

第二章

自动调节系统的数学模型

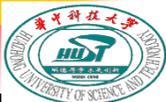


- 2.1 引言
- 2.2 系统的微分方程
- 2.3 相似原理
- 2.4 传递函数的概念
- 2.5 典型环节的传递函数
- 2.6 系统传递函数方框图的建立
- 2.7 传递函数方框图的等效简化
- 2.8 闭环控制系统的传递函数



三、微分方程的增量化表示

- 研究控制系统的动态特性一般是讨论系统从某一平衡状态出发的变化过程，即在这一平衡状态附近的增量。则系统微分方程中的各变量皆以增量化形式（带符号 Δ ）表示。
- 为便利起见，研究过程中通常将各变量的原平衡点设置为坐标零点，则初始条件皆变为零。此时系统的微分方程无须用增量化形式表示（不带符号 Δ ）。——但方程中的变量具有增量的含义。



例：直流电动机

1. 明确系统的输入与输出：

输入量 u_a 和 M_L , 输出量 ω

2. 列写原始微分方程

$$L \frac{di_a}{dt} + i_a R + e_d = u_a$$

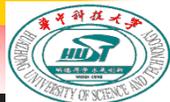
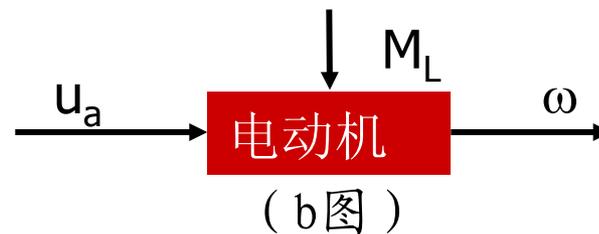
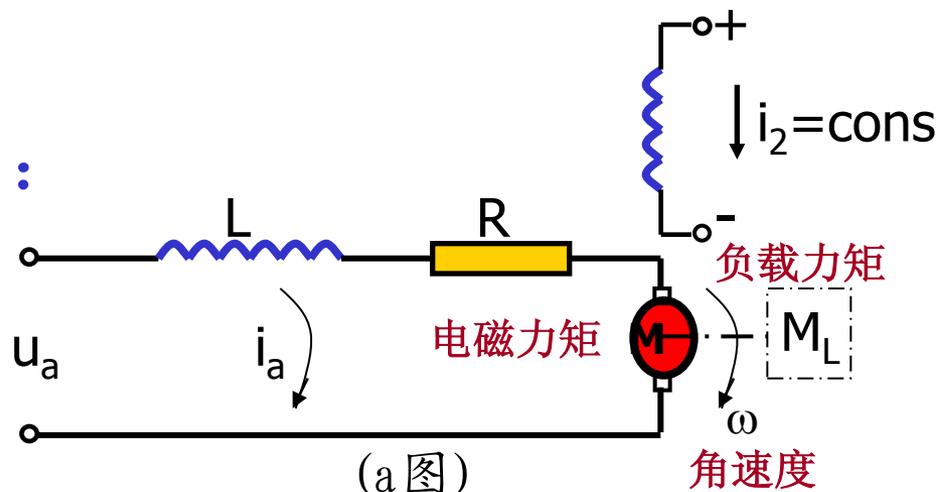
$$e_d = k_d \omega$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_L$$

$$M = k_m i_a$$

3. 消除中间变量，并整理： 令 $T_a = \frac{L}{R}, T_m = \frac{RJ}{k_d k_m}, C_d = \frac{1}{k_d}, C_m = \frac{T_m}{J}$

$$T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = C_d u_a - C_m T_a \frac{dM_L}{dt} - C_m M_L$$



$$T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = C_d u_a - C_m T_a \frac{dM_L}{dt} - C_m M_L$$

设若电动机处于平衡状态，有： $\omega = C_d u_a - C_m M_L$ (静态模型)

设平衡点为 $(u_{a0}, M_{L0}, \omega_0)$ ，则： $\omega_0 = C_d u_{a0} - C_m M_{L0}$

当偏离平衡点时有：

$$\begin{aligned} & T_a T_m (\omega_0 + \Delta\omega)'' + T_m (\omega_0 + \Delta\omega)' + (\omega_0 + \Delta\omega) \\ & = C_d (u_{a0} + \Delta u_a) - C_m T_a (M_{L0} + \Delta M_L)' - C_m (M_{L0} + \Delta M_L) \end{aligned}$$

则

$$u_a = u_{a0} + \Delta u_a \quad M_L = M_{L0} + \Delta M_L \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

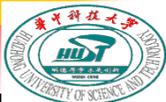
$$\text{即 } T_a T_m (\Delta\omega)'' + T_m (\Delta\omega)' + \Delta\omega = C_d \Delta u_a - C_m T_a (\Delta M_L)' - C_m \Delta M_L$$

1. 增量方程与实际坐标方程形式相同； (增量方程)
2. 当平衡点为坐标原点时，二者等价；否则，二者不能等价。



在建立控制系统的数学模型时,通常是将系统的稳定工作状态作为起始平衡状态,即:

只研究相对于平衡状态下,系统输入量和输出量的运动特性,这正是增量线性化方程所描述的系统特性.



四、非线性微分方程的线性化

非线性微分方程在一定条件下,可进行线性化处理。

严格地讲,任何实际系统和元件都存在不同程度的非线性。为什么要进行线性化处理?

- 1、非线性理论和分析方法还不很成熟,依此研究系统存在着诸多困难;
- 2、许多情况下,用线性理论研究可满足要求;
- 3、线性化处理后可方便的应用经典控制理论研究系统。



非线性方程线性化的条件：

1. 非线性函数是连续函数(即非线性不是本质非线性)
2. 系统在预定工作点附近作小偏差运动, 即变量的变化范围很小.

非线性方程线性化的方法：

1. 确定预定工作点.
2. 在工作点附近将非线性方程展开成Taylor级数形式.
3. 忽略高于一阶项.
4. 表示成增量方程的形式.



此处，介绍另一种线性化方法，——小偏差法或切线法，这种线性化方法特别适合于具有连续变化的非线性特性函数，其实质是在一个很小的范围内，将非线性特性用一段直线来代替。

设连续变化的非线性函数为 $y=f(x)$ ，如图所示。

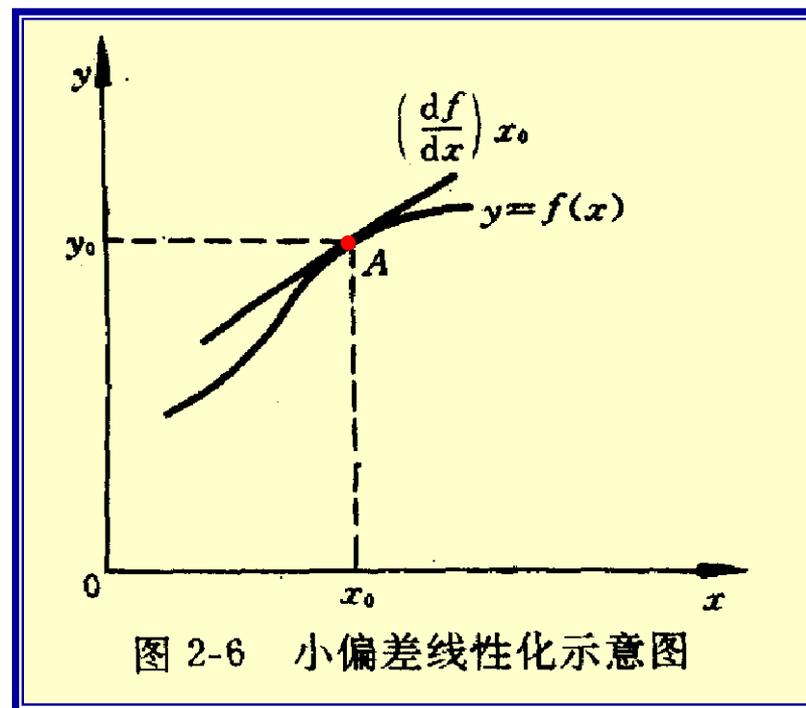
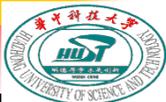


图 2-6 小偏差线性化示意图



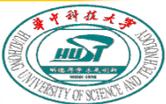
取某平衡状态A为工作点, 对应有 $y_0=f(x_0)$. 当
 $x = x_0 + \Delta x$ 时, 有 $y = y_0 + \Delta y$.

设函数 $y = f(x)$ 在 (x_0, y_0) 点连续可微,
则将它在该点附近用台劳级数展开为:

$$y = f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

当增量 $(x-x_0)$ 很小时, 略去其高次幂项, 则有:

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0)$$



$$\text{对于: } y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0)$$

$$\text{若令: } \begin{cases} \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0); \\ \Delta x = x - x_0; \\ K = \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x_0} \end{cases}$$

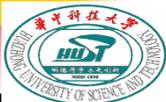


$$\Delta y = K \cdot \Delta x$$

略去符号 Δ , 得函数 $y=f(x)$ 在工作点A附近的线性化方程为:

$$y = K \cdot x$$

式中: K ——为比例系数, 它表示函数 $f(x)$ 在A点的切线斜率.



对于有两个自变量 x_1, x_2 的非线性函数 $f(x_1, x_2)$,

——同样可在某工作点 (x_{10}, x_{20}) 附近用台劳级数展开为:

$$y = f(x_1, x_2) = f(x_{10}, x_{20}) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{x_{10}, x_{20}} (x_1 - x_{10}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{x_{10}, x_{20}} (x_2 - x_{20}) \right]$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right)_{x_{10}, x_{20}} (x_1 - x_{10})^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{x_{10}, x_{20}} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right)_{x_{10}, x_{20}} (x_2 - x_{20})^2 \right]$$

+...

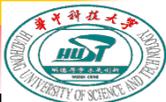
略去二阶以上导数项，并令：

$$\begin{cases} \Delta y = y - f(x_{10}, x_{20}) & K_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right]_{x_{10}, x_{20}} \\ \Delta x_1 = x_1 - x_{10} \\ \Delta x_2 = x_2 - x_{20} & K_2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right]_{x_{10}, x_{20}} \end{cases}$$

可得线性化方程

$$\Delta y = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2$$

(或 $y = K_1 x_1 + K_2 x_2$)



例：液压伺服机构

1. 明确系统的输入与输出：

输入为 x ，输出为 y

2. 列写原始微分方程：

设 $p = p_1 - p_2$

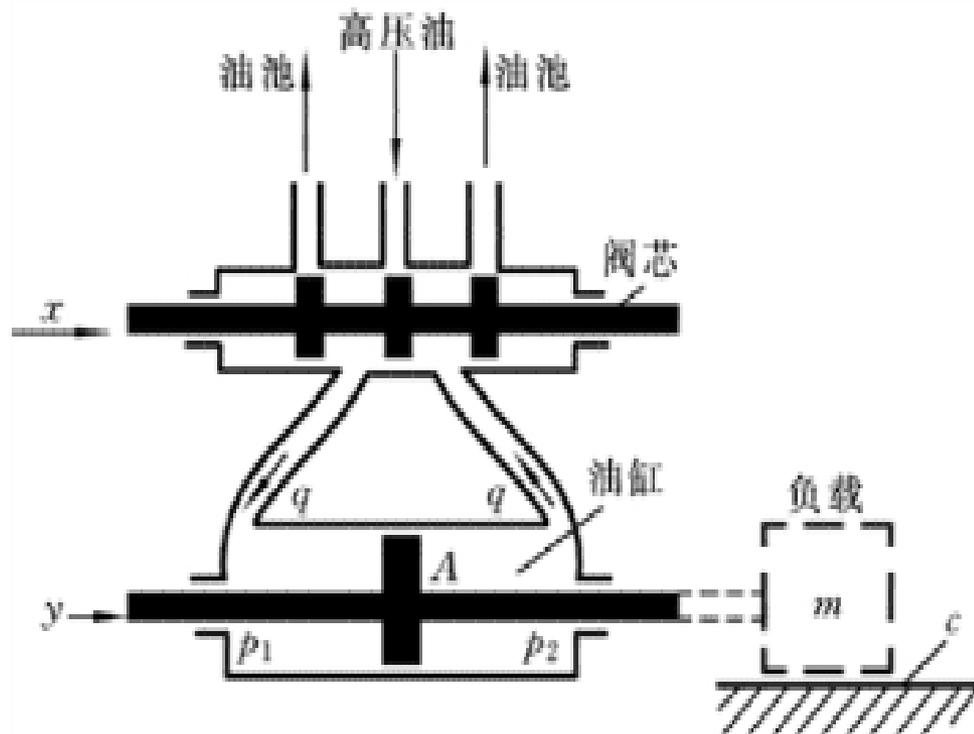
$$\begin{cases} m\ddot{y} + c\dot{y} = Ap \\ q = Ay \end{cases}$$

负载流量 q 与 x, p 为非线性关系：

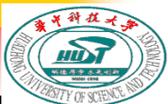
$$q = q(x, p)$$

3. 非线性函数线性化：

(1) 确定系统预定工作点： 设为 (x_0, p_0, q_0)



液压伺服机构



(2) 展开成Taylor级数形式:

$$q(x, p) \approx q(x_0, p_0) + \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ p=p_0}} \Delta x + \left. \frac{\partial q}{\partial p} \right|_{\substack{x=x_0 \\ p=p_0}} \Delta p + \dots$$

(3) 忽略高于一阶项, 表示成增量化形式:

$$\Delta q = K_q \Delta x - K_c \Delta p$$

或 $q = K_q x - K_c p$ (预定工作点定为坐标原点时)

$$p = \frac{1}{K_c} (K_q x - q)$$

4. 代入原方程

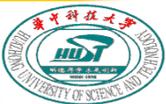
$$\begin{cases} m\ddot{y} + c\dot{y} = Ap \\ q = A\dot{y} \end{cases}$$

并整理得: $m\ddot{y} + \left(c + \frac{A^2}{K_c}\right)\dot{y} = \frac{AK_q}{K_c} x$



上述小偏差线性化方法对于控制系统大多数工作状态是可行的。

这是因为：自动控制系统在正常情况下都处于一个稳定的工作状态（即平衡状态），这时被控制量与期望值保持一致，控制系统也不进行控制动作。一旦被控制量偏离期望值产生偏差时，控制系统便开始控制动作，以便减小或消除这个偏差，因此，控制系统中被控量的偏差一般不会很大，只是“小偏差”。



注意：

1. 非线性函数线性化后得到的微分方程是以增量为基础的增量微分方程；
2. 线性化的结果与系统的预定工作点有关，选择不同的工作点所得的线性化方程的系数将不同；
3. 非线性函数线性化必须满足连续性条件，否则台劳级数在不连续点不能收敛；
4. 线性化函数应用必须满足小偏差的条件，因为在工作点外的其他工况有较大的误差。



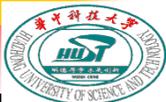
2.3 相似原理

相似系统——能用相同形式的数学模型表示的系统,称为相似系统.

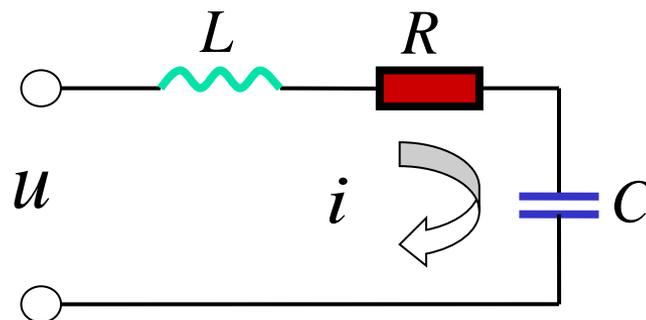
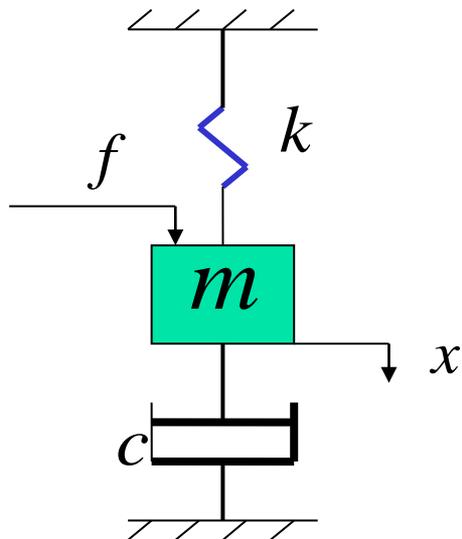
相似量——在相似系统的数学模型中,占据相同位置的物理量.

相似原理的应用:

——可以用一种方便的物理系统去研究另外一种相似的物理系统。如利用电子系统研究相似的机械系统。



例如：



输入为 $f(t)$,输出为 $x(t)$.

输入为 $u(t)$,输出为电容器电量 q .

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

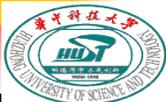
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = u$$

相似量： 力 f 与电压 u ；

位移 x 与电量 q ；

m 与 L ； c 与 R ；

k 与电容的倒数 $1/C$



能源与动力工程学院

School of Energy & Power Engineering

电-液-力相似

系统 变量	电气	液力	热力	机械
势能	电压	液体	温度	力
流量	电流	体积流量	热流量	线速度
阻力	电阻	液阻	热阻	摩擦系数
容量	电容	液容	热容	弹簧弹性系数
感应系数	电感			质量



2.4 传递函数的概念

微分方程——是在时间域描述系统动态性能的数学模型。

在给定外作用及初始条件下, 求解微分方程可以得到系统的输出响应。但是, 若系统的结构改变或某个参数变化时, 就要重新列写并求解微分方程, 不便于对系统的分析和设计。

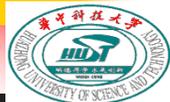
用拉氏变换法求解线性系统的微分方程时, 可以得到控制系统在复数域的数学模型——传递函数。



为什么要讨论传递函数？

因为传递函数：

- 可表征系统的动态性能；
- 可图解系统的动态数学模型；
- 可用来研究系统结构或参数变化对性能的影响。
- 是经典控制理论中最基本和最重要的概念。
——建立频率法和根轨迹法的基础。



传递函数定义：

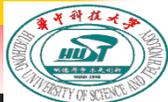
在零初始条件下，线性定常系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

设线性定常系统由下述n阶线性常微方程描述：

$$\begin{aligned} & a_n x_o^{(n)}(t) + a_{n-1} x_o^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}_o(t) + a_0 x_o(t) \\ & = b_m x_i^{(m)}(t) + b_{m-1} x_i^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{x}_i(t) + b_0 x_i(t) \end{aligned}$$

根据线性定理，在零初始条件下，分别对方程两边进行Laplace变换，有：

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X_o(s) \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X_i(s) \end{aligned}$$



则:

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (n \geq m)$$

或 $X_o(s) = G(s)X_i(s)$

——定义G(s)为该系统的传递函数

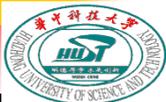
传递函数的要素:

- 1、线性定常系统
- 2、零初始条件
- 3、输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比

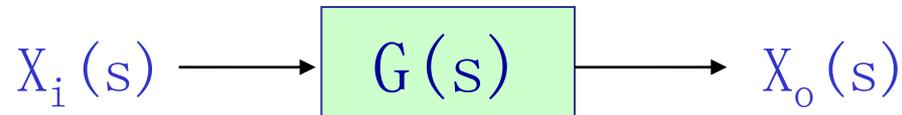


传递函数的性质:

- 1、传递函数是关于复变量 s 的有理真分式($m \leq n$)函数,具有复变函数所有性质。且所有系数均为实数。
- 2、传递函数的分母反映系统本身与外界无关的固有特性,传递函数的分子反映系统与外界的联系;
- 3、传递函数是一种用系统参数表示输出量与输入量之间关系的表达式。一旦输出/输入量确定,传递函数只取决于系统或元件的结构和参数,而与输入量的形式无关,也不反映系统内部的任何信息。



因此,可以用方块图表示具有传递函数 $G(s)$ 的线性系统



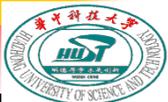
传递函数方框

——反映了系统输入与输出的因果关系。

4、当输入确定时,系统的输出完全取决于系统的传递函数。即:

$$x_o(t) = L^{-1}[X_o(s)] = L^{-1}[G(s)X_i(s)] \quad (\text{零初始条件})$$

——可以通过Laplace反变换求系统的时域响应。



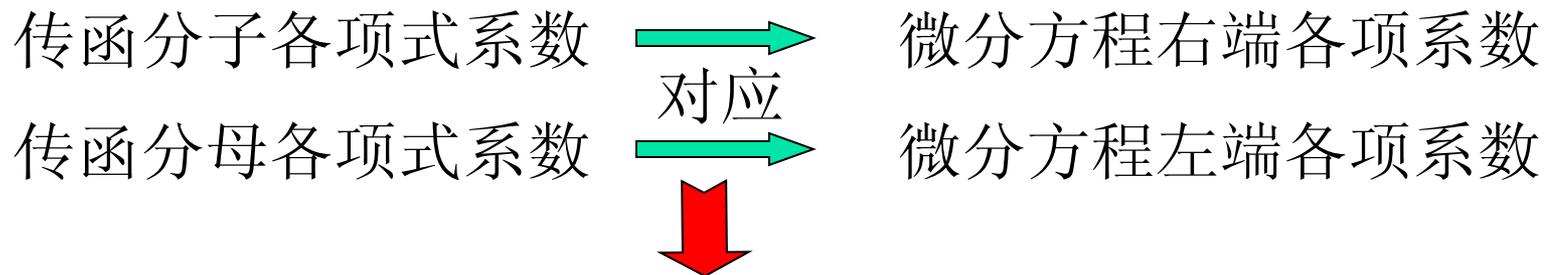
5、传递函数可以有量纲的，也可以是无量纲的。它取决于输入和输出量的量纲。

6、物理性质不同的系统，可以有相同的传递函数(相似系统)。——传递函数分析方法可用于不同的物理系统

7、同一个物理系统，可能有不不同的传递函数(表示不同输入量和输出量之间的关系)。——同一物理系统可以有多个传递函数。



8、传递函数与微分程有相通性。即：



故：将微分方程的 d/dt 用复数 s 置换，便得到传递函数；
反之，将传递函数的 s 用算符 d/dt 置换，便得到微分方程。

例：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_1s + b_2}{a_0s^2 + a_1s + a_2}$$

$$a_0 \frac{d^2}{dt^2} c(t) + a_1 \frac{d}{dt} c(t) + a_2 c(t) = b_1 \frac{d}{dt} r(t) + b_2 r(t)$$



9、传递函数 $G(s)$ 的拉氏反变换，是输出 c 的脉冲响应 $g(t)$ 。

脉冲响应 $g(t)$ ——是系统在单位脉冲 $\delta(t)$ 输入时的输出响应。

此时：
$$R(s) = L[\delta(t)] = 1,$$

故有：

$$g(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[G(s)R(s)] = L^{-1}[G(s)].$$



传递函数的零极点模型:

传递函数:

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (n \geq m)$$

经因式分解后可以写成:

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)} \quad \text{零极点增益模型}$$

z_1, z_1, \dots, z_m 系统零点——影响瞬态响应曲线的形状, 不影响系统的稳定性.

p_1, p_1, \dots, p_n 系统极点——决定系统瞬态响应的收敛性, 即影响系统的稳定性.



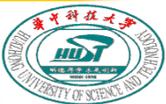
系统放大系数(增益):

当 $s=0$ 时, 上式为:

$$G(0) = \frac{K(-z_1)(-z_2)\dots(-z_m)}{(-p_1)(-p_2)\dots(-p_n)} = \frac{b_0}{a_0}$$

——为系统的稳态输出值, 称**系统放大系数**

系统的零点、极点、放大系数决定了系统的瞬态性能和稳态性能。所以, **对系统的研究可以转化为对系统传递函数零点, 极点, 放大系数的研究.**



例：求图示系统的传递函数。

1. 确定的系统的输入与输出：

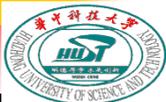
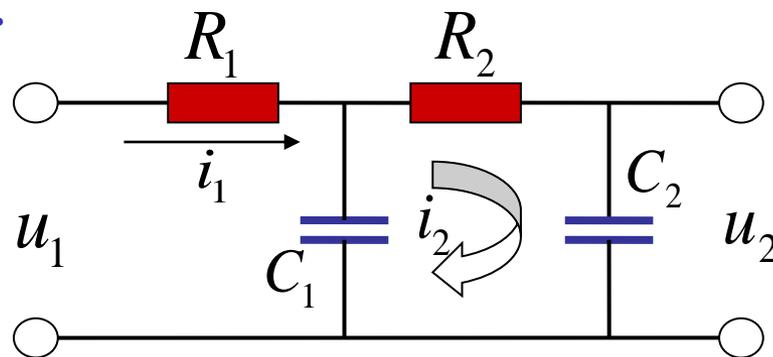
输入为 u_1 ，输出为 u_2

2. 列写原始微分方程：

$$i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt = u_1$$

$$i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt = u_2$$



3. 在零初始条件下, 进行Laplace变换:

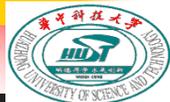
$$\begin{aligned}
 i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt &= u_1 & I_1(s) R_1 + \frac{1}{C_1} \frac{I_1(s) - I_2(s)}{s} &= u_1(s) \\
 i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt &= \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad \rightarrow & I_2(s) R_2 + \frac{1}{C_2} \frac{I_2(s)}{s} &= \frac{1}{C_1} \frac{I_1(s) - I_2(s)}{s} \\
 \frac{1}{C_2} \int i_2 dt &= u_2 & \frac{1}{C_2} \frac{I_2(s)}{s} &= u_2(s)
 \end{aligned}$$

4. 消除中间变量并整理:



$$[R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1] U_2 = U_1$$

$$G(s) = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$



2.5 典型环节的传递函数

系统的传递函数往往是高阶的, 高阶传递函数一般可以化为低阶(零阶、一阶、二阶)典型环节(如比例、惯性、积分、微分、振荡等环节)的组合。

1. 比例环节:

动力学方程: $x_o(t) = Kx_i(t)$ K 为放大系数

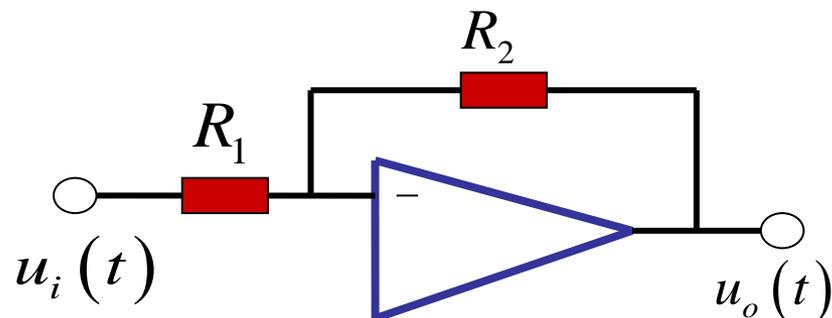
传递函数: $G(s) = K$

传递函数方框图: $X_i(s) \longrightarrow \boxed{K} \longrightarrow X_o(s)$

特点: 输出量无延迟、无惯性、不失真、按比例复现输入量的变化规律。



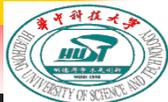
例如：运算放大器。



动力学方程：
$$u_o(t) = -\frac{R_2}{R_1} u_i(t)$$

经Laplace变换后得其传递函数：

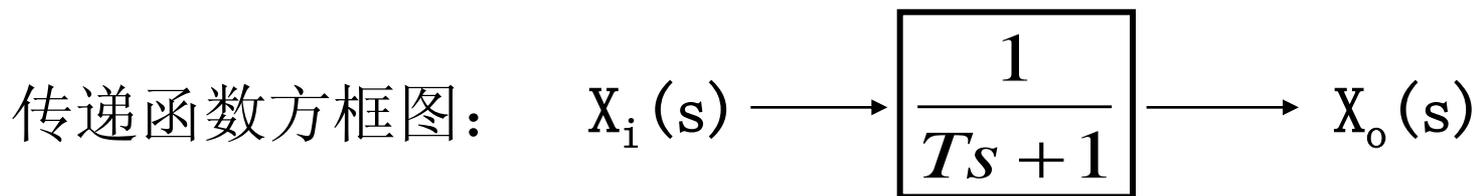
$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = K$$



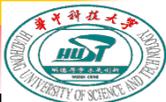
2. 惯性环节:

动力学方程:
$$T \frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = x_i(t)$$

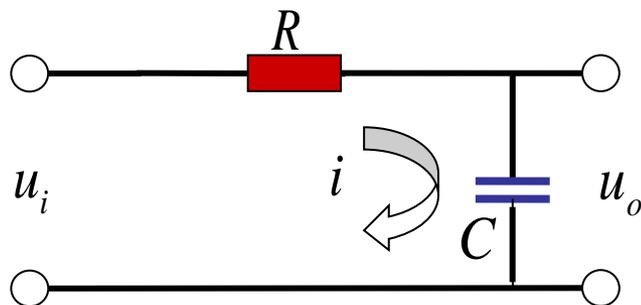
传递函数:
$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$
 T 为惯性时间常数



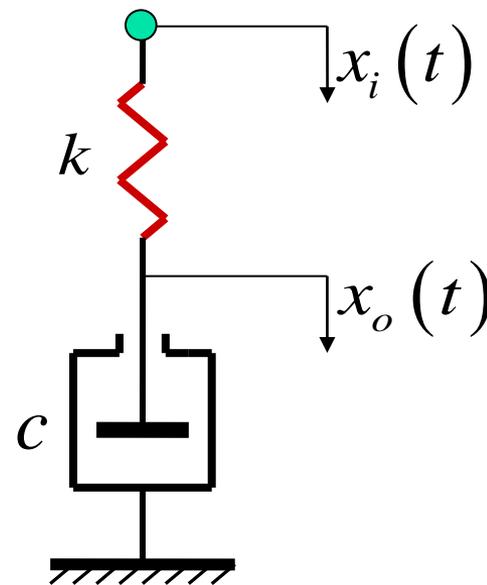
特点: 环节内存在一个储能元件或耗能元件, 在阶跃输入下, 输出不能立即达到稳态值, 需经历一个渐变过程。



例如：



无源滤波电路



弹簧-阻尼系统

传递函数分别为：

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

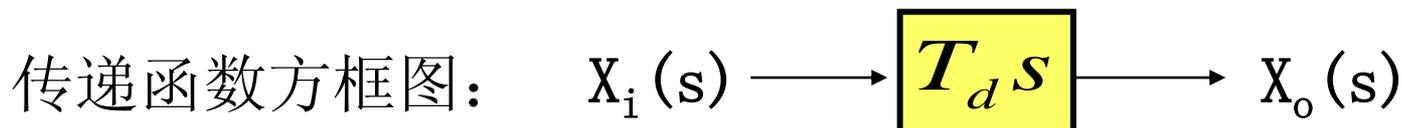
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{\frac{c}{k}s + 1}$$



3. 微分环节:

动力学方程:
$$x_o(t) = T_d \dot{x}_i(t)$$

传递函数:
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = T_d s \quad T_d \text{ 为微分时间常数}$$

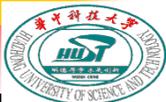


特点: 反映输入的变化趋势;

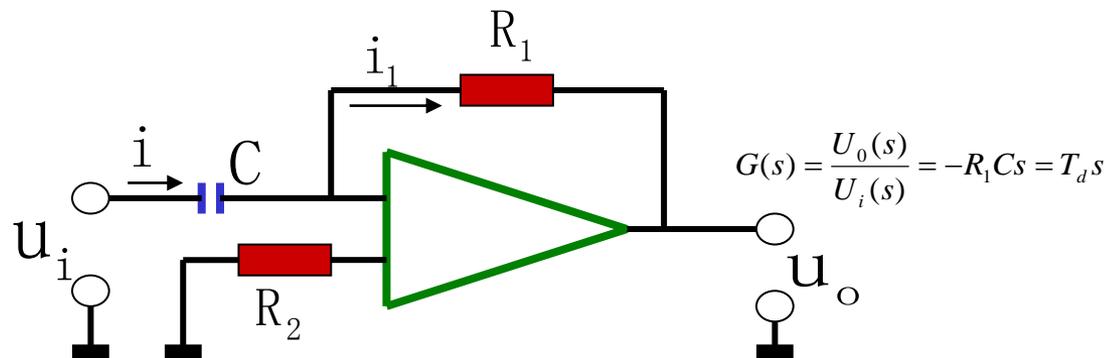
增加系统的阻尼;

强化噪声.

一般不能单独存在;



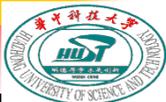
例如：微分运算电路。



动力学方程：

$$\begin{cases} i(t) = C \frac{du_i}{dt} \\ u_o(t) = -R_1 i_1 = -R_1 i \end{cases}$$

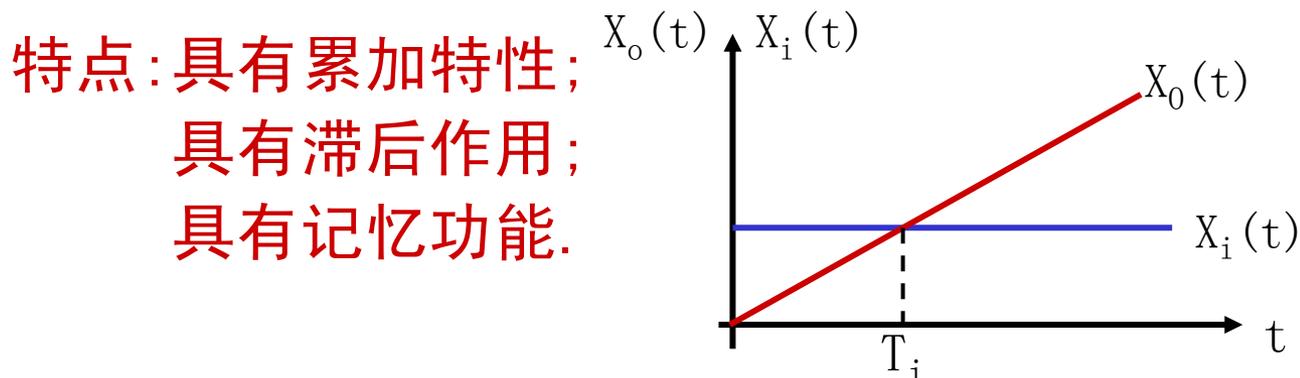
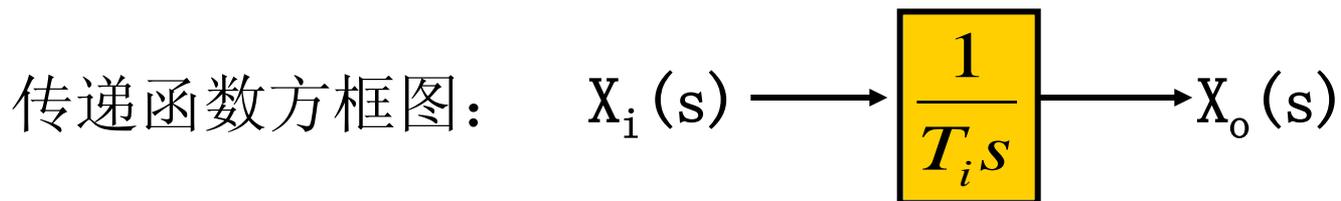
经Laplace变换后得其传递函数：



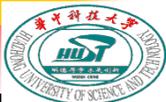
4. 积分环节

动力学方程：
$$x_o(t) = \frac{1}{T_i} \int x_i(t) dt$$

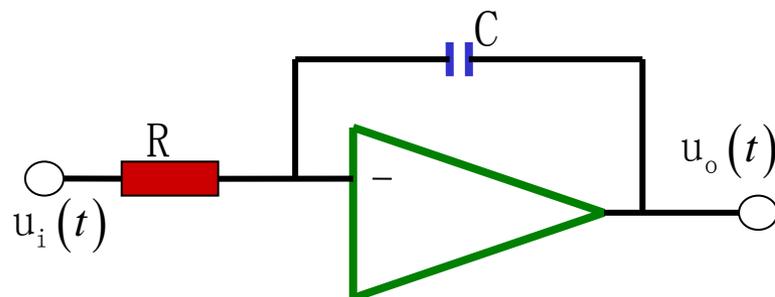
传递函数：
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{T_i s}$$
 T_i 为积分分时间常数



积分环节输入输出关系



例如:有源积分网络

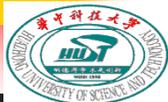


动力学方程:
$$\frac{u_i(t)}{R} = -C \frac{du_o(t)}{dt}$$

经Laplace变换后得其传递函数:

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{1}{RCs} = \frac{1}{T_i s} = \frac{k}{s}$$

$$T_i = \frac{1}{k} = -RC$$



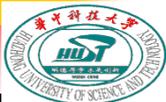
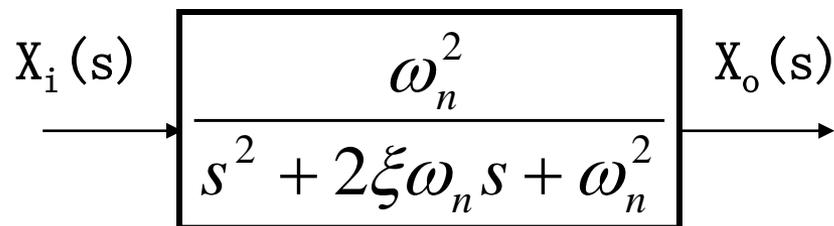
5. 振荡环节(对应二阶微分方程):

传递函数:
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{标准形式})$$

或
$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n \text{ 为无阻尼固有频率;} \\ \xi \text{ 为阻尼比 } (0 \leq \xi < 1) \\ T = \frac{1}{\omega_n} \text{ 为时间常数} \end{array} \right.$$

传递函数方框图:

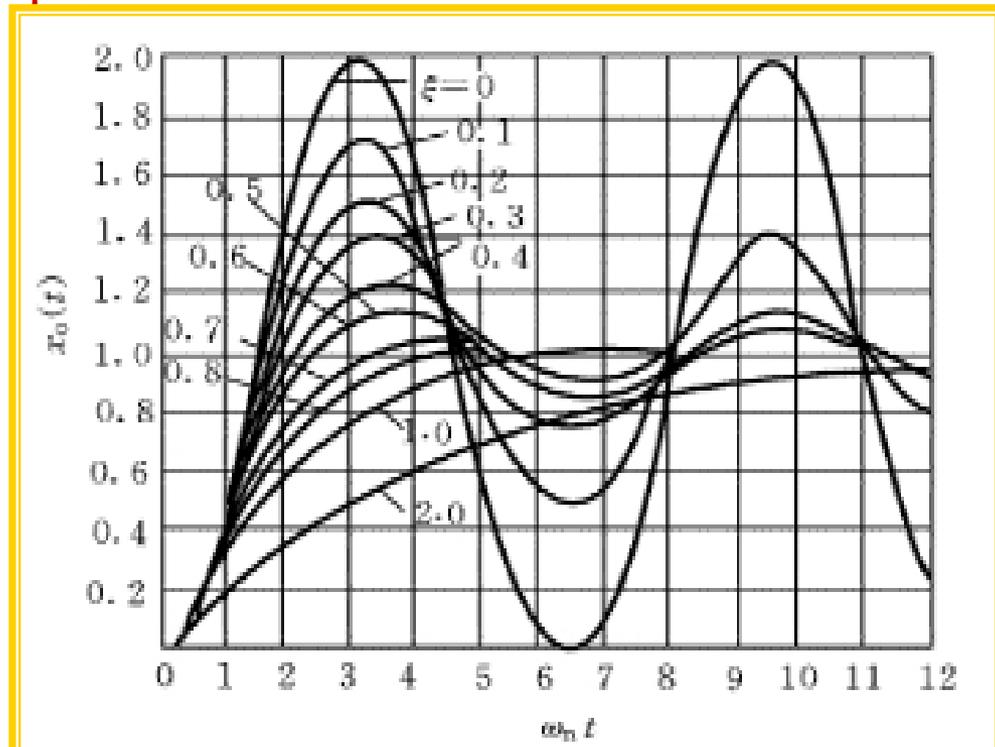


特点:

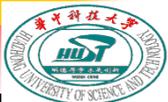
- (1). 当 $0 \leq \xi < 1$ 时, 输出存在振荡, 且 ξ 越小, 振荡越激烈;
- (2). 当 $\xi \geq 1$ 时, 输出无振荡, 非振荡环节是两个一阶惯性环节的组合. ξ 较大时 T 很小, 则 s^2 项可忽略不计, 二阶环节近似为一阶惯性环节。

(3). 振荡环节一般含有一个储能元件和一个耗能元件, 由于两个元件之间有能量交换, 使系统输出发生振荡。

(4). 振荡环节为二阶环节, 但二阶环节不一定是振荡环节



振荡环节的单位响应曲线



例如:无源网络

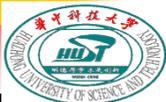
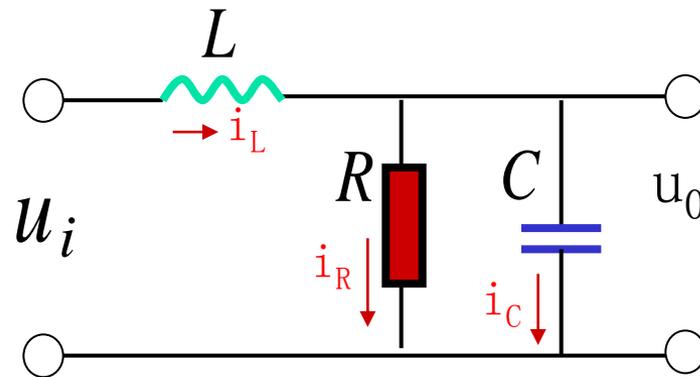
因为:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = L \frac{di_L}{dt} + u_0 \\ u_0 = Ri_R = \frac{1}{C} \int i_C dt \\ i_L = i_C + i_R \end{array} \right.$$

动态方程: $LC\ddot{u}_o + \frac{L}{R}\dot{u}_o + u_o = u_i$

传递函数: $G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\xi s + \omega_n^2}$

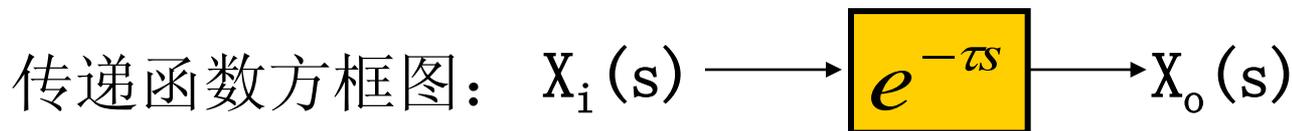
式中: $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \xi = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$



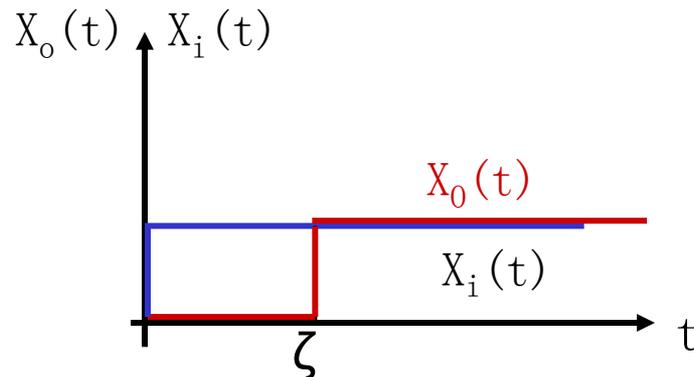
6. 延时环节:

动力学方程:
$$x_o(t) = x_i(t - \tau)$$

传递函数:
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = e^{-\tau s}$$



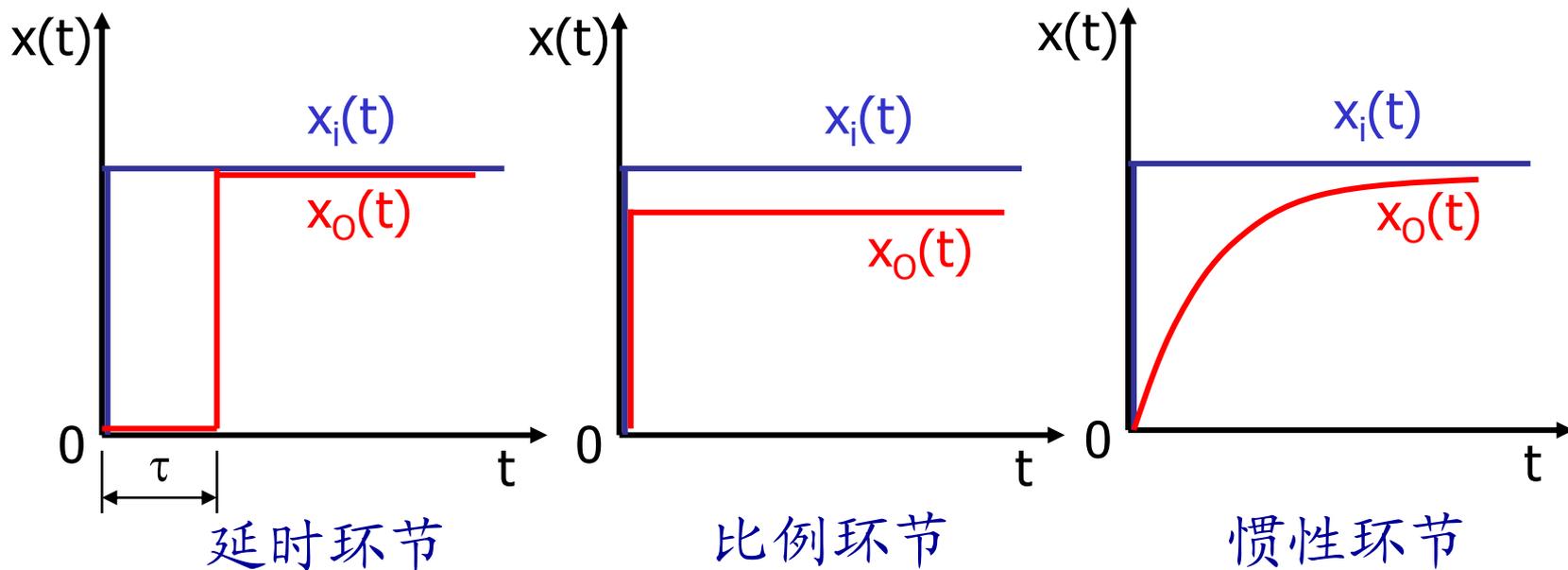
特点: 输出滞后于输入;
但不失真.



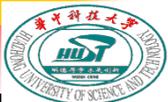
延时环节输入输出关系



与惯性环节和比例环节的区别



不同环节的阶跃响应



注意：

- 1、传递函数框图中的一个环节并不一定代表一个物理元件(或子系统),一个物理元件(或子系统)也不一定就是一个传递函数环节(或许几个元件特性组成一个传递函数环节,也许一个元件特性分解为几个传递函数环节)。
- 2、表示系统结构的物理框图和分析系统的传递函数框图是有区别的。
- 3、同一物理元件在不同系统中的作用不同时,其传递函数也可以不同。

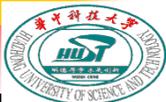


2.6 系统传递函数方框图的建立

将组成系统的各个环节用传递函数方框表示,并将相应的变量按信息流向连接起来,就构成系统的传递函数方框图。

传递函数方框图

- 是定量描述系统各元部件之间信号传递关系的图形化数学模型,补充了原理图所缺少的定量描述;
- 它表示各变量之间的因果关系和对各变量所进行的运算。
- 可用方框进行数学运算,避免了纯数学的抽象运算;
- 可方便地求得系统的综合传递函数。
- 是控制理论中描述和研究复杂系统的一种简便方法。反映系统直观,分析系统便利。



方框图的结构要素:

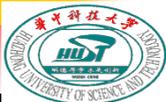
1、函数方框

——表示对信号进行的数学变换。方框中写入元部件或系统的传递函数。



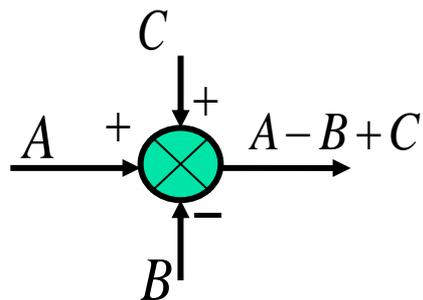
2、信号线

——带箭头的直线,箭头表示信号的流向,在直线旁标记信号的时间函数或象函数,



3、相加点

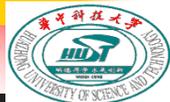
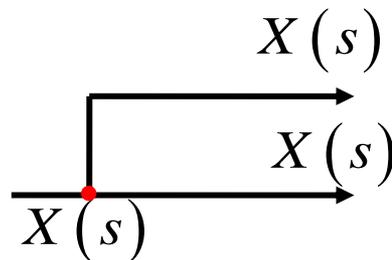
——表示对两个以上的信号进行加减运算。



“+”号表示相加（可省略），
“-”号表示相减，

4、分支点

——表示信号引出或测量的位置，从同一位置引出的信号在数值和性质方面完全相同

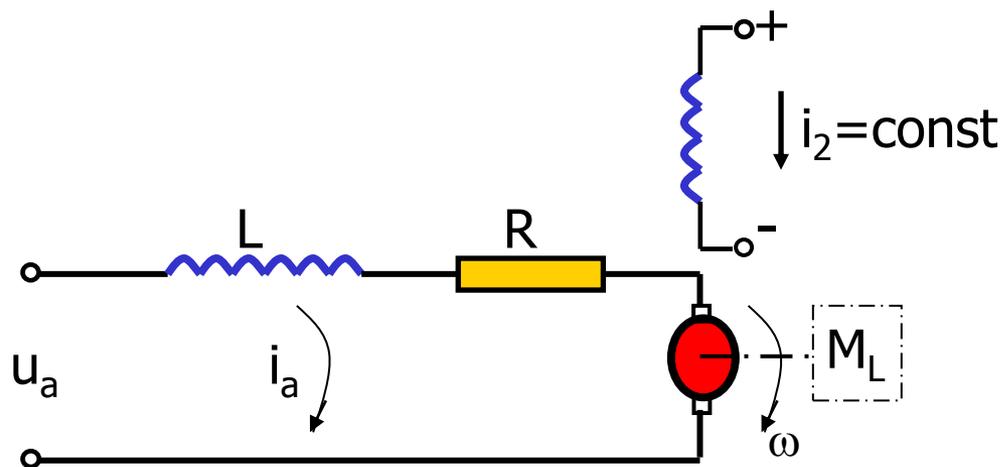


建立传递函数方框图的方法:

- 1、列写系统（或元件）的原始微分方程；
- 2、对上述各方程分别进行Laplace变换（零初始条件下）；
- 3、根据因果关系，将各个Laplace变换结果表示成传递函数方框图（各环节的传递函数方框图）；
- 4、按信号的传递与变换过程，依次连接上述各个方框图，构成整个系统的传递函数方框图，一般将输入放在左边，输出放在右边。



例：建立图示直流电动机的传递函数方框图



直流电动机

1. 列写原始微分方程：

$$L\dot{i}_a + i_a R + e_d = u_a$$

$$e_d = k_d \omega$$

$$J\dot{\omega} = M - M_L$$

$$M = k_m i_a$$

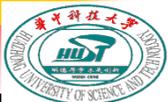
2. Laplace变换：

$$(Ls + R)I_a + E_d = U_a$$

$$E_d = k_d \Omega$$

$$Js\Omega = M - M_L$$

$$M = k_m I_a$$



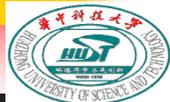
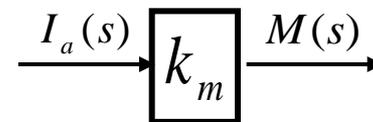
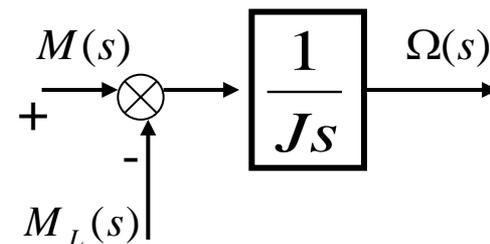
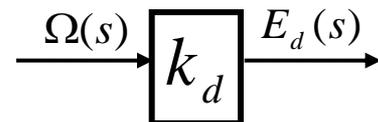
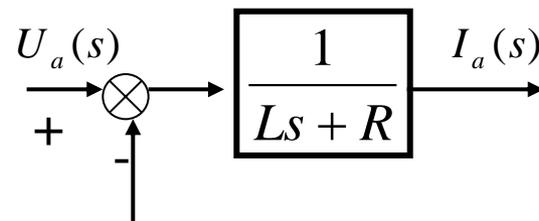
3. 绘制上述各式传递函数方框图：

$$(Ls + R)I_a + E_d = U_a$$

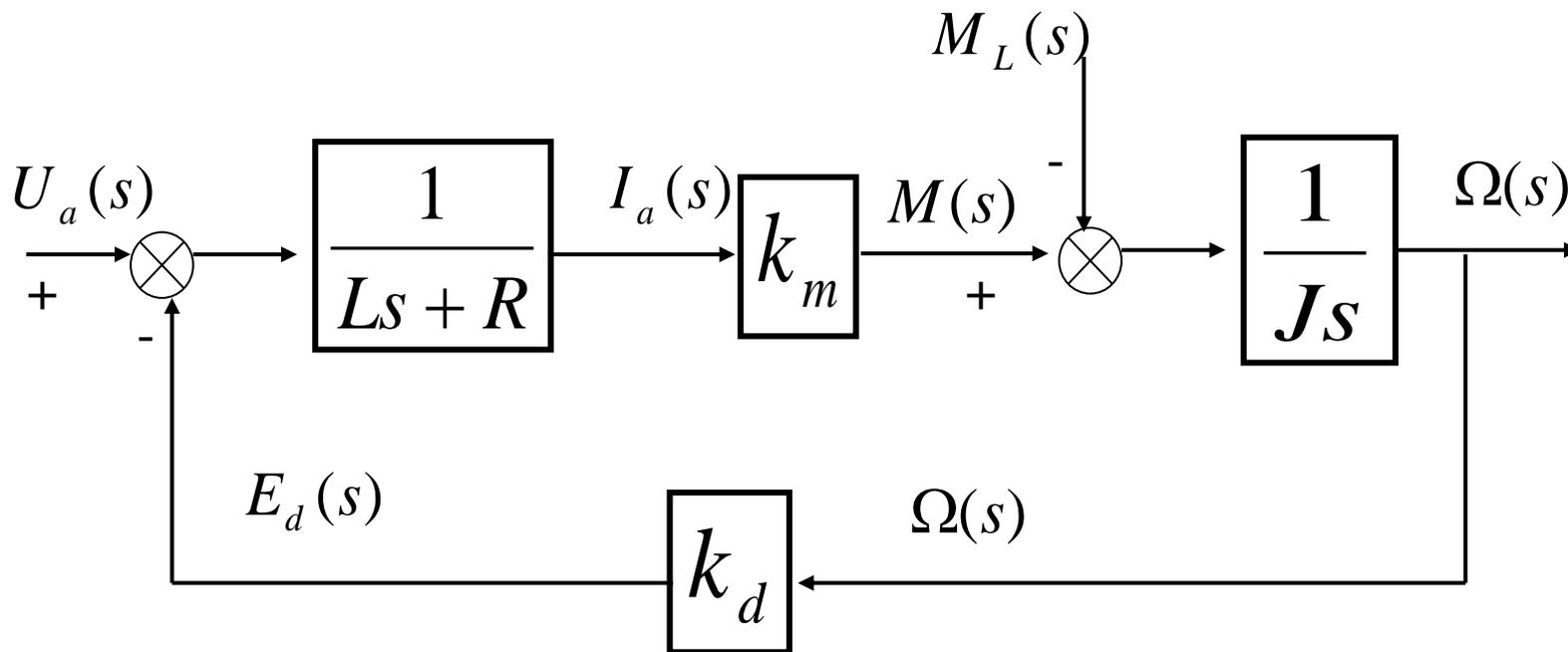
$$E_d = k_d \Omega$$

$$Js\Omega = M - M_L$$

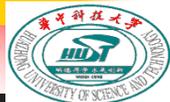
$$M = k_m I_a$$



4. 连接各方框:

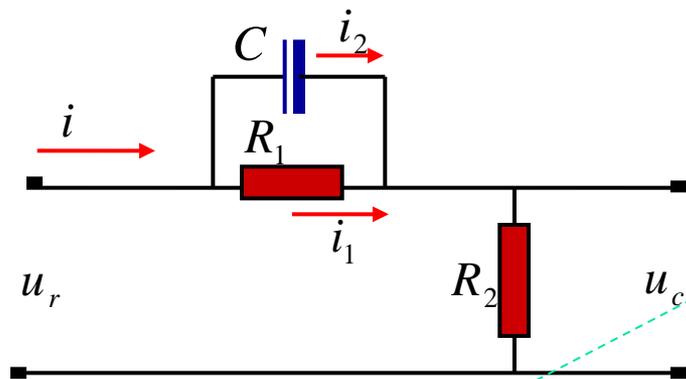


直流电动机的传递函数方框图



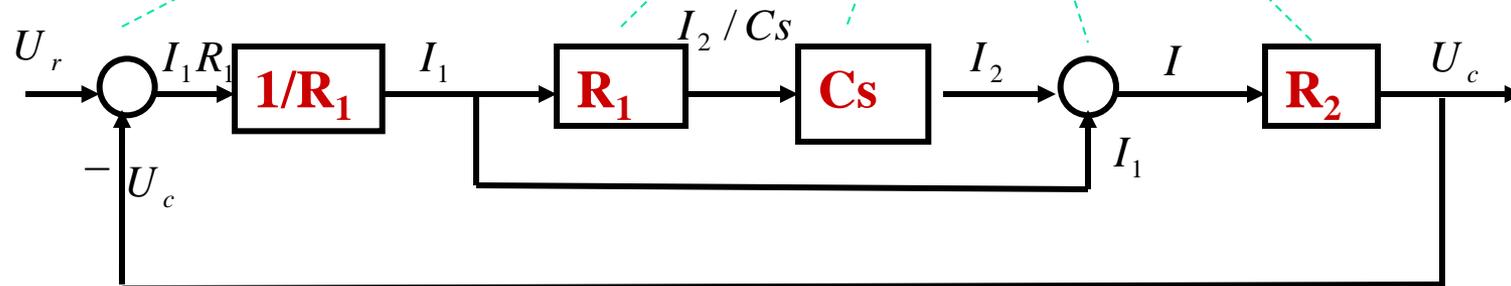
试绘制图示系统的方框图?

解: 应用复阻抗概念, 由克希霍夫定律可写出以下方程:

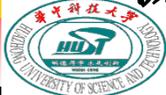


$$\begin{cases} U_r(s) = I_1(s)R_1 + U_c(s) \\ I_2(s) \frac{1}{Cs} = I_1(s)R_1 \\ I_1(s) + I_2(s) = I(s) \\ U_c(s) = I(s)R_2 \end{cases}$$

按照上述方程, 可分别绘制相应元件的方框图



然后, 用信号线依次将各方框连接起来, 便得到无源网络的结构图。



2.7 函数方框图的等效变换和简化

——对应于运动方程消去中间变量。

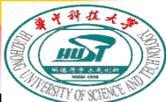
通过等效变换，可方便地：

- 简化复杂地交叉地多回路系统方框图
- 求取系统的综合传递函数或输出量的响应。

简化应遵循的原则：

——变换前后变量关系保持等效，即：

- (1) 变换前后，前向通路中传递函数的乘积应保持不变；
- (2) 变换前后，闭合回路中传递函数的乘积应保持不变。



简化的一般步骤（方法）：

- (1) 等效移动分支点或相加点；
- (2) 两相邻的分支点（或相加点）交换；
- (3) 进行方框运算，合并串/并/反馈连接的方框。

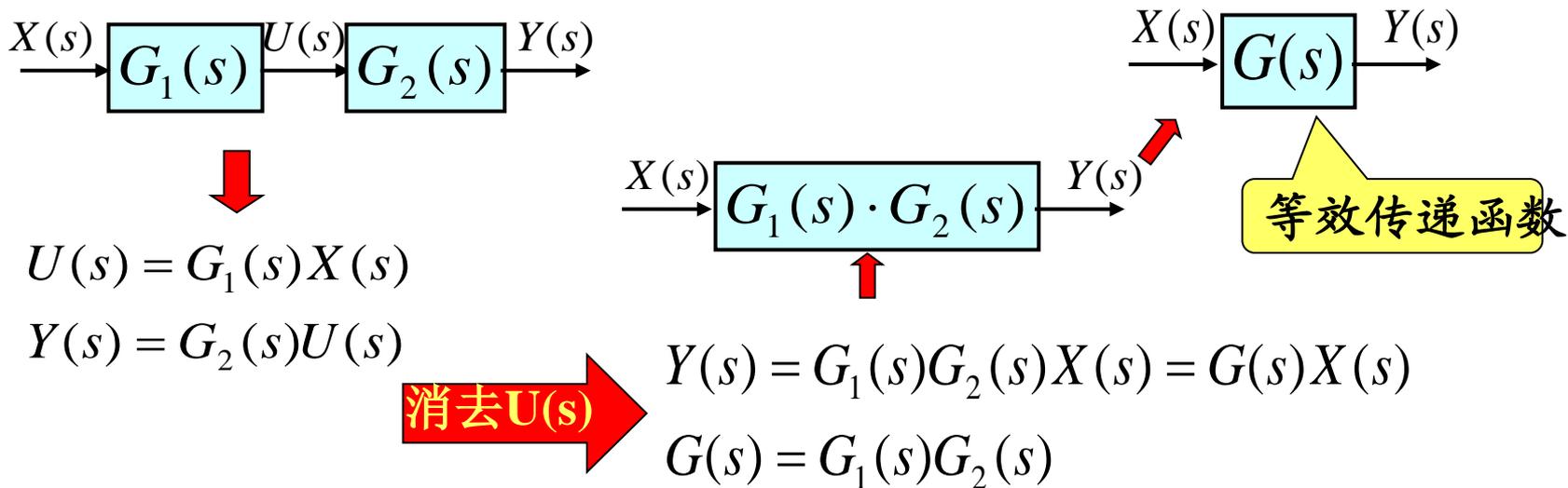
串联方框的简化(等效)

设：传递函数分别为 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的两个方框，

若： $G_1(s)$ 的输出量作为 $G_2(s)$ 的输入量，

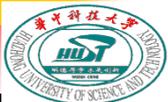
则： $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 称为——串联接连，如图所示。





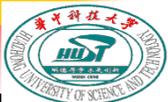
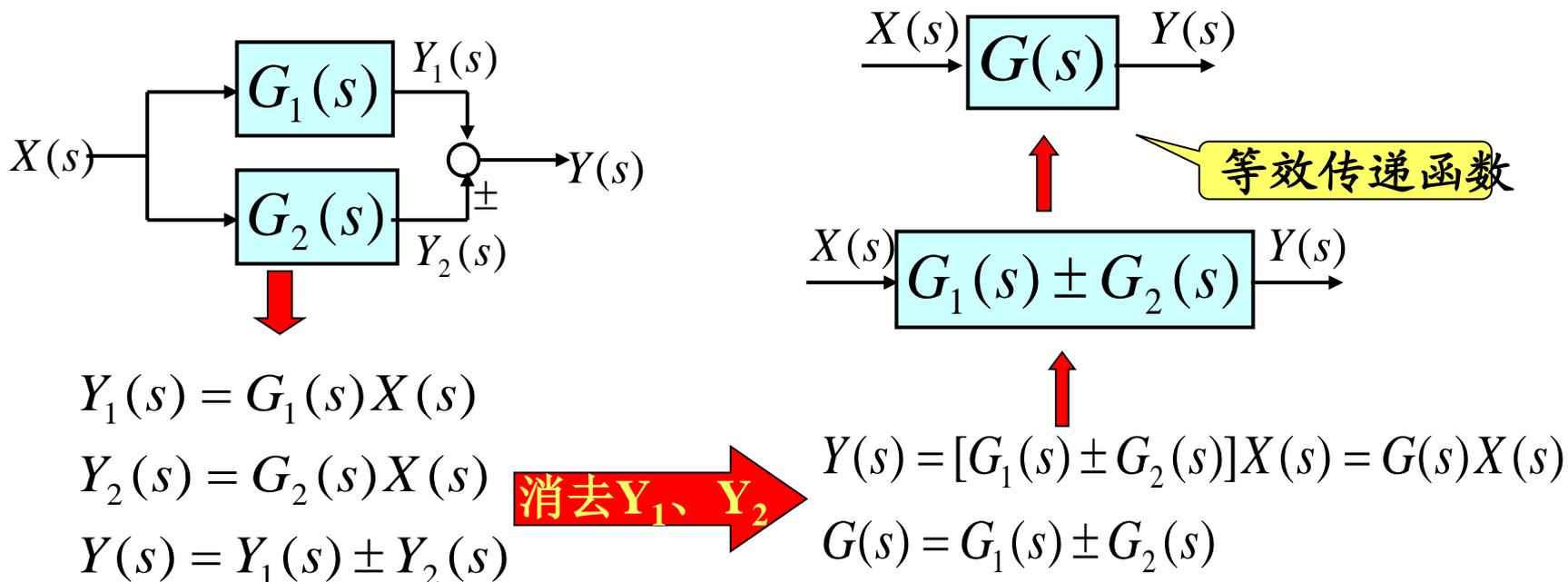
由此可知：两个方框串联连接的等效方框, 等于各个方框传递函数之乘积

——这个理论可推广到n个串联方框。



并联方框的简化(等效)

设：传递函数分别为 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的两个方框；
 若：它们输入相同，输出为二者输出的代数 sum；
 则： $G_1(s)$ 与 $G_2(s)$ 称为——并联连接，如图所示。



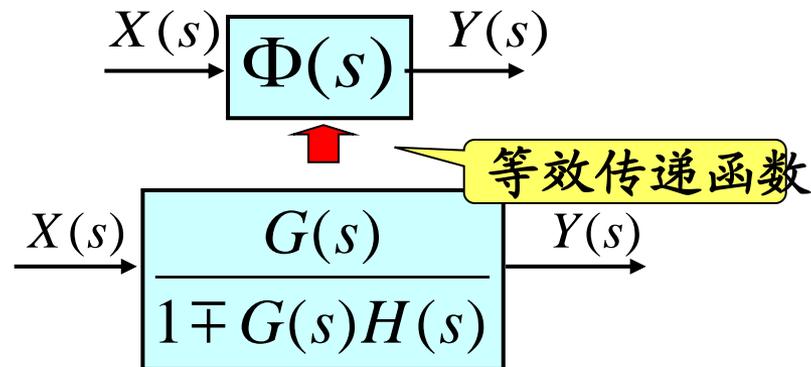
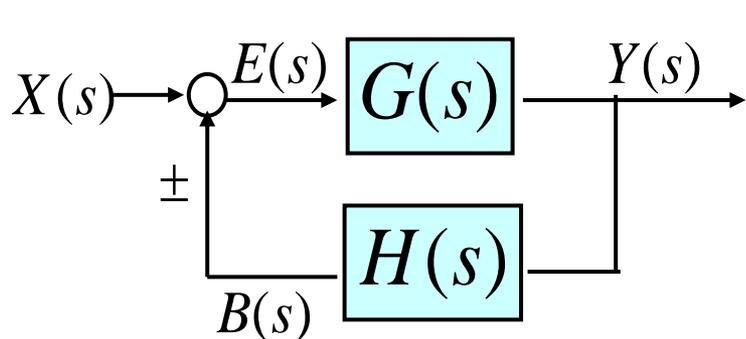
由此可知：两个方框并联连接的等效方框, 等于各个方框传递函数的代数和。

——这个理论可推广到n个并联方框。

反馈连接方框的简化(等效)

设：传递函数分别为 $G(s)$ 和 $H(s)$ 的两个方框；
若：一个方框的输出量, 作为另一个方框的输入量；
则： $G(s)$ 与 $H(s)$ 称为——反馈接连, 如图所示。





$$Y(s) = G(s)E(s)$$

$$B(s) = H(s)Y(s)$$

$$E(s) = X(s) \pm B(s)$$

消去E、B

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

$$Y(s) = G(s)[X(s) \mp H(s)Y(s)]$$

注意!

叠加处: { “+”号表示反馈信号与输入信号相加, 为正反馈,
“-”号表示反馈信号与输入信号相减, 为负反馈。

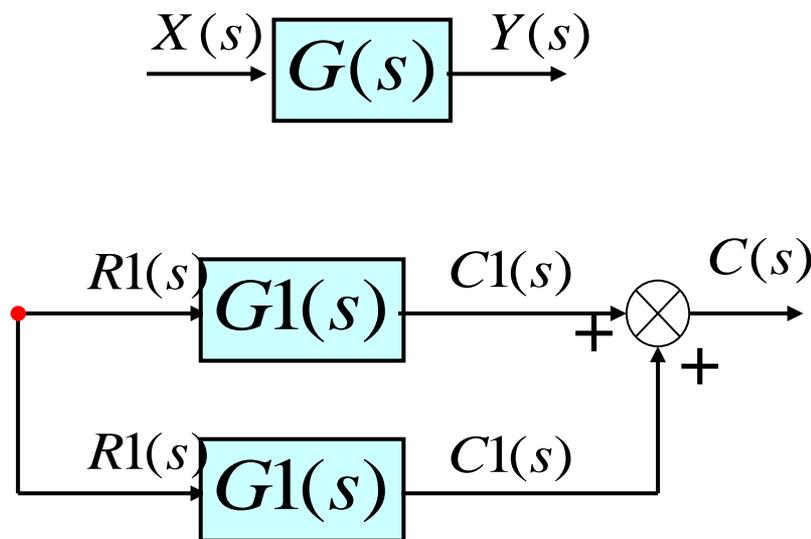
传函中: { “+”号表示负反馈,
“-”号表示正反馈。



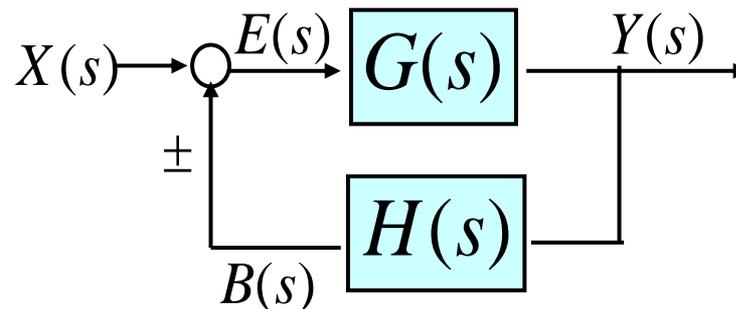
方框图基本概念

■ 前向通道

顺着箭线方向从 $X(s)$ 到 $Y(s)$ 的线路称为 $X(s)$ 到 $Y(s)$ 的前向通道



方框图基本概念



在反馈系统中：

前向通道传递函数： $G(s) = Y(s) / E(s)$

反馈通道传递函数： $H(s) = B(s) / Y(s)$

开环传递函数： $G_k(s) = G(s)H(s) = B(s) / E(s)$

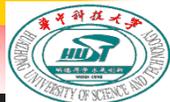
闭环传递函数： $\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$



说明:

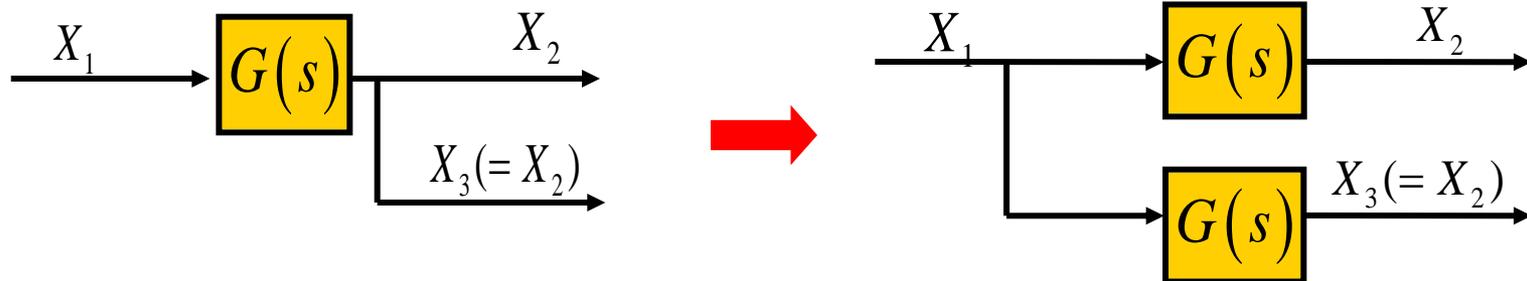
(1) 前向通道, 反馈通道, 开环传递函数都只是闭环系统部分环节(或环节组合)的传递函数, 而闭环传递函数才是系统的传递函数;

(2) 相加点 $B(s)$ 处的符号并不能完全代表系统的反馈是正反馈还是负反馈。

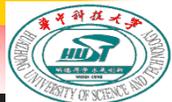
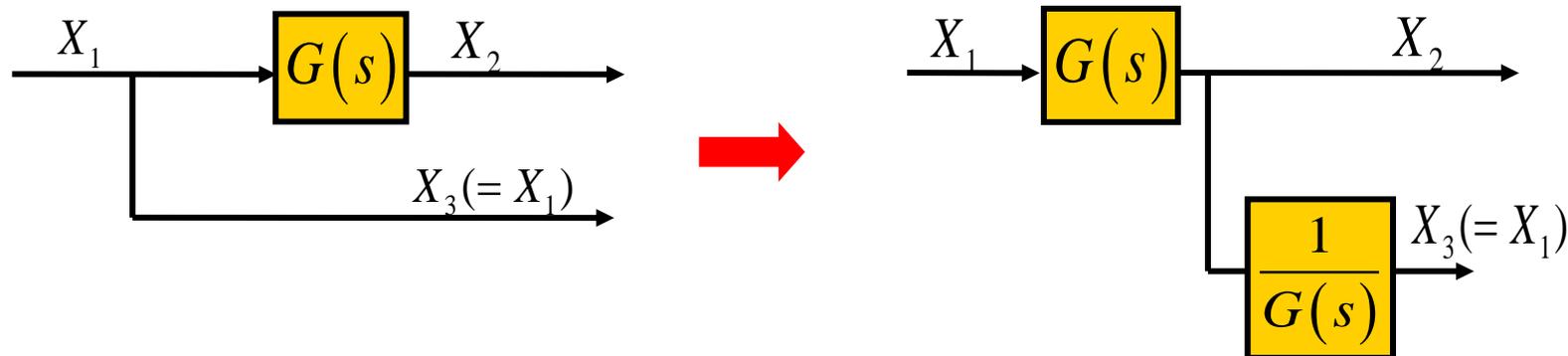


分支点移动规则：

分支点前移

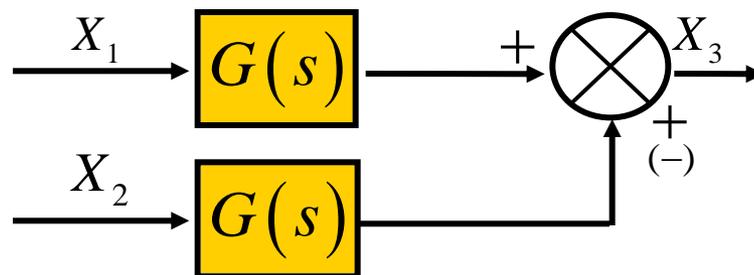
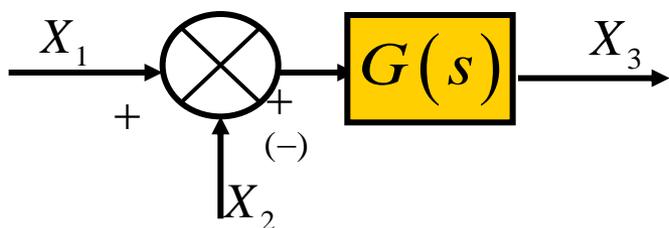


分支点后移

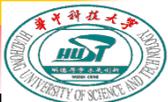
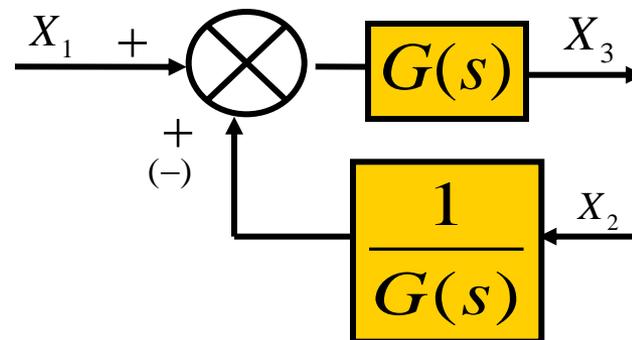
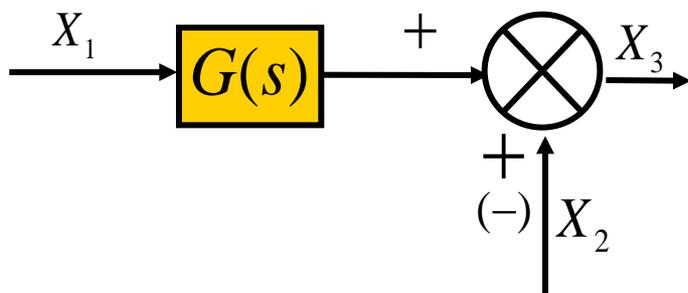


相加点移动规则：

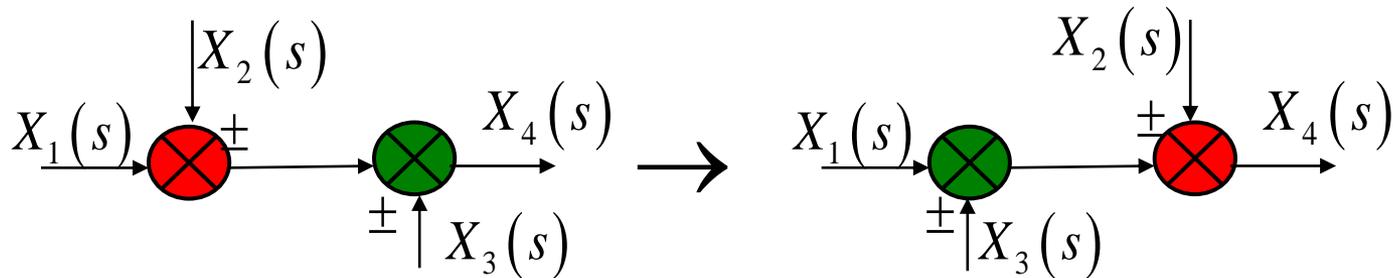
相加点后移



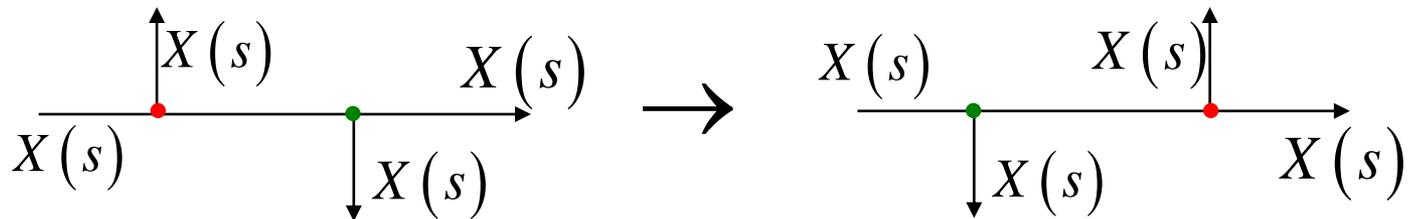
相加点前移



相邻相加点的移动规则：

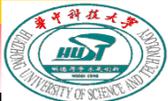


相邻分支点的移动规则：



注意：

- (1) 在移动前后必须保持信号的等效性，
- (2) 相加点和分支点之间一般不宜交换其位置。
- (3) “-”号可越过方框移动，但不能越过相加点和分支点。



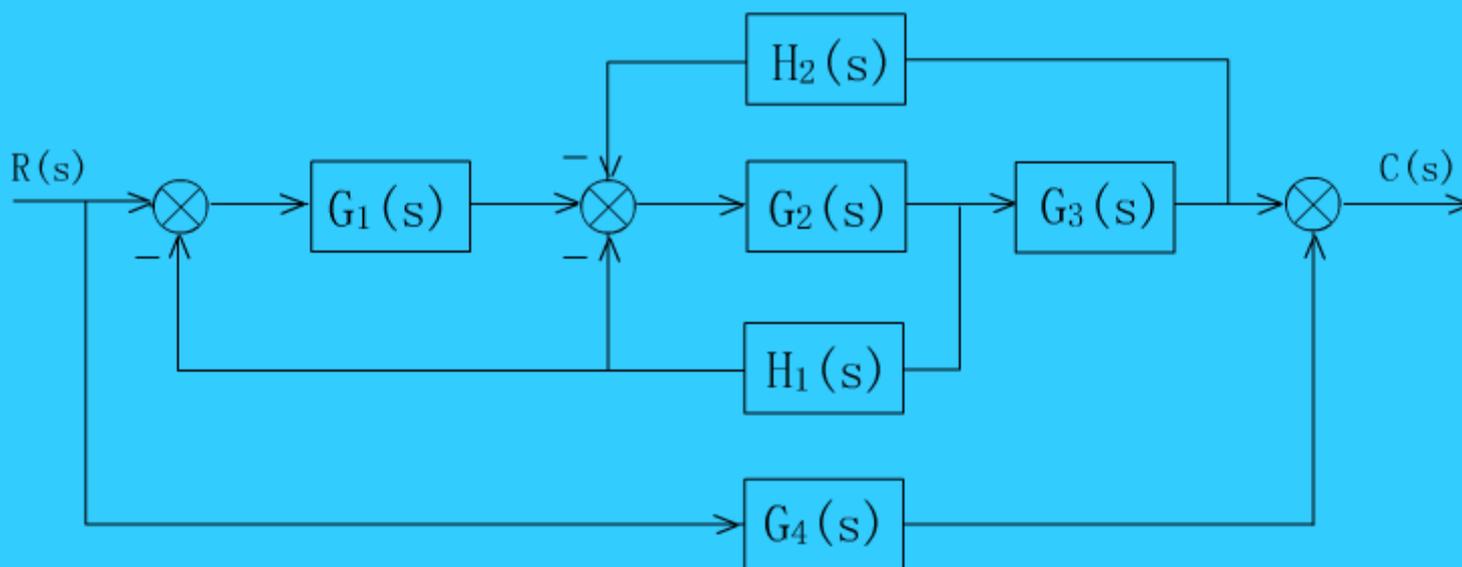
系统方框图简化的一般方法：

- 1、明确系统的输入和输出。对于多输入多输出系统, 针对每个输入及其引起的输出分别进行化简;
- 2、若系统传递函数方框图中无交叉回路, 则根据环节串联, 并联和反馈连接的等效原则, 从里到外逐步进行简化;
- 3、若系统传递函数方框图中有交叉回路, 则先根据相加点、分支点等移动规则消除交叉回路, 然后按步骤2进行化简.



方框图的化简举例

方框图等效变换

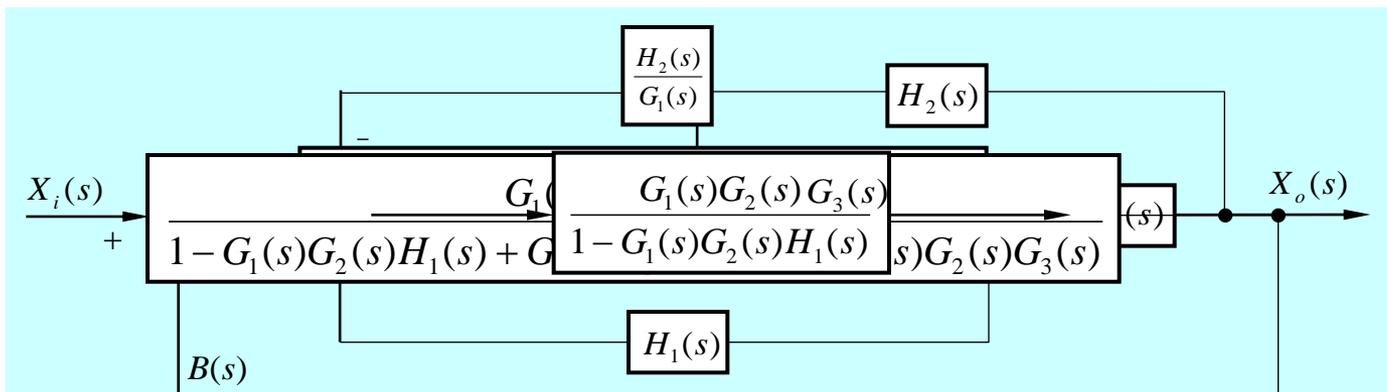


变换开始

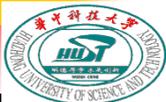


方框图化简举例

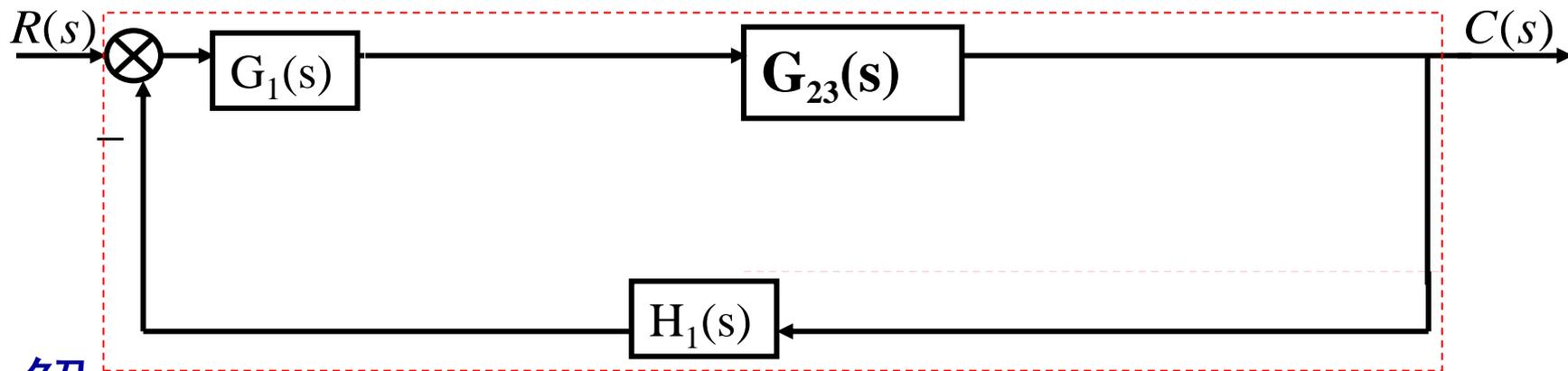
- (1) 相加点前移;
- (2) 将小回路化为单一向前传递函数;
- (3) 再消去第二个闭环回路, 使之成为单位反馈的单环回路;
- (4) 最后消去单位反馈回路, 得到单一向前传递函数, 即系统的闭环传递函数。



传递函数框图简化



例：试简化图示方框图, 并求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



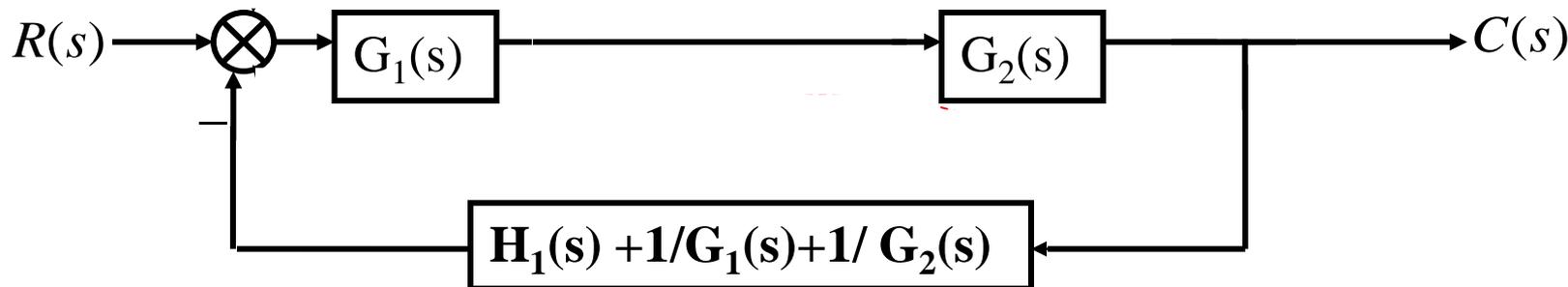
解：

- (1) 移动比较点或引出点, 消除回路交叉。
- (2) 等效简化串（并）联方框。
- (3) 等效简化局部反馈回路。
- (4) 等效简化 $G_1(s)$ 、 $G_{23}(s)$ 和 $H_1(s)$ 组成的外部反馈回路。

注意：(1) 等效变换过程并非唯一；

(2) 在进行结构图等效变换时, 变换前后应保持信号的等效性。

例：简化图示方框图, 并求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

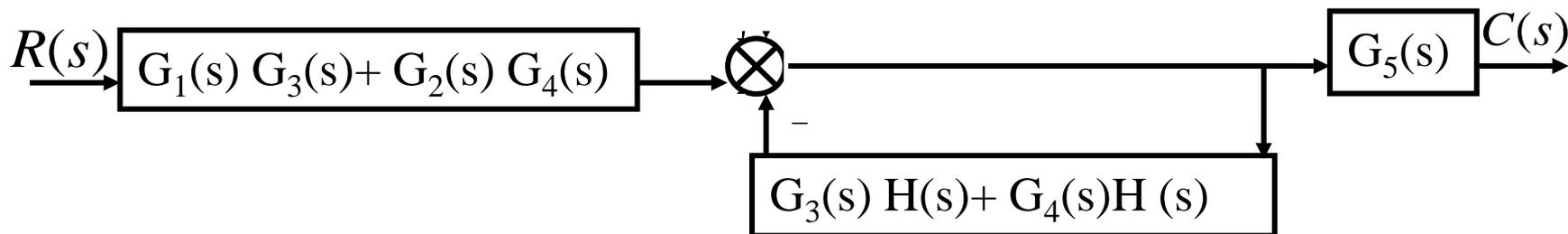


解：

- (1) 将 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 之间的相加点前移、分支点后移；
- (2) 将三条并联的反馈通路等效化简；
- (3) 求单反馈回路的综合传递函数，即系统传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

例：试简化图示方框图，并求系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

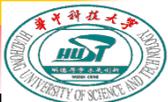
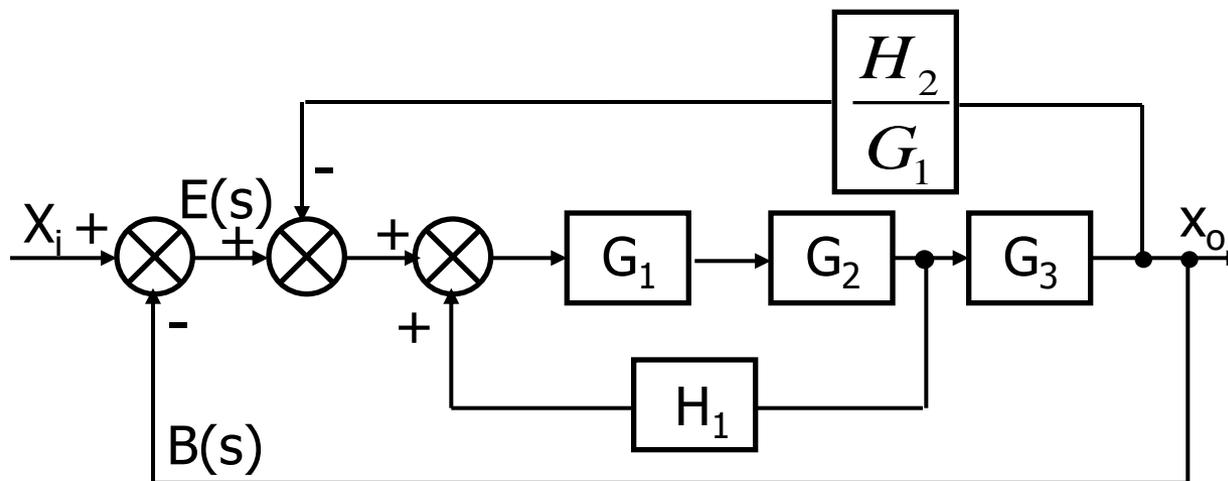
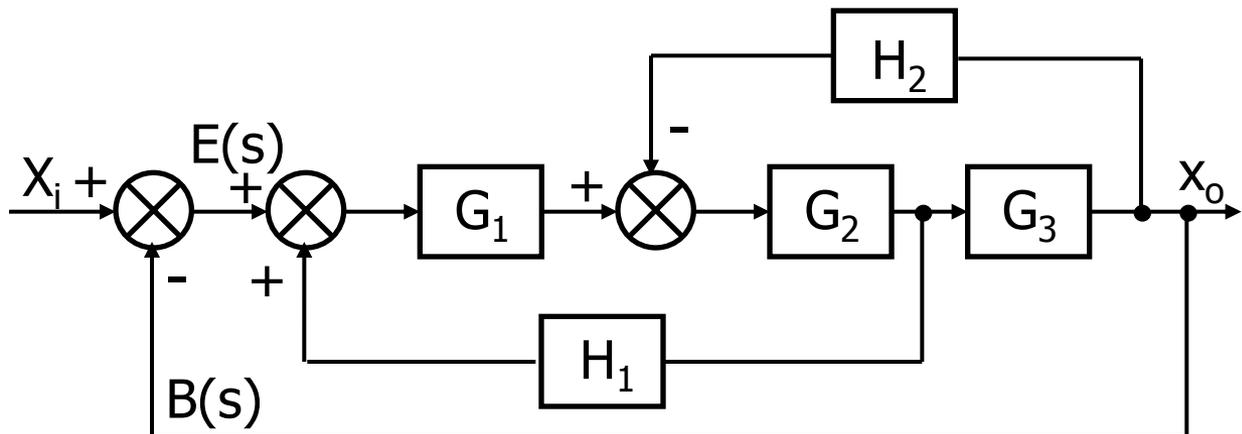


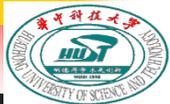
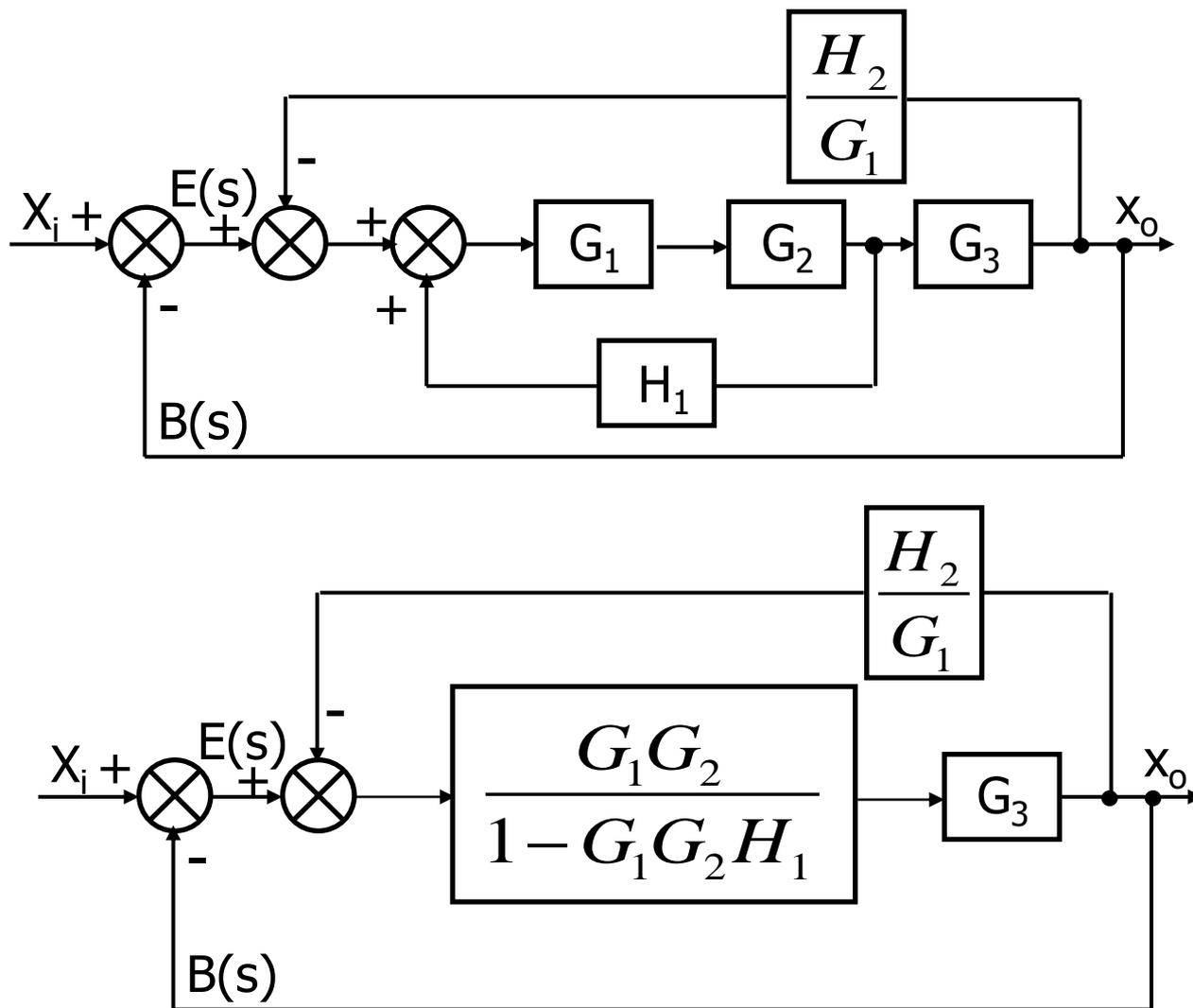
解：

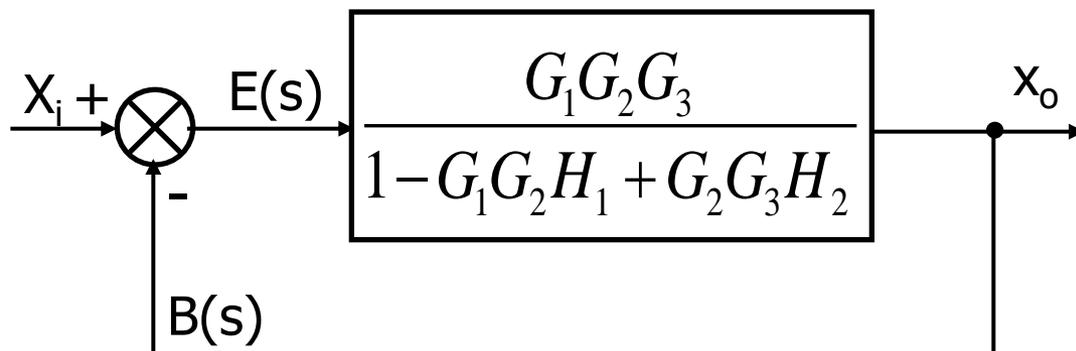
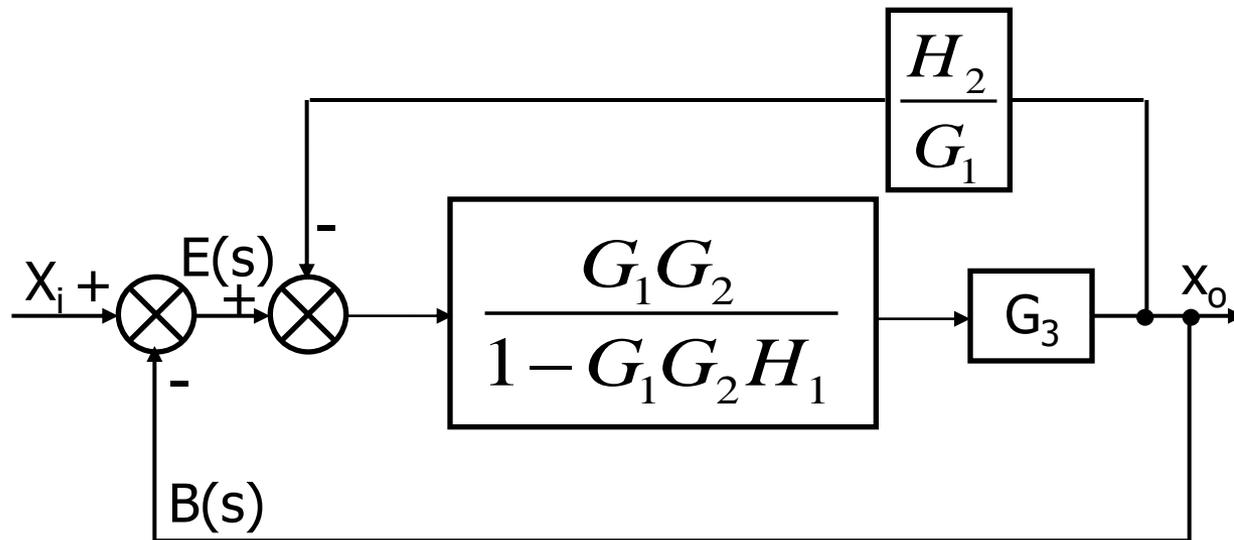
- (1) 将 $G_1(s)$ 和 $G_3(s)$ 、 $G_2(s)$ 和 $G_4(s)$ 之间的比较点后移；
- (2) 将 $H(s)$ 后的两个引出点移到 $H(s)$ 之前；
- (3) 由于三个比较点之间无框图，可以合并。
- (4) 进行串、并联等效变换。
- (5) 求得系统的综合传递函数为：

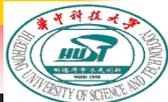
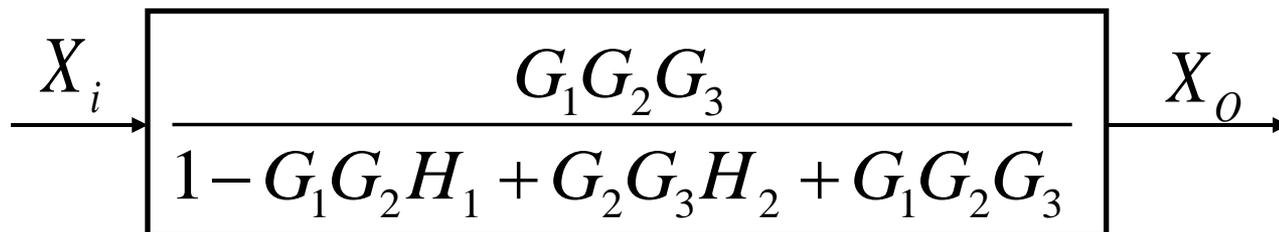
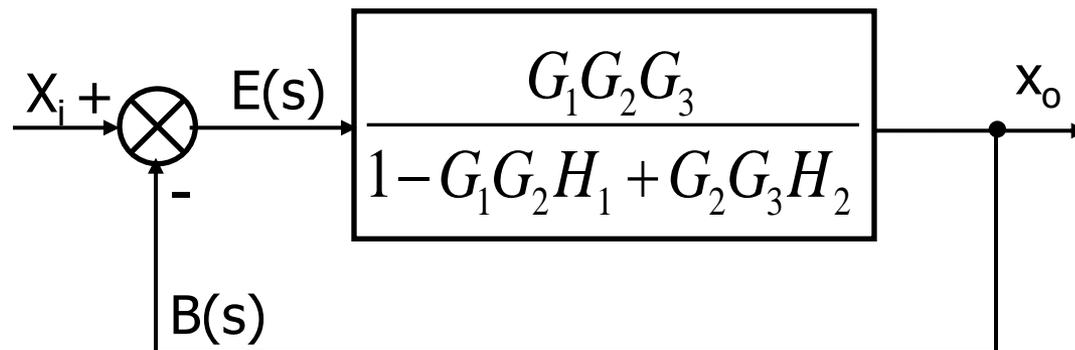
$$\frac{C(s)}{R(s)} = (G_1(s)G_3(s) + G_2(s)G_4(s)) \cdot \frac{1}{1 + G_3(s)H(s) + G_4(s)H(s)} \cdot G_5(s)$$

简化下列系统传递函数方框图？









对于上例：

前向通道：

一条： $G_1 G_2 G_3$

反馈回路：

L1: G_1, G_2, G_3

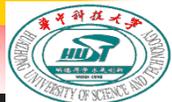
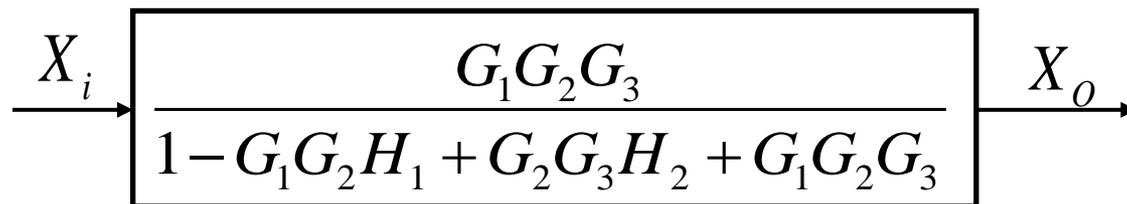
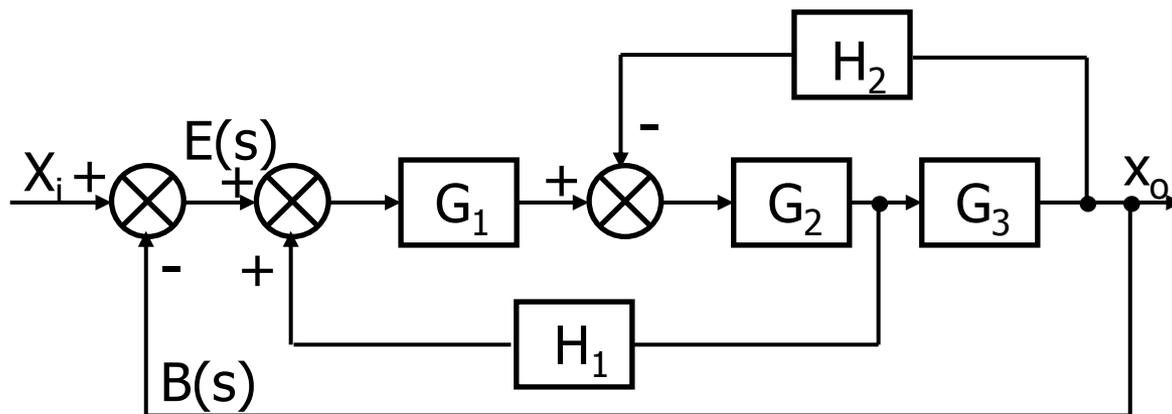
相加点处“-”

L2: G_1, G_2, H_1

相加点处“+”；

L3: G_2, G_3, H_2 相加点处“-”。

各反馈回路有公共传递函数方框 G_2



梅逊公式：

当一个系统函数方框图满足如下两个条件：

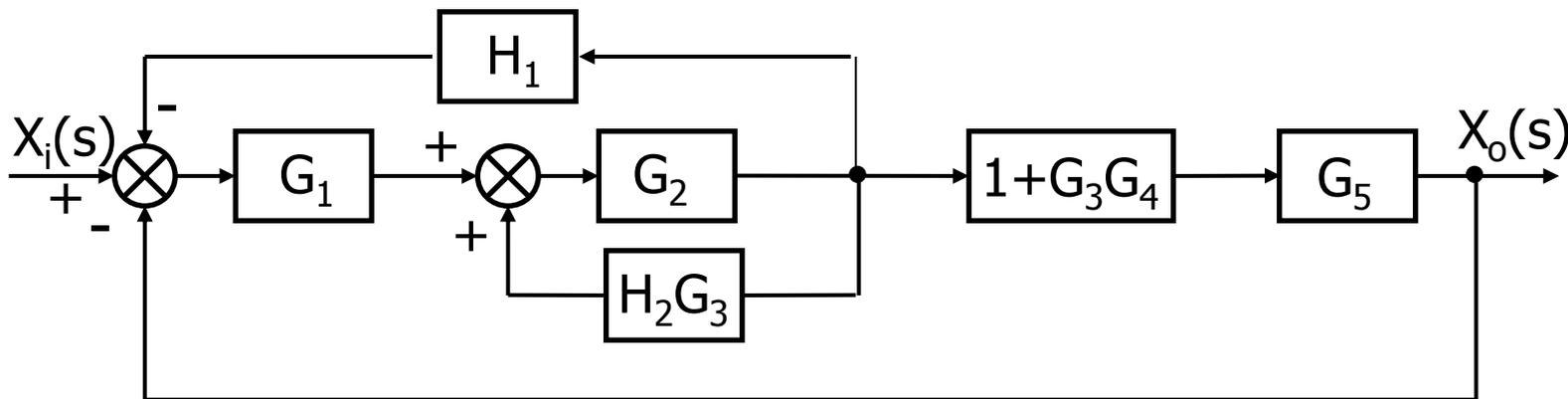
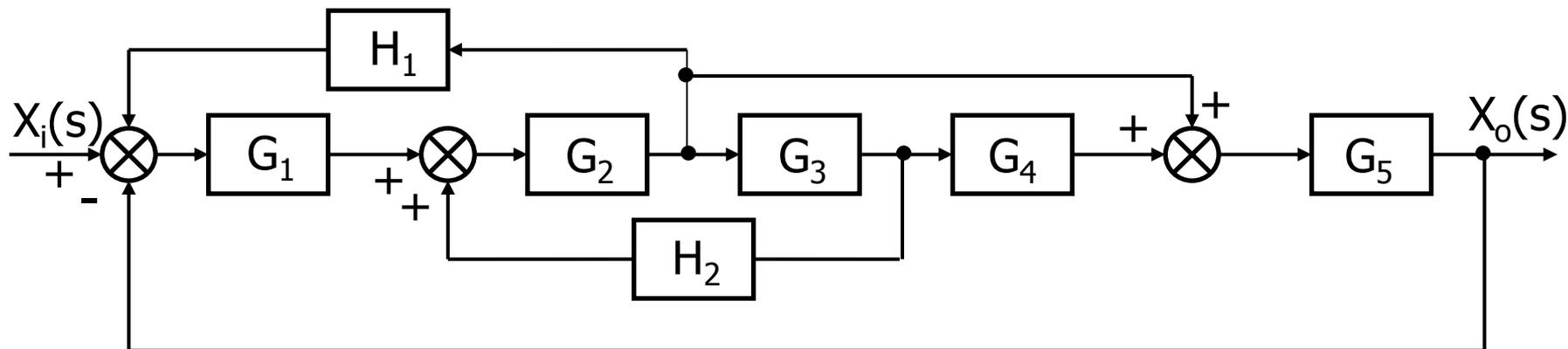
- 1) 只有一条前向通道；
- 2) 各局部反馈回路中包含公共传递函数方框。

则系统闭环传递函数可简化成：

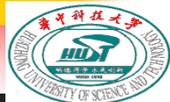
$$G_B(s) = \frac{\text{前向通道的传递函数之积}}{1 - \sum [\text{每一反馈回路开环传递函数}]}$$



简化下列系统传递函数方框图



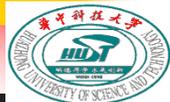
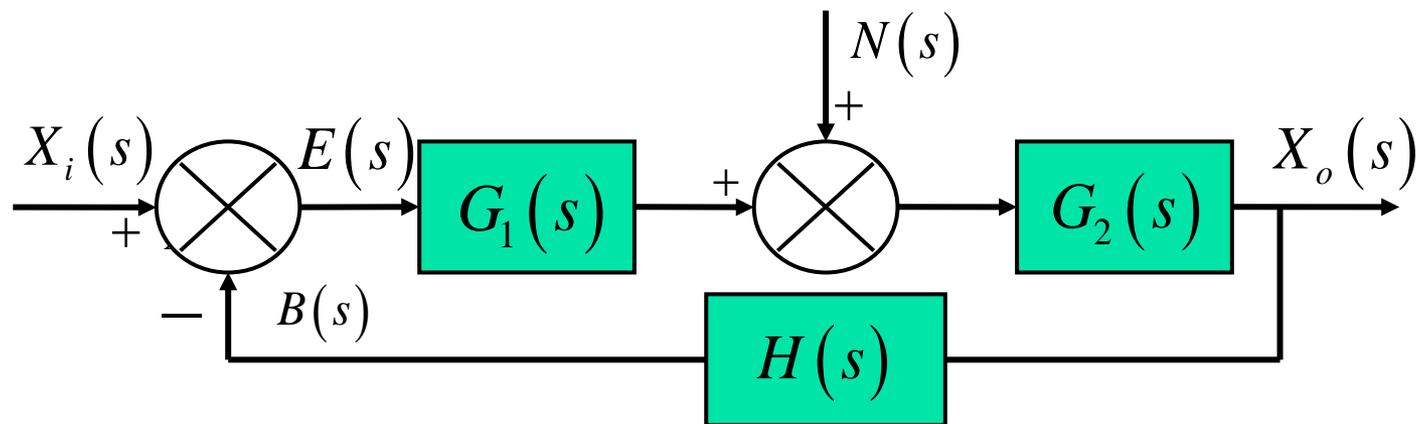
$$G_B(s) = \frac{G_1 G_2 G_5 (1 + G_3 G_4)}{1 + G_1 G_2 H_1 + (1 + G_3 G_4) G_1 G_2 G_5 - G_2 G_3 H_2}$$



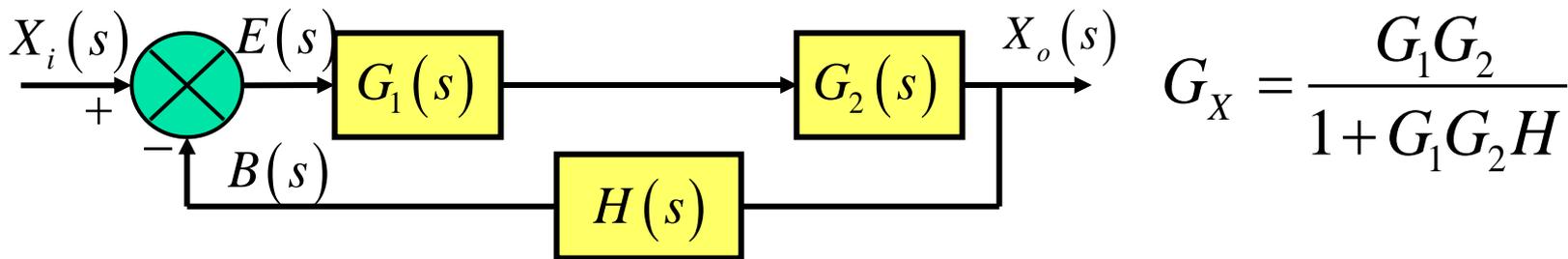
2.8 闭环控制系统的传递函数

当多个输入同时作用于线性系统时, 应分别考虑每个输入的影响.

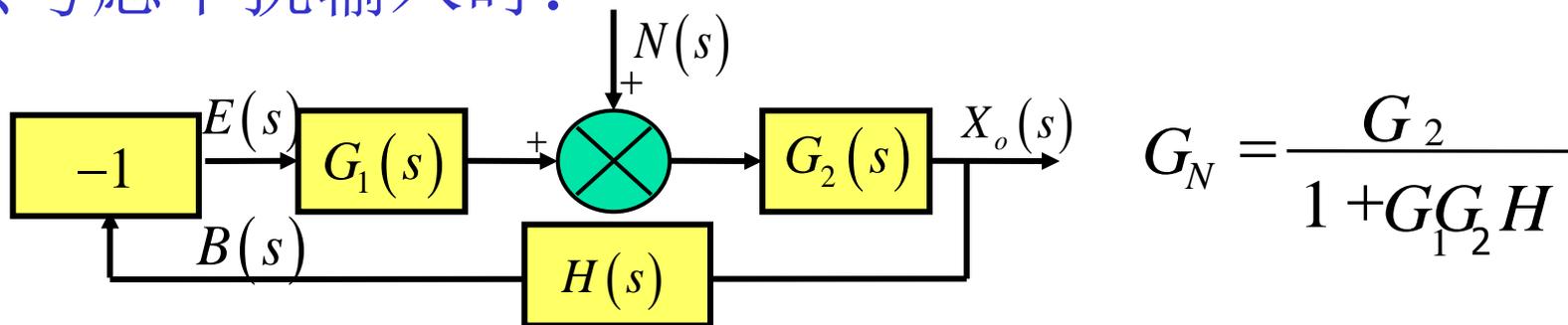
如有一线性系统给定输入和扰动同时存在:



只考虑给定输入时:

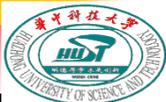


只考虑干扰输入时:



系统总的输出量:

$$X_o = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} X_i + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} N$$



对于系统的总输出量：

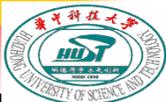
$$X_o = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} X_i + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} N$$

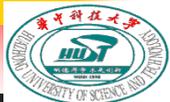
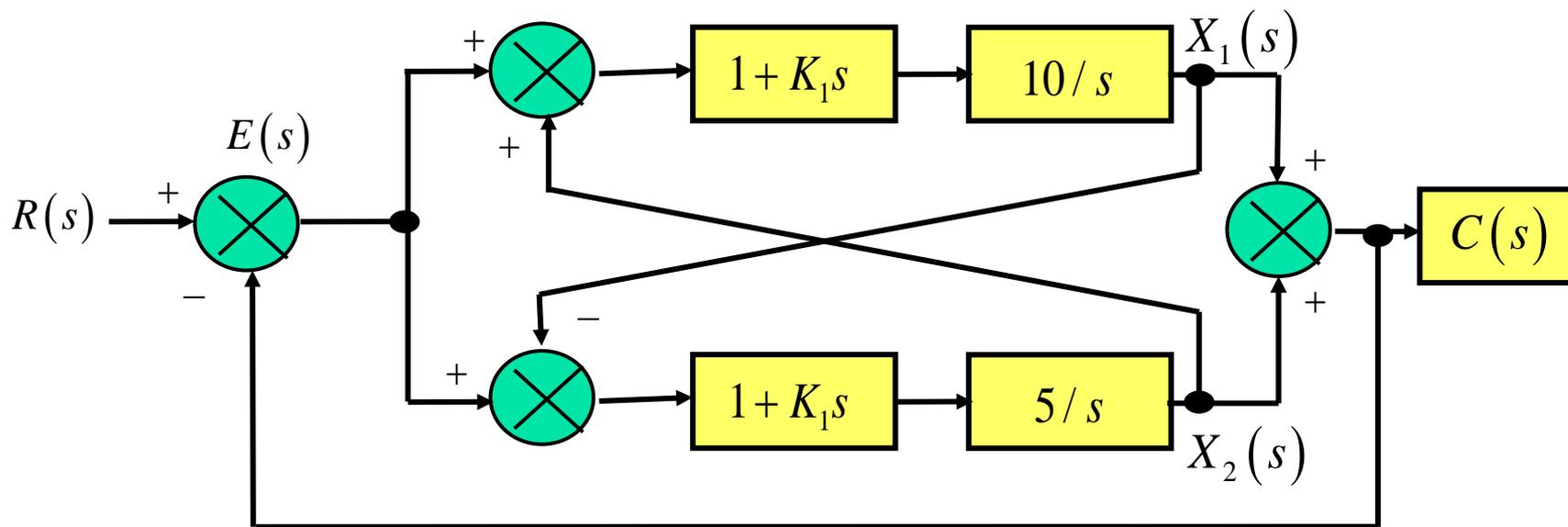
若 $|G_1 G_2 H| \gg 1$ ，且 $|G_1 H| \gg 1$ ，

$$\text{则 } X_o \approx \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} X_i + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} N \approx \frac{1}{H} X_i$$

说明：1. 闭环系统具有抑制干扰的能力。

2. 闭环系统的输入输出取法不同时，其传函不同，但传函的分母不变；而开环系统则不然。





$$\begin{cases} X_1 = G_1 G_2 (E + X_2) \\ X_2 = G_3 G_4 (E - X_1) \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{G_1 G_2 (1 + G_3 G_4)}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4} E$$

$$X_2 = \frac{G_3 G_4 (1 - G_1 G_2)}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4} E$$

$$\frac{X_1 + X_2}{R} = \frac{G_1 G_2 + G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{G_1 G_2 + G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4}}{1 + \frac{G_1 G_2 + G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4}} = \frac{G_1 G_2 + G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

