$P\{X=2, Y=1\}=\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$$

$$P\{X=2, Y=2\}=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$$

$$P\{X=3, Y=0\}=\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$$

$P\{X=3, Y=1\}=\dfrac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{2}{35}$

$P\{X=3, Y=2\}=0$

5.[三] 设随机变量（X，Y）概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4\\ 0, \text{其它}\end{cases}$

（1）确定常数 k。　　（2）求 $P\{X<1, Y<3\}$

（3）求 $P(X<1.5\}$　　（4）求 $P(X+Y\leqslant 4\}$

分析：利用 $P\{(X, Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_{G\cap D_o} f(x,y)dx\,dy$ 再化为累次积分，其中

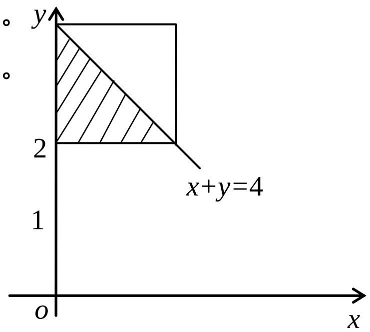
$$D_o=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}0<x<2,\\ 2<y<4\end{array}\right.\right\}$$

解：（1）$\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\,dy=\int_0^2\int_2^1 k(6-x-y)dydx$，$\therefore k=\dfrac{1}{8}$

（2）$P(X<1, Y<3)=\int_0^1 dx\int_2^3\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{3}{8}$

（3）$P(X\leq 1.5)=P(X\leq 1.5, Y<\infty)=\int_0^{1.5}dx\int_2^4\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{27}{32}$

（4）$P(X+Y\leq 4)=\int_0^2 dx\int_0^{4-x}\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{2}{3}$



6.（1）求第 1 题中的随机变量（X、Y）的边缘分布律。

（2）求第 2 题中的随机变量（X、Y）的边缘分布律。

解：（1）① 放回抽样（第 1 题）

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

边缘分布律为

X	0	1
$P_i\cdot$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1
$P\cdot_j$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

② 不放回抽样（第 1 题）

X / Y	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

边缘分布为

X	0	1
$P_{i\cdot}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1
$P_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

（2）（X，Y ）的联合分布律如下

X / Y	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

解：　X 的边缘分布律　　　　　　　　Y 的边缘分布律

X	0	1	2	3
$P_{i\cdot}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	1	3
$P_{\cdot j}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{8}$

7.[五]　设二维随机变量（X，Y ）的概率密度为

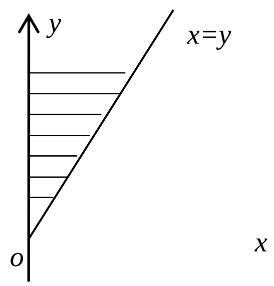
$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 求边缘概率密度.

解：$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4x^2(2-x) & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)dx=2.4y(3-4y+y^2) & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

8.[六]　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y\\ 0, \text{其它.}\end{cases}$$ 求边缘概率密度。



解: $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

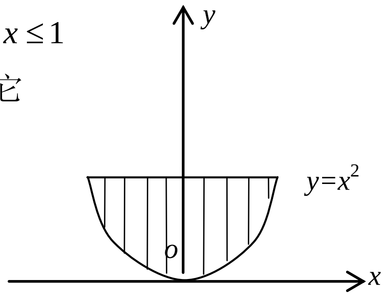
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}, y>0,\\ \qquad 0, \qquad\qquad y\le 0,\end{cases}$$

9.[七] 设二维随机变量（***X***，***Y***）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, x^2\le y\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$

（1）试确定常数 ***c***。**（2）**求边缘概率密度。

解: l= $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} cx^2ydx=c\int_0^1\frac{2}{3}y^{\frac{5}{2}}dy=\frac{4}{21}c\Rightarrow c=\frac{21}{4}$

$$X\sim f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), -1\le x\le 1\\ \qquad 0, \qquad\qquad 其它\end{cases}$$



$$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}\frac{21}{4}d^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} \quad 0\le y\le 1\\ \qquad 0 \qquad\qquad 其它\end{cases}$$

15. 第 **1** 题中的随机变量 ***X*** 和 ***Y*** 是否相互独立。

解：放回抽样的情况

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\} = \frac{25}{36}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=0\} = P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{36}$$

在放回抽样的情况下，***X*** 和 ***Y*** 是独立的

不放回抽样的情况：

$$P\{X=0, Y=0\} =\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$$

$$P\{X=0\}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$$P\{X=0\}= P\{X=0, Y=0\} + P\{Y=0, X=1\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}+\frac{2}{11}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5}{6}$$

$$P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\} =\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

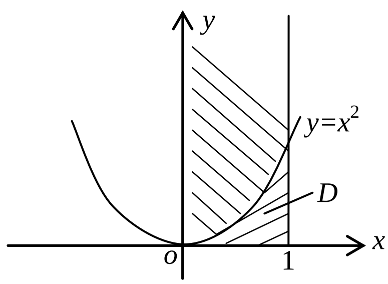
$$P\{X=0, Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

∴ ***X*** 和 ***Y*** 不独立

16.[十四]　设 ***X***，***Y*** 是两个相互独立的随机变量，***X*** 在（**0**，**1**）上服从均匀分布。***Y*** 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0.\end{cases}$

（**1**）求 ***X*** 和 ***Y*** 的联合密度。（**2**）设含有 **a** 的二次方程为 **a²+2Xa+Y=0**,试求有实根的概率。

解：（**1**）***X*** 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\ 0, 其它\end{cases}$



Y 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0.\end{cases}$ 且知 ***X, Y*** 相互独立，

于是（***X***，***Y***）的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1, y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（**2**）由于 **a** 有实跟根，从而判别式 $\Delta=4X^2-4Y\ge 0$

即：$Y\le X^2$　记 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1, 0<y<x^2\}$

$$P(Y\le X^2)=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=-\int_0^1 dx\int_0^{x^2}de^{-\frac{y}{2}}=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(2))=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)$$
$$=1-2.5066312\times 0.3413=1-0.8555=0.1445$$

19.[十八]　设某种商品一周的需要量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

并设各周的需要量是相互独立的，试求（**1**）两周（**2**）三周的需要量的概率密度。

解：（1）设第一周需要量为 X，它是随机变量

设第二周需要量为 Y，它是随机变量

且为同分布，其分布密度为

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$

Z=X+Y 表示两周需要的商品量，由 X 和 Y 的独立性可知：

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x}ye^{-y} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

∵ $z\geqslant 0$

∴ 当 $z<0$ 时，$f_z(z)=0$

当 $z>0$ 时，由和的概率公式知

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_y(y)dy$$

$$=\int_0^z (z-y)e^{-(z-y)}\cdot ye^{-y}dy=\frac{z^3}{6}e^{-z}$$

∴ $$f_z(z)=\begin{cases} \dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$$

（2）设 z 表示前两周需要量，其概率密度为 $f_z(z)=\begin{cases} \dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$

设ξ 表示第三周需要量，其概率密度为：

$$f_\xi(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

z 与ξ 相互独立

η $=z+$ξ 表示前三周需要量

则：∵η $\geqslant 0$，　∴当 $u<0$，　$f_\eta(u)=0$

当 $u>0$ 时

$$f_\eta(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y)f_\xi(y)dy$$
$$=\int_0^u \frac{1}{6}(u-y)^3 e^{-(u-y)}\cdot ye^{-y}dy$$
$$=\frac{u^5}{120}e^{-u}$$

所以η 的概率密度为

$$f_\eta(u)=\begin{cases}\dfrac{u^5}{120}e^{-u} & u>0\\ 0 & u\le 0\end{cases}$$

22.[二十二]　设某种型号的电子管的寿命（以小时计）近似地服从 N（160，20^2）分布。随机地选取 4 只求其中没有一只寿命小于 180 小时的概率。

解：设 X_1，X_2，X_3，X_4 为 4 只电子管的寿命，它们相互独立，同分布，其概率密度为：

$$f_T(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 20}e^{-\frac{(t-160)^2}{2\times 20^2}}$$

$$f\{X<180\}=F_X(180)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{20}\int_{-\infty}^{180}\frac{(t-160)^2}{2\times 20^2}dt$$

$$\underline{\underline{\text{令}\frac{t-160}{20}=u}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(\frac{180-60}{20})$$

$$\underline{\underline{\text{查表}}}\ 0.8413$$

设 $N=\min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

$$P\{N>180\}=P\{X_1>180, X_2>180, X_3>180, X_4>180\}$$
$$=P\{X>180\}^4=\{1-p[X<180]\}^4=(0.1587)^4=0.00063$$

27.[二十八]　设随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	0	1	2	3	4	5

0	**0**	**0.01**	**0.03**	**0.05**	**0.07**	**0.09**
1	**0.01**	**0.02**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.08**
2	**0.01**	**0.03**	**0.05**	**0.05**	**0.05**	**0.06**
3	**0.01**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.06**	**0.05**

（1）求 $P\{X=2|Y=2\}$，$P\{Y=3|X=0\}$

（2）求 $V=max(X, Y)$的分布律

（3）求 $U=min(X, Y)$的分布律

解：（1）由条件概率公式

$$P\{X=2|Y=2\}=\frac{P\{X=2, Y=2\}}{P\{Y=2\}}$$

$$=\frac{0.05}{0.01+0.03+0.05+0.05+0.05+0.08}$$

$$=\frac{0.05}{0.25}=0.2$$

同理　$P\{Y=3|X=0\}=\frac{1}{3}$

（2）变量 $V=max\{X, Y\}$

显然 V 是一随机变量，其取值为　V：0　1　2　3　4　5

$P\{V=0\}=P\{X=0\quad Y=0\}=0$

$P\{V=1\}=P\{X=1，Y=0\}+P\{X=1，Y=1\}+P\{X=0，Y=1\}$

$=0.01+0.02+0.01=0.04$

$P\{V=2\}=P\{X=2，Y=0\}+P\{X=2，Y=1\}+P\{X=2，Y=2\}$

$+P\{Y=2, X=0\}+P\{Y=2, X=1\}$

$=0.03+0.04+0.05+0.01+0.03=0.16$

$P\{V=3\}=P\{X=3，Y=0\}+P\{X=3，Y=1\}+P\{X=3，Y=2\}+P\{X=3，Y=3\}$

$+P\{Y=3, X=0\}+P\{Y=3, X=1\}+P\{Y=3, X=2\}$

$=0.05+0.05+0.05+0.06+0.01+0.02+0.04=0.28$

$P\{V=4\}=P\{X=4，Y=0\}+P\{X=4，Y=1\}+P\{X=4，Y=2\}+P\{X=4，Y=3\}$

$=0.07+0.06+0.05+0.06=0.24$

$P\{V=5\}=P\{X=5，Y=0\}+\cdots\cdots+P\{X=5，Y=3\}$

$=0.09+0.08+0.06+0.05=0.28$

（3）显然 U 的取值为 0，1，2，3

$$P\{U=0\}=P\{X=0,Y=0\}+\cdots\cdots+P\{X=0,Y=3\}+P\{Y=0,X=1\}$$
$$+\cdots\cdots+P\{Y=0,X=5\}=0.28$$

同理　　$P\{U=1\}=0.30$　$P\{U=2\}=0.25$　$P\{U=3\}=0.17$

或缩写成表格形式

（2）

V	0	1	2	3	4	5
P_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

（3）

U	0	1	2	3
P_k	0.28	0.30	0.25	0.17

（4）$W=V+U$ 显然 W 的取值为 0，1，……8

$$P\{W=0\}=P\{V=0\ U=0\}=0$$
$$P\{W=1\}=P\{V=0,U=1\}+P\{V=1 U=0\}$$

∵　$V=\max\{X,Y\}=0$ 又 $U=\min\{X,Y\}=1$ 不可能

上式中的 $P\{V=0,U=1\}=0$，

又　$P\{V=1\ U=0\}=P\{X=1\ Y=0\}+P\{X=0\quad Y=1\}=0.2$

故　$P\{W=1\}=P\{V=0,U=1\}+P\{V=1,U=0\}=0.2$

$$P\{W=2\}=P\{V+U=2\}=P\{V=2,U=0\}+P\{V=1,U=1\}$$
$$=P\{X=2\ Y=0\}+P\{X=0\quad Y=2\}+P\{X=1\quad Y=1\}$$
$$=0.03+0.01+0.02=0.06$$
$$P\{W=3\}=P\{V+U=3\}=P\{V=3,U=0\}+P\{V=2,U=1\}$$
$$=P\{X=3\ Y=0\}+P\{X=0,Y=3\}+P\{X=2,Y=1\}$$
$$+P\{X=1,Y=2\}=0.05+0.01+0.04+0.03=0.13$$
$$P\{W=4\}=P\{V=4,U=0\}+P\{V=3,U=1\}+P\{V=2,U=2\}$$
$$=P\{X=4\ Y=0\}+P\{X=3,Y=1\}+P\{X=1,Y=3\}$$
$$+P\{X=2,Y=2\}=0.19$$
$$P\{W=5\}=P\{V+U=5\}=P\{V=5,U=0\}+P\{V=5,U=1\}$$
$$+P\{V=3,U=2\}=P\{X=5\ Y=0\}+P\{X=5,Y=1\}$$
$$+P\{X=3,Y=2\}+P\{X=2,Y=3\}=0.24$$
$$P\{W=6\}=P\{V+U=6\}=P\{V=5,U=1\}+P\{V=4,U=2\}$$
$$+P\{V=3,U=3\}=P\{X=5,Y=1\}+P\{X=4,Y=2\}$$

$+P\{X=3，Y=3\}=0.19$

$P\{W=7\}=P\{V+U=7\}=P\{V=5, U=2\}+P\{V=4，U=3\}$

$=P\{V=5，U=2\}+P\{X=4，Y=3\}=0.6+0.6=0.12$

$P\{W=8\}=P\{V+U=8\}=P\{V=5, U=3\}+P\{X=5，Y=3\}=0.05$

或列表为

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

[二十一] 设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<+\infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（1）试确定常数 b；（2）求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$

（3）求函数 $U=\max(X, Y)$的分布函数。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy\,dx=b[1-e^{-1}]$

$$\therefore\quad b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases} 0 & x\le 0\text{或}x\ge 1 \\ \int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} 0, & y\le 0 \\ \int_0^1 be^{-(x+y)}dx=e^{-y} & y>0 \end{cases}$$

（3）$F_u(\omega)=P\{U\le u\}=P\{\max(X,Y)\le u\}=P\{X\le u, Y\le u\}$

$=F(u,u)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{u}f(x,y)dx\,dy$

$u<0,\ F_U(u)=0$

$$0\le u<1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^u be^{-(x+y)}dx\,dy=\frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$$

$$u\ge 1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^1 be^{-(x+y)}dx\,dy=1-e^{-u}$$

第四章

2.[二]　某产品的次品率为 0.1，检验员每天检验 4 次。每次随机地抽取 10 件产品进行检验，如果发现其中的次品数多于 1，就去调整设备，以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 E (X)。（设诸产品是否是次品是相互独立的。）

解：设表示一次抽检的 10 件产品的次品数为ξ

$P=P$（调整设备）$=P(\xi>1)=1-P(\xi\le 1)=1-[P(\xi=0)+P(\xi=1)]\xlongequal{\text{查二项分布表}}$

$1-0.7361=0.2639$.

因此 X 表示一天调整设备的次数时 $X\sim B(4,\ 0.2639)$. $P(X=0)=\binom{4}{0}\times 0.2639^0\times 0.7361^4$ $=0.2936$.

$P(X=1)=\binom{4}{1}\times 0.2639^1\times 0.7361^3=0.4210$, $P(X=2)=\binom{4}{2}\times 0.2639^2\times 0.7361^2=0.2264$.

$P(X=3)=\binom{4}{3}\times 0.2639^3\times 0.7361=0.0541$, $P(X=4)=\binom{4}{4}\times 0.2639\times 0.7361^0=0.0049$.从而

$E(X)=np=4\times 0.2639=1.0556$

3.[三]　有 3 只球，4 只盒子，盒子的编号为 1，2，3，4，将球逐个独立地，随机地放入 4 只盒子中去。设 X 为在其中至少有一只球的盒子的最小号码（例如 $X=3$ 表示第 1 号，第 2 号盒子是空的，第 3 号盒子至少有一只球），求 $E(X)$。

∵　事件 $\{X=1\}$={一只球装入一号盒，两只球装入非一号盒}+{两只球装入一号盒，一只球装入非一号盒}+{三只球均装入一号盒}（右边三个事件两两互斥）

∴
$$P(X=1)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$$

∵事件“$X=2$”=“一只球装入二号盒，两只球装入三号或四号盒”+“两只球装二号盒，一只球装入三或四号盒”+“三只球装入二号盒”

∴
$$P(X=2)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{19}{64}$$

同理： $$P(X=3)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{64}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

故 $$E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$$

5.[五]　设在某一规定的时间间段里，其电气设备用于最大负荷的时间 *X*（以分计）是一个连续型随机变量。其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1500)^2}x, & 0\le x\le 1500\\ \dfrac{-1}{(1500)^2}(x-3000), & 1500< x\le 1500\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 *E* (*X*)

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$=\int_0^{1500}x\cdot\frac{x}{(1500)^2}dx+\int_{1500}^{3000}x\cdot\frac{(3000-x)}{(1500)^2}dx$$

$$=\frac{1}{(1500)^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{1500}+\frac{1}{(1500)^2}\left[1500x^2-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{1500}^{3000}$$

$$=1500(\text{分})$$

6.[六]　设随机变量 *X* 的分布为

X	−2	0	2
P_k	0.4	0.3	0.3

求　*E* (*X*)，　*E* (3X^2+5)

解：　**$E(X)=(-2)\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$**

$E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+E(5)=8.4+5=13.4$

7.[七]　设随机变量 *X* 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求（1）$Y=2X$　　（2）$Y=e^{-2x}$的数学期望。

解：（1）$E(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}2xe^{-x}dx$

$$=\left[-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_{0}^{+\infty}=2$$

（2）$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}ex$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{3}$$

8.[八]　设（X，Y）的分布律为

Y \ X	1	2	3
−1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X)$，$E(Y)$。
(2) 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$。
(3) 设 $Z=(X-Y)^2$，求 $E(Z)$。

解：（1）由 X，Y 的分布律易得边缘分布为

Y \ X	1	2	3	
−1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	1

E(X)=1×0.4+2×0.2+3×0.4
=0.4+0.4+1.2=2.
E(Y)= (−1)×0.3+0×0.4
+1×0.3=0.

（2）

$Z=Y/X$	−1	−1/2	−1/3	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(Z)=(-1)\times0.2+(-0.5)\times0.1+(-1/3)\times0+0\times0.4+1/3\times0.1+0.5\times0.1+1\times0.1$
$=(-1/4)+1/30+1/20+1/10=(-15/60)+11/60=-1/15.$

（3）

$Z\ (X-Y)^2$	0 $(1\text{-}1)^2$	1 $(1-0)^2$或$(2-1)^2$	4 $(2-0)^2$或$(1-(-1))^2$或$(3-1)^2$	9 $(3-0)^2$或$(2-(-1))^2$	16 $(3-(-1))^2$
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0

$E(Z)=0\times0.1+1\times0.2+4\times0.3+9\times0.4+16\times0=0.2+1.2+3.6=5$

10.[十]　一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ **工厂规定出售的设备若在一年内损坏，可予以调换。若工厂出售一台设备可赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元。试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望。**

解：一台设备在一年内损坏的概率为 $P(X<1)=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-\frac{1}{4}x}dx=-e^{-\frac{x}{4}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{4}}$

故 $P(X\ge 1)=1-P(X<1)=1-(1-e^{-\frac{1}{4}})=e^{-\frac{1}{4}}$. 设 Y 表示出售一台设备的净赢利

则 $$Y=f(X)=\begin{cases}(-300+100)=-200,(X<1)\\ 100,(X\ge 1).\end{cases}$$

故 $E(Y)=(-200)\cdot P(X<1)+100\cdot P(X\ge 1)=-200+200e^{-\frac{1}{4}}+100e^{-\frac{1}{4}}$

$$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$$

11.[十一] 某车间生产的圆盘直径在区间（a, b）服从均匀分布。试求圆盘面积的数学期望。

解：设 X 为圆盘的直径，则其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, x\in(a,b)\\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$

用 Y 表示圆盘的面积，则 $Y=\frac{1}{4}\pi X^2$, 从而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\pi x^2 f(x)dx=\frac{\pi}{4}\int_a^b\frac{1}{b-a}x^2dx=\frac{\pi}{4(b-a)}\cdot\frac{(b^3-a^3)}{3}=\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2).$$

12.[十三] 设随机变量 X_1，X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, x>0\\ 0\quad, x\le 0\end{cases}$$

求（1）$E(X_1+X_2)$，$E(2X_1-3X_2^2)$；（2）又设 X_1，X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$

解：（1）$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\int_0^{\infty}x\cdot 2e^{-2x}dx+\int_0^{\infty}x\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=\left[-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty}+\left[-xe^{-4x}-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

（2） $E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)=2\times\frac{1}{2}-3\int_0^{\infty}x^2\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=1-3\left[-x^2e^{-4x}-\frac{x}{2}e^{-4x}-\frac{1}{8}e^{-4x}\right]_0^{\infty}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

（3） $E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

13.[十四]　将 *n* 只球（1～*n* 号）随机地放进 *n* 只盒子（1～*n* 号）中去，一只盒子装一只球。将一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对，记 *X* 为配对的个数，求 *E*(*X*)

解：引进随机变量 $X_i=\begin{cases}1 & 第i号盒装第i号球\\ 0 & 第i号盒装非i号球\end{cases}$

i=1, 2, ⋯ n

则球盒对号的总配对数为 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

X_i 的分布列为

X_i:	1	0
P:	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$E(X_i)\frac{1}{n}$　　**i=1, 2 ⋯⋯ n**

∴　$E(X)=E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=n\times\frac{1}{n}=1$

i=1, 2 ⋯⋯ n

14.[十五]　共有 *n* 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁。设抽取钥匙是相互独立的，等可能性的。若每把钥匙经试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 *X* 的数学期望。

（1）写出 X 的分布律，（2）不写出 X 的分布律。

解：（1）

X	1	2	3	⋯⋯*n*
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$	⋯⋯ $\frac{1}{n}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}\cdots\cdots+n\times\frac{1}{n}=\frac{1+2\cdots\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

（2）设一把一把钥匙的试开，直到把钥匙用完。

设 $X_i=\begin{cases} i & \text{第}i\text{次试开能开门} \\ 0 & \text{第}i\text{次试开不能开门} \end{cases}$　　***i*=1, 2 …… *n***

则试开到能开门所须试开次数为 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$

∵

X_i	i	0
P	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{n-i}=\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$E(X_i)=i\cdot\frac{1}{n}$

i*=1, 2……*n

∴ $$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

15.（**1**）设随机变量 ***X*** 的数学期望为 ***E*** **(*X*)**，方差为 ***D*** **(*X*)>0**，引入新的随机变量（***X****称为标准化的随机变量）：$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$

验证 ***E*** **(*X**)=0**，***D*** **(*X**)=1**

（**2**）已知随机变量 ***X*** 的概率密度。

$$f(x)=\begin{cases} 1-|1-x|, & 0<x<2 \\ 0\quad\quad\quad, & \text{其它}, \end{cases}$$

求 ***X****的概率密度。

解：（**1**）$E(X^*)=E[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}[E(X)-E(X)]=0$

$$D(X^*)=E[X^*-E(X)^*]^2=E(X^{*2})=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{D(X)}E[X-E(X)]^2=\frac{1}{DX}\cdot D(X)=1$$

（**2**）$E(X)=\int_0^2 x[1-|1-x|]dx=\int_0^1 x[1-(1-x)]dx+\int_1^2 x[1+(1-x)]dx=1$

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2[1-|1-x|]dx=\int_0^1 x^2[1-(1-x)]dx$$

$$+\int_1^2 x^2[1+(1-x)]dx=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$$

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{DX}}=\frac{X-1}{\sqrt{\frac{1}{6}}}$$

$$F_{X^*}(y)=P(X^*\le y)=P(\frac{X-1}{\sqrt{\frac{1}{6}}}\le y)=P(X\le\sqrt{\frac{1}{6}}y+1)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{6}}y+1}f(x)dx$$

$$=\begin{cases}0 & 当\frac{1}{\sqrt{6}}y+1\le 0,即y\le-\sqrt{6}时\\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}y-1}[1-|1-x|]dx & 当0<\frac{1}{\sqrt{6}}y+1\le 2,即-\sqrt{6}<y\le\sqrt{6}时\\ 1 & 当2<\frac{1}{\sqrt{6}}y+1,即\sqrt{6}<y时\end{cases}$$

$$g_{X^*}(y)=\begin{cases}\{1-|1-(\frac{1}{\sqrt{6}}y+1)|\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{6}<y\le\sqrt{6}\\ 0 & y为其他值\end{cases}$$

16.[十六]　设 X 为随机变量，C 是常数，证明 $D(X)<E\{(X-C)^2\}$，对于 $C\neq E(X)$，（由于 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$，上式表明 $E\{(X-C)^2\}$当 $C=E(X)$时取到最小值。）

证明：∵　$D(X)-E(X-C)^2=D(X^2)-[E(X)]^2-[E(X^2)-2CE(X^2)+C^2$

$=-\{[E(X)]^2-2CE(X^2)+C^2\}$

$=-[E(X)-C]^2<0$，

∴当 $E(X)\neq C$ 时 $D(X)<E(X-C)^2$

17. 设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ **其中 $\theta>0$ 是常数，求 $E(X)$，$D(X)$。**

解：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}xd(-e^{-\frac{x}{\theta}})=-xe^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=0+(-\theta e^{-\frac{x}{\theta}})\Big|_0^{+\infty}=\theta$$

又 $$E(X^2)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx\overset{令t=\frac{x}{\theta}}{=\!=\!=}\theta^2\int_0^{\infty}t^2e^{-t}dt=2\theta^2$$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$

21．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量且有 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2$**, $i=1,2,\cdots, n$.**

记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$， $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ **.（1）验证** $E(\bar{X})=\mu, D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$**.（2）验证**

$S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2\right]$**.（3）验证 $E(S^2)$**

证明：（1） $E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$

(利用数学期望的性质 2°，3°)

$$D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)\overset{X_1,\cdots,X_n\text{相互独立}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

(利用方差的性质 2°，3°)

（2）首先证 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2-2\sum_{i=1}^{n} X_i\bar{X}+n\bar{X}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n} X_i^2-2n\bar{X}\cdot\bar{X}+n\bar{X}^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2.$$

于是 $S^2=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2\right\}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

（3） $E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2)$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(D(X_i)+E^2(X_i)-n(D(\bar{X})+E^2(\bar{X}))\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}[n\sigma^2+n\mu^2-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=\sigma^2$$

23．[二十五]　设随机变量 *X* 和 *Y* 的联合分布为：

Y \ X	−1	0	1
−1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	**0**	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证：***X*** **和** ***Y*** **不相关，但** ***X*** **和** ***Y*** **不是相互独立的。**

证：∵　$P[X=1\quad Y=1]=\frac{1}{8}$　$P[X=1]=\frac{3}{8}$　$P[Y=1]=\frac{3}{8}$

$P[X=1\quad Y=1]\neq P[X=1]\,P[Y=1]$

∴　***X*，*Y*** **不是独立的**

又　$E(X)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$E(Y)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$COV(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-EX\cdot EY$

$=(-1)(-1)\ \frac{1}{8}+(-1)1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0$

∴　***X*，*Y*** **是不相关的**

27. 已知三个随机变量 X, Y, Z **中，** $E(X)=E(Y)=1, E(Z)=-1, D(X)=D(Y)=D(Z)=1,$

$\rho_{XY}=0\quad \rho_{XZ}=\frac{1}{2}$，$\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$。**设** $W=X+Y+Z$ **求** $E(W)$，$D(W)$。

解：$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=1+1-1=1$

$D(W)=D(X+Y+Z)=E\{[(X+Y+Z)-E(X+Y+Z)]^2\}$

$=E\{[X-E(X)]+[Y-E(Y)]+Z-E(Z)\}^2$

$=E\{[X-E(X)]^2+[Y-E(Y)]^2+[Z-E(Z)]^2+2[X-E(X)][Y-E(Y)]$

$+2[Y-E(Y)][Z-E(Z)]+2[Z-E(Z)][X-E(X)]\}$

$=D(X)+D(Y)+D(Z)+2COV(X,Y)+2COV(Y,Z)+2COV(Z,X)$

$=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\sqrt{D(X)D(Y)}\rho_{XY}+2\sqrt{D(Y)D(Z)}\rho_{XZ}$

$+2\sqrt{D(Z)D(X)}\rho_{ZX}=1+1+1+2\times\sqrt{1\times1}\times0+2\sqrt{1\times1}(-\frac{1}{2})$

$$+2\sqrt{1\times1}(\frac{1}{2})=3$$

26.[二十八] 设随机变量（X_1，X_2）具有概率密度。

$$f(x,y)=\frac{1}{8}(x+y)，\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\qquad 0\leqslant y\leqslant 2$$

求 $E(X_1)$，$E(X_2)$，$COV(X_1, X_2)$，$\rho_{X_1X_2}$ $D(X_1+X_2)$

解：

$$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$COV(X_1X_2)=E\{(X_1-\frac{7}{6})(X_2-\frac{7}{6})\}$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2(x-\frac{7}{6})(y-\frac{7}{6})\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=-\frac{1}{36}$$

$$D(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$D(X_2)=E(X_2^2)-[E(X_2)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$$

$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2COV(X_1,X_2)$

$$=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times(-\frac{1}{36})=\frac{5}{9}$$

28.[二十九]设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 X，Y 相互独立。试求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数（其中α,β是不为零的常数）.

解：由于 X，Y 相互独立

$Cov(Z_1,Z_2)=E(Z_1,Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)=E(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)-(\alpha EX+\beta EY)(\alpha EX-\beta EY)$

$=\alpha^2EX^2-\beta EY^2-\alpha^2(EX)^2+\beta(EY)^2=\alpha^2DX-\beta^2DY=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$

$DZ_1=\alpha^2DX+\beta^2DY=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$, $DZ_2=\alpha^2DX+\beta^2DY=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$,

(利用数学期望的性质 2°3°)

故$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)}$

29．[二十三]　卡车装运水泥，设每袋水泥重量（以公斤计）服从 N（$50,2.5^2$）问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

解：已知 $X\sim N$（$50,2.5^2$）不妨设最多可装 A 袋水泥才使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.则由期望和方差的性质得 $Y=AX\sim N$（$50A,2.5^2A$）.故由题意得

$$P\{Y\geq 2000\}\leq 0.05 \Rightarrow P\{Y<2000\}\geq 0.95$$

即　$\Phi\left(\dfrac{2000-50A}{2.5\sqrt{A}}\right)\geq 0.95$查表得 $\dfrac{2000-50A}{2.5\sqrt{A}}\geq 1.65$解得 $A\geq 39$.

30.[三十二]　已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差是 700，利用契比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5200～9400 之间的概率 p.

解：由题意知$\mu=7300,\sigma=700$，则由契比雪夫不等式

$$P\{5200\leq X\leq 9400\}=P\{|X-7300|\leq 2100\}\geq 1-\frac{700^2}{2100^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\approx 0.8889$$

31.[三十三]对于两个随机变量 V,W 若 $E(V^2)E(W^2)$存在,证明$[E(VW)]^2\leq E(V^2)E(W^2)$这一不等式称为柯西施瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式.

证明：由$|VW|\leq\frac{1}{2}(V^2+W^2)$和关于矩的结论，知当 $E(V^2), E(W^2)$存在时 $E(VW)$，$E(V), E(W), D(V), D(W)$,都存在.当$E(V^2), E(W^2)$至少有一个为零时，不妨设 $E(V^2)=0$，

由 $D(V)=E(V^2)-[E(V)]^2\leq E(V^2)=0$ 知 $D(V)=0$，此时$[E(V)]^2=E(V^2)=0$ 即 $E(V)=0$。再由方差的性质知 $P(V=0)=1$.又 $(VW=0)\supset(V=0)$ 故有 $P(VW=0)=1$.于是 $E(VW)=0$，不等式成立. 当 $E(V^2)>0$，$E(W^2)>0$ 时，对 $\forall t>0$

有 $E(W-tV)^2=E(V^2)t^2-2E(VW)t+E(W^2)\geq 0.(*)$

(*)式是 t 的二次三项式且恒非负，所以有$\Delta=[-2E(VW)]^2-4E(V^2)E(W^2)\leq 0$

故 Cauchy-Schwarz 不等式成立。

[二十一](1)设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且有 $E(X_i)=i, D(X_i)=5-i, i=1,2,3,4$。设 $Y=2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4$，求 $E(Y)$，$D(Y)$。

（2）设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X\sim N(720, 30^2)$，$Y\sim N(640, 25^2)$，求 $Z_1=2X+Y$，$Z_2=X-Y$ 的分布，并求 $P\{X>Y\}, P\{X+Y>1400\}$

解：（1）利用数学期望的性质 2°，3°有

$$E(Y)=2E(X_1)-E(X_2)+3E(X_3)-\frac{1}{2}E(X_4)=7$$

利用数学方差的性质 2°，3°有

$$D(Y)=2^2D(X_1)+(-1)^2D(X_2)+3^2D(X_3)+(-\frac{1}{2})^2D(X_4)=37.25$$

（2）根据有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，知 $Z_1 \sim N$（• ，•），$Z_2 \sim N$（• ，•）

而 $E Z_1 = 2EX+Y = 2\times 720+640$, $D(Z_1) = 4D(X)+D(Y) = 4225$

$E Z_2 = EX - EY = 720 - 640 = 80$, $D(Z_2) = D(X)+D(Y) = 1525$

即 $Z_1 \sim N$（2080，4225），$Z_2 \sim N$（80，1525）

$P\{X>Y\} = P\{X-Y>0\} = P\{Z_2>0\} = 1-P\{Z_2\le 0\}$

$$=1-\Phi\left(\frac{0-80}{\sqrt{1525}}\right)=\Phi\left(\frac{80}{1525}\right)=0.9798$$

$P\{X+Y>1400\} = 1-P\{X+Y \le 1400\}$

同理 X+Y～N（1360，1525）

则 P{X+Y >1400}=1－P{X+Y ≤1400}

$$=1-\Phi\left(\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}}\right)=0.1539$$

[二十二] 5 家商店联营，它们每周售出的某种农产品的数量（以 kg 计）分别为 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5，已知 $X_1 \sim N$（200，225），$X_2 \sim N$（240，240），$X_3 \sim N$（180，225），$X_4 \sim N$（260，265），$X_5 \sim N$（320，270），X_1，X_2，X_3，X_4，X_5 相互独立。

（1）求 5 家商店两周的总销售量的均值和方差；

（2）商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存多少公斤该产品？

解：（1）令 $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$ 为总销售量。

已知 $E X_1=200$，$E X_2=240$，$E X_3=180$，$E X_4=260$，$E X_5=320$，

$D(X_1)=225$，$D(X_2)=240$，$D(X_3)=225$，$D(X_4)=265$，$D(X_5)=270$，

利用数学期望的性质 3° 有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{5} E(X_i)=1200$$

利用方差的性质 3° 有

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{5} D(X_i)=1225$$

（2）设商店仓库储存 a 公斤该产品，使得

$P\{Y \le a\} > 0.99$

由相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，并注意到（**1**），得

$Y \sim N$（**1200，1225**）

$$P\{Y \le a\} = \Phi\left(\frac{a-1200}{35}\right) > 0.99$$

查标准正态分布表知

$$\frac{a-1200}{35} > 2.33$$

$$a > 1281.55$$

∴ ***a*** 至少取 **1282.**

第五章　大数定理和中心极限定理

1．[一]　据以往经验某种电器元件的寿命服从均值为 **100** 小时的指数分布，现在随机的抽取 **16** 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 **16** 只元件寿命总和大于 **1920** 小时的概率。

解：设第 i 只寿命为 X_i，（$1 \le i \le 16$），故 $E(X_i)=100$，$D(X_i)=100^2 (l=1,2,\cdots,16)$.依本章定理 **1** 知

$$P(\sum_{i=1}^{16} X_i \le 1920) = P\left(\frac{\sum_{i=0}^{16} X_i - 1600}{\sqrt{16} \times 100} \le \frac{1920-1600}{\sqrt{16} \times 100}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=0}^{16} X_i - 1600}{400} \le 0.8\right)$$

$$= \Phi(0.8) = 0.7881.$$

从而 $P(\sum_{i=1}^{16} X_i > 1920) = 1 - P(\sum_{i=1}^{16} X_i \le 1920) = 1 - 0.7881 = 0.2119.$

3．[三]　计算机在进行加法时，对每个加数取整（取为最接近它的整数），设所有的取整误差是相互独立的，且它们都在（－**0.5，0.5**）上服从均匀分布，

（**1**）若将 **1500** 个数相加，问误差总和的绝对值超过 **15** 的概率是多少？

（**2**）几个数相加在一起使得误差总和的绝对值小于 **10** 的概率不小于 **0.90**

解：

（**1**）设取整误差为 X_i（$i = 1,2,\cdots$，**1500**），它们都在（－**0.5, 0.5**）上服从均匀分

布。

于是：　　$E(X_i)=p=\frac{-0.5+0.5}{2}=0$

$$D(X_i)=\frac{[0.5-(-0.5)]^2}{12}=\frac{1}{12}$$

$$nE(X_i)=0,\quad \sqrt{nD(X_i)}=\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}=\sqrt{125}=11.18$$

$$P\left\{\left|\sum_{i=0}^{1500}X_i\right|>15\right\}=1-P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500}X_i\right|\le 15\right\}$$

$$=1-P\left\{-15\le\sum_{i=1}^{1500}X_i\le 15\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{-15}{11.18}\le\frac{\sum_{i=1}^{1500}X_i}{11.18}\le\frac{15}{11.18}\right\}$$

$$=1-[\Phi(1.34)-\Phi(-1.34)]$$

$$=2[1-\Phi(1.34)]=2\times[1-0.9099]=0.1802$$

8．某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8，医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言。（1）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？（2）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

解：设 X 为 100 人中治愈的人数，则 $X\sim B(n,p)$ 其中 $n=100$

（1） $P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$

$$=1-\Phi(\frac{-5}{4})=\Phi(+\frac{5}{4})=0.8944$$

（2）$p=0.7$ 由中心极限定理知

$$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$$

$$=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{21}})=1-\Phi(1.09)=1-0.8621=0.1379.$$

7．[七]　一复杂的系统，由 100 个互相独立起作用的部件所组成。在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10。为了整个系统起作用至少必需有 85 个部件工作。求整个系统工作的概率。

（2）一个复杂的系统，由 n 个互相独立起作用的部件所组成，每个部件的可靠性（即部件工作的概率）为 0.90。且必须至少有 80%部件工作才能使整个系统工作，问 n 至少为多少才能使系统的可靠性不低于 0.95。

解：（1）设每个部件为 X_i (i=1,2,……100)

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{部件工作}\\ 0 & \text{部件损坏不工作}\end{cases}$$

设 X 是 100 个相互独立，服从（0－1）分布的随机变量 X_i 之和

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{100}$$

由题设知　　$n=100$　$P\{X_i=1\}=p=0.9,\ P\{X_i=0\}=0.1$

$$E(X_i)=p=0.9$$

$$D(X_i)=p(1-p)=0.9\times 0.1=0.09$$

$$n\cdot E(X_i)=100\times 0.9=90,\ nD(X_i)=100\times 0.09=9$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\ge 85\right\}=P\left\{\frac{X-nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}\ge\frac{85-nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}}\ge\frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\}=P\left\{\frac{X-90}{3}\ge\frac{-5}{3}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-90}{3}<-\frac{5}{3}\right\}$$　　**由中心极限定理知**

$$\approx 1-\int_{-\infty}^{-\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=1-\Phi(-\frac{5}{3})$$ **查标准正态分布表**

$$=\varphi(1.67)$$

$$=0.9525$$

解：（2）设每个部件为 X_i (i=1,2,……n)

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{部件工作}\\ 0 & \text{部件损坏不工作}\end{cases}$$

$$P\{X_i=1\}=p=0.9,\ P\{X_i=0\}=1-p=0.1$$

$E(X_i)=p=0.9$, $D(X_i)=0.9\times 0.1=0.09$

由问题知 $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{80}{100}n\right\}=0.95$ 求 n=?

而 $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{80}{100}n\right\}$

$$=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{nD(X_i)}} > \frac{\frac{80}{100}n-np}{\sqrt{nD(X_i)}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} > \frac{\frac{80}{100}n-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \le \frac{\frac{80}{100}n-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}$$ 由中心极限定理知

$$=1-\Phi\left(\frac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)\ge 0.95$$

查标准正态分布表得 $\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}}\ge 1.645$

解得 $n\ge 24.35$

取 $n=25$，即 n 至少为 **25** 才能使系统可靠性为 **0.95.**

[八] 随机地取两组学生，每组 **80** 人，分别在两个实验室里测量某种化合物的 **PH** 值，各人测量的结果是随机变量，它们相互独立，且服从同一分布，其数学期望为 **5**，方差为 **0.3**，以 $\overline{X},\overline{Y}$ 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均：

（1）求 $P\{4.9<\overline{X}<5.1\}$ （2）$P\{-0.1<\overline{X}-\overline{Y}<0.1\}$

解：由中心极限定理知

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - 80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}} \sim N(0,1) \qquad V=\frac{\sum_{j=1}^{80} Y_j - 80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}} \sim N(0,1)$$

（1） $P\{4.9<\overline{X}<5.1\}=P\left\{\frac{4.9\times 80-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{5.1\times 80-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}\right\}$

$$P\left\{-1.63<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-80\times 5}{\sqrt{24}}<1.63\right\}=2\Phi(1.63)-1=2\times 0.9484-1=0.8968$$

（2）由 X_i, Y_j 的相互独立性知 $\sum_{i=1}^{80}X_i$ 与 $\sum_{j=1}^{80}Y_j$ 独立。从而 U，V 独立。

于是 $U-V\sim N(0, 2)$

而 $Z\cong U-V=\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-\sum_{j=1}^{80}Y_j}{\sqrt{24}}$

$$P\{-0.1<\overline{X}-\overline{Y}<0.1\}=P\left\{\frac{-0.1\times 80}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-\sum_{j=1}^{80}Y_j}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{0.1\times 80}{\sqrt{80\times 0.3}}\right\}$$

$$=P\{-1.63<Z<1.63\}=\Phi\left(\frac{1.63}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{1.63}{\sqrt{2}}\right)=2\Phi(1.15)-1$$

$=2\times 0.8749-1=0.7498$

[九] 某种电子器件的寿命（小时）具有数学期望 μ （未知），方差 $\sigma^2=400$ 为了估计 μ，随机地取几只这种器件，在时刻 $t=0$ 投入测试（设测试是相互独立的）直到失败，测得其寿命 X_1，…，X_n，以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 作为 μ 的估计，为使 $P\{|\overline{X}-\mu|\}\geq 0.95$, 问 n 至少为多少？

解：由中心极限定理知，当 n 很大时

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}=\frac{n\overline{X}-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\sim N(0,1)$$

$$P\{|\overline{X}-\mu|<1\}=P\left\{\frac{-n}{\sqrt{n\sigma^2}}<\frac{n\overline{X}-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}<\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)-\Phi\left(-\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)-1\geq 0.95$$

所以 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)\geq 0.975$

查标准正态分布表知

$$\frac{\sqrt{n}}{20}\geq 1.96$$
$$n\geq 1536.64$$

即 ***n*** **至少取 1537。**

第六章　样本及抽样分布

1.[一]　在总体 *N*（52，6.3^2）中随机抽一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率。

解:

$$\overline{X}\sim N(52,\frac{6.3^2}{36}),P\{50.8<\overline{X}<53.8\}=P\{-\frac{1.2}{\frac{6.3}{6}}<\frac{\overline{X}-52}{\frac{6.3}{6}}<\frac{1.8}{\frac{6.3}{6}}\}$$

$$=\Phi(\frac{12}{7})-\Phi(\frac{-8}{7})=0.8293$$

2.[二]　在总体 *N*（12，4）中随机抽一容量为 5 的样本 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5.

（1）求样本均值与总体平均值之差的绝对值大于 1 的概率。

（2）求概率 $P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)>15\}$.

（3）求概率 $P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)>10\}$.

解：（1）$P\{|\overline{X}-12|>1\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right|>\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right\}=2P\left\{\left|\frac{\overline{X}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$=2[1-\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})]=0.2628$$

（2）$P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)>15\}=1-P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)\le 15\}$

$$=1-\prod_{i=1}^{5}P\{X_i\le 15\}=1-[\Phi(\frac{15-12}{2})]^5=0.2923.$$

（3）$P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)<10\}=1-P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)\ge 10\}$

$$=1-\prod_{i=1}^{5}P\{X_i\ge 10\}=1-[1-\Phi(\frac{10-12}{2})]^5=1-[\Phi(1)]^5=0.5785.$$

4.[四] 设 X_1，$X_2\cdots$，X_{10} 为 N（0，0.3^2）的一个样本，求 $P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$.

解：$\sum_{i=1}^{10}X_i^2\Big/0.3^2\sim\chi^2(10), P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}=P\{\sum_{i=1}^{10}\frac{X_i^2}{0.3^2}>16\}=0.1(查表5)$

7． 设 X_1，X_2，⋯，X_n 是来自泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

解：由 $X\sim\pi(\lambda)$ 知 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$

$\therefore E(\overline{X})=E(X)=\lambda, D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\lambda}{n}, E(S^2)=D(X)=\lambda.$

[六] 设总体 $X\sim b(1,p)$，X_1，X_2，⋯，X_n 是来自 X 的样本。

（1）求 $(X_1, X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律；

（2）求 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律；

（3）求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

解：（1）（X_1，⋯，X_n）的分布律为

$$P\{X_1=i_1, X_2=i_2,\cdots,X_n=in\}\overset{独立}{=\!=}\prod_{k=1}^{n}P\{X_k=i_k\}=\prod_{k=1}^{n}P^{i_k}(1-P)^{1-i_k}$$

$$=P^{\sum_{k=1}^{n}i_k}(1-P)^{n-\sum_{i=1}^{n}i_k}, i_k=0或1, k=1,\cdots,n.$$

（2）$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, p)$

(由第三章习题 26[二十七]知)

（3）$E(\overline{X})=E(X)=P$，

$$D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{P}{n}$$

$$E(S^2)=D(X)=P(1-P)$$

[八]设总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，X_1，…，X_{10} 是来自 X 的样本。

（1）写出 X_1，…，X_{10} 的联合概率密度（2）写出 $\overline{X}$ 的概率密度。

解：（1）$(X_1, \cdots, X_{10})$的联合概率密度为

$$f(x_1, \cdots x_{10})=\prod_{i=1}^{10} f(x_i)=\prod_{i=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i=\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

（2）由第六章定理一知

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), n=10$$

即 $\overline{X}$ 的概率密度为

$$f_{\overline{X}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}e^{-\frac{n(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

第七章　参数估计

1．[一]　随机地取 8 只活塞环，测得它们的直径为（以 mm 计）

74.001　74.005　74.003　74.001　74.000　73.998　74.006　74.002

求总体均值μ 及方差σ² 的矩估计，并求样本方差 S^2。

解：μ，σ^{2}的矩估计是　$\hat{\mu} = \overline{X} = 74.002$　$,\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2 = 6\times 10^{-6}$

$S^2 = 6.86\times 10^{-6}$。

2．[二]设 X_1，X_1，…，X_n 为准总体的一个样本。求下列各总体的密度函数或分布律中的未知参数的矩估计量。

（1） $f(x) = \begin{cases} \theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)}, x > c \\ 0, 其它 \end{cases}$　　**其中 c>0 为已知，θ>1，θ 为未知参数。**

（2） $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, 0 \le x \le 1 \\ 0, 其它. \end{cases}$　　**其中 θ>0，θ 为未知参数。**

（5） $P(X = x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, x = 0,1,2,\cdots,m, 0 < p < 1, p$ **为未知参数。**

解：（1） $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{c}^{+\infty} \theta c^{\theta} x^{-\theta} dx = \frac{\theta c^{\theta}}{\theta - 1} c^{-\theta+1} = \frac{\theta c}{\theta - 1}$，令 $\frac{\theta c}{\theta - 1} = \overline{X}$，得 $\theta = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - c}$

（2） $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，令 $\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \overline{X}$，得 $\theta = \left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$

（5）$E(X) = mp$　　**令 $mp = \overline{X}$，**　　**解得** $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$

3．[三]求上题中各未知参数的极大似然估计值和估计量。

解：（1）似然函数　$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \theta^n c^{n\theta} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-\theta+1}$

$$\ln L(\theta) = n\ln(\theta) + n\theta \ln c + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i, \quad \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{\theta}{n} + n\ln c - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\ln c}$　　**（解唯一故为极大似然估计量）**

（2） $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \theta^{-\frac{n}{2}} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, \ln L(\theta) = \frac{-n}{2}\ln(\theta) + (\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{-n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,\quad \hat{\theta}=(n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2$$ **。(解唯一)故为极大似然估计量。**

（5）$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\binom{m}{x_1}\cdots\binom{m}{x_n}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}$ ，

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{m}{x_i}+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(mn-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p),$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

解得　$p=\frac{\sum_{i=2}^{n}x_i}{mn}=\frac{\overline{X}}{m}$，（解唯一）故为极大似然估计量。

4．[四(2)] 设 X_1，X_1，⋯，X_n 是来自参数为λ 的泊松分布总体的一个样本，试求λ 的极大似然估计量及矩估计量。

解：（1）矩估计　$X\sim\pi(\lambda)$，$E(X)=\lambda$，故 $\hat{\lambda}=\overline{X}$ 为矩估计量。

（2）极大似然估计 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i;\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$ ，

$$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!-n\lambda$$

$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n=0$，解得 $\hat{\lambda}=\overline{X}$ 为极大似然估计量。

（其中 $p(x_i;\lambda)=P\{X=x_i\}=\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda},\ x_i=0,1,\cdots$）

5．[六]　一地质学家研究密歇根湖湖地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子，记录了每个样品中属石灰石的石子数。假设这 100 次观察相互独立，并由过去经验知，它们都服从参数为 n=10，P 的二项分布。P 是该地区一块石子是石灰石的概率。求 p 的极大似然估计值，该地质学家所得的数据如下

样品中属石灰石的石子数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观察到石灰石的样品个数	0	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

解：**λ** 的极大似然估计值为$\hat{\lambda}=\overline{X}$ **=0.499**

[四(1)] 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$为未知参数。已知取得了样本值 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=1$，试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

解：（1）求 θ 的矩估计值

$$E(X)=1\times\theta^2+2\cdot 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2$$
$$=[\theta+3(1-\theta)][\theta+(1-\theta)]=3-2\theta$$

令$E(X)=3-2\theta=\overline{X}$

则得到 θ 的矩估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{2}=\dfrac{3-\dfrac{1+2+1}{3}}{2}=\dfrac{5}{6}$

（2）求 θ 的最大似然估计值

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P\{X_i=x_i\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\}$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2$$
$$=2\theta^5(1-\theta)$$

$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$

求导 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$

得到唯一解为$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$

8．[九(1)] 设总体 $X\sim N$（μ，σ^2），X_1，X_1，…，X_n是来自 X 的一个样本。试确定常数 c 使$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。

解：由于

$$E[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=c[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2]=c\sum_{i=1}^{n-1}D(X_{i+1}-X_i)^2+(E(X_{i+1}-X_i))^2]$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}[D(X_{i+1})+D(X_i)+(EX_{i+1}-EX_1)^2]=c\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+0^2)=c(2n-1)\sigma^2$$

当$c=\dfrac{1}{2(n-1)}$时，$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。

[十] 设 X_1，X_2，X_3，X_4是来自均值为θ 的指数分布总体的样本，其中θ 未知，设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)$$

$$T_2=(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)/5$$

$$T_3=(X_1+X_2+X_3+X_4)/4$$

（1）指出 T_1，T_2，T_3哪几个是 θ 的无偏估计量；

（2）在上述 θ 的无偏估计中指出哪一个较为有效。

解：（1）由于 X_i服从均值为 θ 的指数分布，所以

$E(X_i)=\theta$,　　$D(X_i)=\theta^2$,　$i=1,2,3,4$

由数学期望的性质 2°，3°有

$$E(T_1)=\frac{1}{6}[E(X_1)+E(X_2)]+\frac{1}{3}[E(X_3)+E(X_4)]=\theta$$

$$E(T_2)=\frac{1}{5}[E(X_1)+2E(X_2)+3E(X_3)+4E(X_4)]=2\theta$$

$$E(T_3)=\frac{1}{4}[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)]=\theta$$

即 T_1，T_2是 θ 的无偏估计量

（2）由方差的性质 2°，3°并注意到 X_1，X_2，X_3，X_4独立，知

$$D(T_1)=\frac{1}{36}[D(X_1)+D(X_2)]+\frac{1}{9}[D(X_3)+D(X_4)]=\frac{5}{18}\theta^2$$

$$D(T_2)=\frac{1}{16}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4)]=\frac{1}{4}\theta^2$$

$D(T_1)> D(T_2)$

所以 T_2较为有效。

14.[十四] 设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（以小时计）分别为 6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0。设干燥时间总体服从正态分布 $N\sim(\mu,\sigma^2)$，求 μ 的置信

度为 **0.95** 的置信区间。（**1**）若由以往经验知 σ**=0.6**（小时）（**2**）若 σ 为未知。

解：（**1**）μ 的置信度为 **0.95** 的置信区间为（$\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$），

计算得 $\overline{X}=6.0,$ 查表$z_{0.025}=1.96,\sigma=0.6,$ 即为$(6.0\pm\frac{0.6}{\sqrt{9}}\times 1.96)=(5.608,6.392)$

（**2**）μ 的置信度为 **0.95** 的置信区间为（$\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$），计算得 $\overline{X}=6.0$，查表 $t_{0.025}(8)$**=2.3060.**

$$S^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{8}\times 2.64=0.33.\text{故为}(6.0\pm\frac{\sqrt{0.33}}{3}\times 2.3060)=(5.558,6.442)$$

16.[十六] 随机地取某种炮弹 **9** 发做试验，得炮弹口速度的样本标准差为 **s=11(m/s)**。设炮口速度服从正态分布。求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信度为 **0.95** 的置信区间。

解：σ 的置信度为 **0.95** 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)=\left(\frac{\sqrt{8}\times 11}{\sqrt{17.535}},\frac{\sqrt{8}\times 11}{\sqrt{2.18}}\right)=(7.4,\ 21.1)$$

其中 α**=0.05,** n**=9**

查表知 $\chi^2_{0.025}(8)=17.535,\ \chi^2_{0.975}(8)=2.180$

19.[十九] 研究两种固体燃料火箭推进器的燃烧率。设两者都服从正态分布，并且已知燃烧率的标准差均近似地为 **0.05cm/s**，取样本容量为 $n_1=n_2=20$**.** 得燃烧率的样本均值分别为 $\overline{x_1}=18cm/s,\overline{x_2}=24cm/s.$ 设两样本独立，求两燃烧率总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 **0.99** 的置信区间。

解：$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 **0.99** 的置信区间为

$$\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)=\left(18-24+2.58\sqrt{\frac{0.05^2}{20}\times 2}\right)=(-6.04,\ -5.96).$$

其中 α**=0.01**，$z_{0.005}$**=2.58,** $n_1=n_2=20$**,** $\sigma_1^2=\sigma_2^2=0.05^2,\overline{X_1}=18,\overline{X_2}=24$

20.[二十] 设两位化验员 A，B 独立地对某中聚合物含氯两用同样的方法各做 **10** 次测定，其测定值的样本方差依次为 $S_A^2=0.5419,S_B^2=0.6065.$ 设σ_A^2,σ_B^2分别为 **A**，**B** 所测定的测定值总体的方差，设总体均为正态的。设两样本独立，求方差比σ_A^2/σ_B^2 的置信度

为 **0.95** 的置信区间。

解：σ_A^2 / σ_B^2 的置信度为 **0.95** 的置信区间

$$\left(\frac{S_A^2}{S_B^2 F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_A^2}{S_B^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

$$=\left(\frac{0.5419}{0.6065\times 4.03},\frac{0.5419\times 4.03}{0.6065}\right)=\mathbf{(0.222,\ 3.601).}$$

其中 $\boldsymbol{n_1=n_2=10}$，$\boldsymbol{\alpha=0.05}$，$\boldsymbol{F_{0.025}(9,9)=4.03}$，$F_{0.975}(9,9)=\dfrac{1}{F_{0.025}(9,9)}=\dfrac{1}{4.03}$。

第八章　假设检验

1.[一]某批矿砂的 5 个样品中的镍含量，经测定为（%）3.25　3.27　3.24　3.26　3.24。设测定值总体服从正态分布，问在 $\alpha=0.01$ 下能否接受假设：这批矿砂的含镍量的均值为 3.25.

解：设测定值总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均未知

步骤：（1）提出假设检验 H_0：$\mu=3.25$；　H_1：$\mu\neq 3.25$

（2）选取检验统计量为 $t=\dfrac{\bar{X}-3.25}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

（3）H_0 的拒绝域为 $|t|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$.

（4）$n=5$，　$\alpha=0.01$，由计算知 $\bar{x}=3.252, S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\bar{X})^2}=0.01304$

查表 $\boldsymbol{t_{0.005}(4)=4.6041}$，　$|t|=\left|\dfrac{3.252-3.25}{0.01304/\sqrt{5}}\right|=0.343<t_{\alpha/2}(n-1)$

（5）故在 $\alpha=0.01$ 下，接受假设 H_0

2．[二]　如果一个矩形的宽度 ω 与长度 l 的比 $\omega/l=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx 0.618$，这样的矩形称为黄金矩形。这种尺寸的矩形使人们看上去有良好的感觉。现代建筑构件（如窗架）、

工艺品（如图片镜框）、甚至司机的执照、商业的信用卡等常常都是采用黄金矩型。下面列出某工艺品工厂随机取的 **20** 个矩形的宽度与长度的比值。设这一工厂生产的矩形的宽度与长短的比值总体服从正态分布，其均值为 μ，试检验假设（取 $\alpha = 0.05$）

H$_0$：$\mu = 0.618$　　　　H$_1$：$\mu \neq 0.618$

0.693　0.749　0.654　0.670　0.662　0.672　0.615　0.606　0.690　0.628　0.668

0.611　0.606　0.609　0.601　0.553　0.570　0.844　0.576　0.933.

解：步骤：（1）H$_0$：$\mu = 0.618$；　　H$_1$：$\mu \neq 0.618$

（2）选取检验统计量为 $t = \dfrac{\overline{X} - 0.618}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

（3）H$_0$ 的拒绝域为 $|\,t\,| \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$.

（4）n=20　$\alpha = 0.05$，计算知

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.6605, S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.0925，$$

$$t_{\alpha/2}(n-1) = 2.0930, |\,t\,| = \left|\frac{0.6605 - 0.618}{0.0925/\sqrt{20}}\right| = 2.055 < t_{\alpha/2}(n-1)$$

（5）故在 $\alpha = 0.05$ 下，接受 H$_0$，认为这批矩形的宽度和长度的比值为 **0.618**

3.[三]　要求一种元件使用寿命不得低于 **1000** 小时，今从一批这种元件中随机抽取 **25** 件，测得其寿命的平均值为 **950** 小时，已知这种元件寿命服从标准差为 σ =**100** 小时的正态分布。试在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下确定这批元件是否合格？设总体均值为 μ。即需检验假设 H$_0$：$\mu \geq 1000$，H$_1$：$\mu < 1000$。

解：步骤：（1）H_0 :$\mu \geq 1000$；H$_1$：$\mu < 1000$；（σ =100 已知）

（2）H$_0$ 的拒绝域为 $\dfrac{\bar{x} - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$

（3）n=25，$\alpha = 0.05$，$\bar{x} = 950$，

计算知 $\dfrac{\bar{x} - 1000}{100/\sqrt{25}} = -2.5 < -z_{0.05} = 1.645$

（4）故在 $\alpha = 0.05$ 下，拒绝 H$_0$，即认为这批元件不合格。

12.[十一]　一个小学校长在报纸上看到这样的报导："这一城市的初中学生平均每周看 **8** 小时电视"。她认为她所领导的学校，学生看电视的时间明显小于该数字。为此她向

100 个学生作了调查，得知平均每周看电视的时间 $\bar{x}=6.5$ 小时，样本标准差为 ***s*=2** 小时。问是否可以认为这位校长的看法是对的？取 α **= 0.05**。（注：这是大样本检验问题。由中心极限定理和斯鲁茨基定理知道不管总体服从什么分布，只要方差存在，当 ***n*** 充分大时 $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ 近似地服从正态分布。）

解：（**1**）提出假设 H_0：$\mu\le 8$；H_1：$\mu>8$

（**2**）当 ***n*** 充分大时，$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ 近似地服从 ***N***（**0**，**1**）分布

（**3**）H_0 的拒绝域近似为 $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\ge z_\alpha$

（**4**）n**=100**，α **= 0.05**，$\bar{x}=6.5$，***S*=2**，由计算知

$$|t|=\left|\frac{6.5-8}{2/\sqrt{100}}\right|=7.5>z_{0.05}=1.645$$

（**5**）故在 α **= 0.05** 下，拒绝 H_0，即认为校长的看法是不对的。

14.[十三**]**　某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 **0.005(**欧姆**)**。今在生产的一批导线中取样品 **9** 根，测得 ***s*=0.007(**欧姆**)**，设总体为正态分布。问在水平 α **= 0.05** 能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

解：（**1**）提出 H_0：$\sigma\le 0.005$；H_1：$\sigma>0.005$

（**2**）H_0 的拒绝域为 $(n-1)S^2/0.005^2\ge\chi_\alpha^2(n-1)$

（**3**）n**=9**，α **= 0.05**，***S*=0.007**，由计算知

$$(n-1)S^2/0.005^2=\frac{8\times 0.007^2}{0.005^2}=15.68>\chi_\alpha^2(n-1)$$

查表 $\chi_{0.05}^2(8)=15.507$

（**4**）故在 α **= 0.05** 下，拒绝 H_0，认为这批导线的标准差显著地偏大。

15.[十四**]**　在题 **2** 中记总体的标准差为 σ。试检验假设（取 α **= 0.05**）

H_0：$\sigma^2=0.11^2$，　H_1：$\sigma^2\ne 0.11^2$。

解：步骤（**1**）H_0：$\sigma^2=0.11^2$；　H_1：$\sigma^2\ne 0.11^2$

（**2**）选取检验统计量为 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{0.11^2}\sim\chi^2(n-1)$

（3）H_0 的拒绝域为$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

（4）n=20，$\alpha = 0.05$，由计算知 S^2=0.0925^2，$\dfrac{(n-1)S^2}{0.11^2} = 13.437$

查表知 $\chi^2_{0.025}(19) = 32.852,\ \chi^2_{0.975}(19) = 8.907$

（5）故在 $\alpha = 0.05$，接受 H_0，认为总体的标准差 σ 为 0.11.

16.[十五] 测定某种溶液中的水份，它的 10 个测定值给出 s=0.037%，设测定值总体为正态分布，σ^2 为总体方差。试在水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设 H_0：$\sigma \geq 0.04\%$；H_1：$\sigma < 0.04\%$。

解：（1）H_0：$\sigma^2 \geq (0.04\%)^2$；H_1：$\sigma^2 < (0.04\%)^2$

（2）H_0 的拒绝域为 $\left.(n-1)S^2\middle/(0.04\%)^2\right. \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

（3）n=10，$\alpha = 0.05$，S=0.037%，查表知$\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$

由计算知 $\dfrac{(n-1)S^2}{(0.04\%)^2} = \dfrac{9 \times 0.037)^2}{(0.04\%)^2} = 7.701 > \chi^2_{0.95}(9).$

（4）故在 $\alpha = 0.05$ 下，接受 H_0，认为 σ 大于 0.04%

17.[十六] 在第 6[五]题中分别记两个总体的方差为σ_1^2和σ_2^2。试检验假设（取 $\alpha = 0.05$）H_0：σ_1^2和σ_2^2 以说在第 6[五]题中我们假设$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的。

解：（1）H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

（2）选取检验统计量为 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

（3）H_0 的拒绝域为 $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$或$F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$

（4）n_1=8，n_2=10，$\alpha = 0.05$，查表知 $F_{0.025}(7,9)$= 4.20

$$F_{0.975}(7,9) = \frac{1}{F_{0.025}(9,7)} = \frac{1}{4.82} = 0.207, F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.00025}{0.00084} = 0.298$$

$F_{0.975}(7,9) < F < F_{0.025}(7,9)$

（5）故在 $\alpha = 0.05$ 下，接受 H_0，认为$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

18.[十七] 在第 8 题[七]中分别记两个总体的方差为σ_1^2和σ_2^2。试检验假设（取 $\alpha = 0.05$）H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 以说明在第 8[七]题中我们假设$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的。

解：（1）H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

（2）选取检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

（3）n_1=n_2=12，α = 0.05，查表知

$F_{0.025}(11,11)$= 3.34，$F_{0.975}(11,11)=\dfrac{1}{F_{0.025}(11,11)}=\dfrac{1}{3.34}=0.299$

由计算知 $S_1^2=0.932, S_2^2=1,\ 0.299<S_1^2\big/S_2^2=0.932<3.34$

（4）故在 α = 0.05 下，接受 H_0，认为$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

24.[二十三]　检查了一本书的 100 页，记录各页中印刷错误的个数，其结果为

错误个数 f_i	0	1	2	3	4	5	6	≥7
含 f_i 个错误的页数	36	40	19	2	0	2	1	0

问能否认为一页的印刷错误个数服从泊松分布（取 α = 0.05）。

解：（1）H_0：总体 $X\sim\pi(\lambda)$；H_1：X 不服从泊松布；（λ 未知）

（2）当 H_0 成立时，λ 的最大似然估计为$\hat{\lambda}=\bar{x}=1.$

（3）H_0 的拒绝域为$\chi^2=\sum\dfrac{\hat{f}_i^2}{n\hat{p}_i}-n>\chi_\alpha^2(k-\gamma-1)$

（4）n=100

$$\hat{P}_0=P\{X=0\}=\frac{e^{-1}}{0!}=0.3679$$

$$\hat{P}_1=P\{X=1\}=\frac{1^1e^{-1}}{1!}=0.3679$$

$$\hat{P}_2=P\{X=2\}=\frac{1^2e^{-1}}{2!}=0.18397$$

$$\hat{P}_3=P\{X=3\}=\frac{1^3e^{-1}}{3!}=0.06132$$

$$\hat{P}_4=P\{X=4\}=\frac{1^4e^{-1}}{4!}=0.01533$$

$$\hat{P}_5=P\{X=5\}=\frac{1^5e^{-1}}{5!}=0.003066$$

$$\hat{P}_6=P\{X=6\}=\frac{1^6e^{-1}}{6!}=0.000511$$

$$\hat{P}_7=P\{X=7\}=1-\sum_{i=0}^{6}\hat{P}_i=0.000083$$

对于 ***j*>3**，$n\hat{P}_j < 5$

将其合并得

$$\sum_{j=3}^{7} n\hat{P}_j = 8.023$$

合并后，***K*=4**，***Y*=1**

查表知$\chi^2_{0.05}(4-1-1) = 5.991$

由计算知$\chi^2 = \frac{36^2}{36.79} + \frac{40^2}{36.79} + \frac{19^2}{18.397} + \frac{5^2}{8.023} - 100 = 1.444$

（5）故在 $\alpha = 0.05$ 下，接受 H_0，认为一页的印刷错误个数服从泊松分布。