高三阶段性抽测一

数学

2020.10

注意事项：1. 本试卷共150分，考试时间120分钟；

2. 答题前，请务必将自己的姓名、学校、考试号写在答卷纸的规定区域内；

3. 答题时必须使用0.5毫米黑色签字笔书写，作图可用2B铅笔.

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}, e^x>x$”的否定是

A. $\forall x\in\mathbf{R}, e^x\leqslant x$　　B. $\forall x\notin\mathbf{R}, e^x>x$

C. $\exists x\in\mathbf{R}, e^x\leqslant x$　　D. $\exists x\in\mathbf{R}, e^x>x$

2. 函数 $f(x)=2x^2-\ln x$ 的单调递减区间为

A. $(-2,2)$　　B. $(0,2)$　　C. $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　D. $(0,\frac{1}{2})$

3. 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\left\{x\left|\frac{2x-1}{x-2}\leqslant 1\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

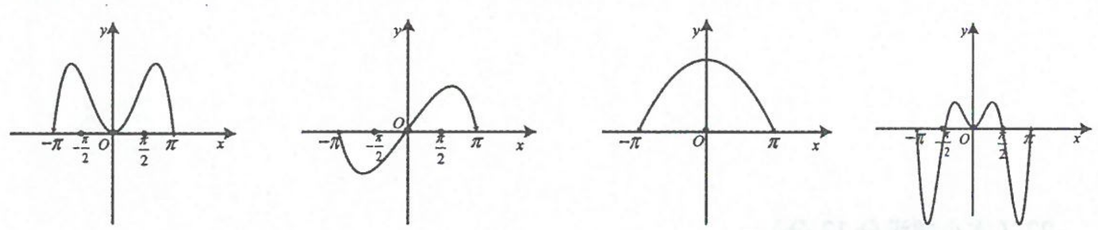
A. $[1,2)$　　B. $[1,2]$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

4. “$\log_2(2x-3)<1$”是“$4^x<32$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. 函数 $y=(2^x-2^{-x})\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

6. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$，记 $a=f(-\ln 3)$，$b=f(3\log_8 5)$，$c=f(2^m)$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

7. 已知函数 $f(x)=1+\log_a(x-2)\ (a>0, a\neq 1)$ 的图象经过定点 $A(m,n)$，若正数 x,y 满足 $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=1$，则 $\frac{x}{y}+x+2y$ 的最小值是

A. 5　　B. 10　　C. $5+3\sqrt{3}$　　D. $5+4\sqrt{3}$

8. 若直角坐标平面内两点 P、Q 满足条件：①P、Q 都在函数 $f(x)$ 的图象上；②P、Q 关于原点对称，则称点对 (P,Q) 是函数 $f(x)$ 的“友好点对”. 若定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=4^x-m\cdot 2^{x+1}+m^2-3$ 存在“友好点对”，则实数 m 的取值范围是

A. $1-\sqrt{3}\leqslant m\leqslant 1+\sqrt{3}$　　B. $1-\sqrt{3}\leqslant m\leqslant 2\sqrt{2}$

C. $-2\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 2\sqrt{2}$　　D. $-2\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 1-\sqrt{3}$

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共计20分. 每小题给出的四个选项中，都有多个选项是正确的，全部选对的得5分，选对但不全的得3分，选错或不答的得0分. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

9. 下列结论正确的有

A. 若 $10=\lg x$，则 $x=100$　　B. 函数 $y=(1-x)^{-\frac{3}{2}}$ 的定义域为 $(-\infty,1)$

C. 若 $2^a=3^b=m$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则 $m=\sqrt{6}$　　D. 函数 $y=2x-\sqrt{x-1}$ 的值域为 $[2,+\infty)$

10. 已知 $a>0, b>0$，且 $a+b=1$，则

A. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$　　B. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

11. 已知函数 $f(x)$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都满足 $f(x)=-f(6-x)$，$f(x+1)=f(-x+1)$，若 $f(a)=-f(2020)$，$a\in[5,9]$，且 $f(x)$ 在 $[5,9]$ 上为单调函数，则下列结论正确的有

A. $f(3)=0$　　B. $a=8$

C. $f(x)$ 是周期为4的周期函数　　D. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=5$ 对称

12. 函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=e^{-x}(x-1)$，下列结论正确的有

A. 当 $x<0$ 时，$f(x)=e^x(x+1)$

B. 函数 $f(x)$ 有且仅有2个零点

C. 若 $m\leqslant e^{-2}$，则方程 $f(x)=m$ 在 $x>0$ 上有解

D. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$|f(x_2)-f(x_1)|<2$ 恒成立

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共计20分. 请把答案填写在答题卡相应的位置上.

13. 2019年7月，中国良渚古城遗址获准列入世界遗产名录，标志着中华五千年文明史得到国际社会认可. 良渚古城遗址是人类早期城市文明的范例，实证了中华五千年文明史. 考古科学家在测定遗址年龄的过程中利用了“放射性物质因衰变而减少”这一规律. 已知样本中碳14的质量 N 随时间 T（单位：年）的衰变规律满足 $N=N_0\cdot 2^{-\frac{T}{5730}}$（$N_0$ 表示碳14原有的质量），经过测定，良渚古城遗址文物样本中碳14的质量约是原来的 $\frac{3}{7}$，据此推测良渚古城存在的时期距今约＿▲＿年.（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$，$\lg 7\approx 0.84$，$\lg 3\approx 0.48$）

14. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，其导函数为 $f'(x)$，且 $f(\ln x)=x^2-f'(1)\ln x$，则 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为＿▲＿.

15. 已知 $f(x)=x^2-mx+4$，$g(x)=\log_2 x$，若“$\forall x_1\in[1,4]$，$\exists x_2\in[2,4]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立”为真命题，则实数 m 的取值范围是＿▲＿.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\leqslant 0\\ e^x, x>0\end{cases}$，若方程 $[f(x)]^2=a$ 恰有两个不同的实数根 m,n，则 $m+n$ 的最大值是＿▲＿.

四、解答题：本大题共6小题，共计70分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分10分）

已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2-2mx+m^2-4\leqslant 0,x\in\mathbf{R},m\in\mathrm{R}\}$.

（1）若 $A\cap B=[0,3]$，求实数 m 的值；

（2）若 $A\subseteq\complement_{\mathrm{R}}B$，求实数 m 的取值范围.

18.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=3^x+\lambda\cdot 3^{-x}(\lambda\in\mathbf{R})$.

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，求 λ 的值和此时不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)\leqslant 6$ 对 $x\in[0,2]$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

19.（本小题满分12分）

设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax$，$g(x)=2x+b$，当 $x=1+\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 取得极值.

（1）求 a 的值，并判断 $f(1+\sqrt{2})$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值；

（2）当 $x\in[-3,4]$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个公共点，求实数 b 的取值范围.

20.（本小题满分12分）

经市场调查，某商品每吨的价格为 $x(1<x<14)$ 百元时，该商品的月供给量为 y_1 万吨，$y_1=ax+\frac{7}{2}a^2-a(a>0)$；月需求量为 y_2 万吨，$y_2=-\frac{1}{224}x^2-\frac{1}{112}x+1$. 当该商品的需求量大于供给量时，销售量等于供给量；当该商品的需求量不大于供给量时，销售量等于需求量. 该商品的月销售额等于月销售量与价格的乘积.

（1）若 $a=\frac{1}{7}$，问商品的价格为多少时，该商品的月销售额最大？

（2）记需求量与供给量相等时的价格为均衡价格. 若该商品的均衡价格不低于每吨6百元，求实数 a 的取值范围.

21.（本小题满分12分）

设函数 $f(x)=x|x-m|+n$.

（1）当 $n=0$ 时，试讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

（2）当 $m=1,n>0$ 时，求函数 $y=f(x)$ 在 $[0,n]$ 上的最大值；

22.（本小题满分12分）

设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，$g(x)=x^2+4$.

（1）讨论 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性；

（2）令 $h(x)=g(x)-4f(x)$，试证明 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有三个零点.

高 三 阶 段 性 抽 测 一

数 学 参 考 答 案

2020.10

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共计40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	A	A	C	D	B

二、多项选择题:本大题共4小题,每小题5分,共计20分.

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	ABD	AD

三、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共计20分.

13. 6876 14. $e^2x-y-e^2=0$ 15. $(-\infty,2\sqrt{3})$ 16. $3\ln2-2$

四、解答题:本大题共6小题,共计70分.

17.(本小题满分10分)

解:由已知得:$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x\mid m-2\leqslant x\leqslant m+2\}$. ……………… 2分

(1)$\because A\cap B=[0,3]$,$\therefore \begin{cases}m-2=0,\\ m+2\geqslant 3,\end{cases}$ ……………… 4分

$\therefore \begin{cases}m=2,\\ m\geqslant 1.\end{cases}$ $\therefore m=2$. ……………… 5分

(2)$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<m-2,或x>m+2\}$ ……………… 7分

$\because A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$,$\therefore m-2>3$ 或 $m+2<-1$, ……………… 9分

$\therefore m>5$ 或 $m<-3$. ……………… 10分

18.(本小题满分12分)

解:(1)函数 $f(x)=3^x+\lambda\cdot 3^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

$\because f(x)$ 为奇函数,$\therefore f(-x)+f(x)=0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

即 $3^{-x}+\lambda\cdot 3^x+3^x+\lambda\cdot 3^{-x}=(\lambda+1)(3^x+3^{-x})=0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

$\therefore \lambda=-1$. ……………… 3分

此时 $f(x)=3^x-3^{-x}>1$ 即 $(3^x)^2-3^x-1>0$,

解得 $3^x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $3^x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去), ……………… 5分

$\therefore$ 解集为 $\left\{x\mid x>\log_3\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. ……………… 6分

(2)由 $f(x)\leqslant 6$ 得 $3^x+\lambda\cdot 3^{-x}\leqslant 6$,即 $3^x+\frac{\lambda}{3^x}\leqslant 6$,

令 $t=3^x\in[1,9]$,原问题等价于 $t+\frac{\lambda}{t}\leqslant 6$ 对 $t\in[1,9]$ 恒成立,

亦即 $\lambda\leqslant -t^2+6t$ 对 $t\in[1,9]$ 恒成立, ……………… 9分

令 $g(t)=-t^2+6t$,$t\in[1,9]$,

$\because g(t)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增,在 $[3,9]$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $t=9$ 时,$g(t)$ 有最小值 $g(9)=-27$,$\therefore \lambda\leqslant -27$. ……………… 12分

19.(本小题满分12分)

解:(1)由题意 $f'(x)=x^2-2x+a$

$\because$ 当 $x=1+\sqrt{2}$ 时,$f(x)$ 取得极值,$\therefore$ 所以 $f'(1+\sqrt{2})=0$

$\therefore (1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})+a=0$ $\therefore a=-1$ ……………… 2分

此时当 $x<1+\sqrt{2}$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>1+\sqrt{2}$ 时,$f'(x)>0$,

$\therefore f(1+\sqrt{2})$ 是函数 $f(x)$ 的极小值. ……………… 4分

(2)设 $f(x)=g(x)$,整理得 $\frac{1}{3}x^3-x^2-3x=b$,设 $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$,$G(x)=b$,

$F'(x)=x^2-2x-3$,令 $F'(x)=x^2-2x-3=0$ 解得 $x=-1$ 或 $x=3$ ……………… 7分

列表如下:

x	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,4)$	4
$F'(x)$		+	0	—	0	+	
$F(x)$		↗		↘		↗	

又 $F(-3)=-9$,$F(-1)=\frac{5}{3}$,$F(3)=-9$,$F(4)=-\frac{20}{3}$ ……………… 10分

$\because$ 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个公共点,$\therefore$ 函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的图象有两个公共点,

$\therefore -\frac{20}{3}<b<\frac{5}{3}$ 或 $b=-9$. ……………… 12分

20.(本小题满分12分)

解:(1)若 $a=\frac{1}{7}$,由 $y_2>y_1$,得 $-\frac{1}{224}x^2-\frac{1}{112}x+1>\frac{1}{7}x+\frac{7}{2}\times\left(\frac{1}{7}\right)^2-\frac{1}{7}$.

解得 $-40<x<6$. ……………… 2分

因为 $1<x<14$,所以 $1<x<6$.

设该商品的月销售额为 $g(x)$,则 $g(x)=\begin{cases}y_1\cdot x,1<x<6,\\ y_2\cdot x,6\leqslant x<14.\end{cases}$ ……………… 4分

当 $1<x<6$ 时,$g(x)=\frac{1}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)x<g(6)=\frac{33}{7}$. ……………… 5分

当 $6\leqslant x<14$ 时,$g(x)=\left(-\frac{1}{224}x^2-\frac{1}{112}x+1\right)x$,

则 $g'(x)=-\frac{1}{224}(3x^2+4x-224)=-\frac{1}{224}(x-8)(3x+28)$,由 $g'(x)>0$,得 $x<8$,

所以 $g(x)$ 在 $[6,8)$ 上是增函数,在 $(8,14)$ 上是减函数,

当 $x=8$ 时,$g(x)$ 有最大值 $g(8)=\frac{36}{7}$. ……………… 7分

(2)设 $f(x)=y_1-y_2=\frac{1}{224}x^2+\left(\frac{1}{112}+a\right)x+\frac{7}{2}a^2-1-a$,

因为 $a>0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(1,14)$ 上是增函数.

若该商品的均衡价格不低于6百元,即函数 $f(x)$ 在区间 $[6,14)$ 上有零点, ……… 9分

所以 $\begin{cases}f(6)\leqslant 0,\\ f(14)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}7a^2+10a-\frac{11}{7}\leqslant 0,\\ \frac{7}{2}a^2+13a>0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\frac{1}{7}$. ……………… 11分

答：(1) 若 $a=\frac{1}{7}$，商品的每吨价格定为8百元时，月销售额最大；(2) 若该商品的均衡价格不低于每吨6百元，实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{7}]$. ………………………… 12分

21.（本小题满分12分）

解：(1) $f(x)=x|x-m|$，定义域为 $\mathbf{R}$.

当 $m=0$ 时，$f(x)=x|x|$，

$\because$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$，

$\therefore f(x)$ 为奇函数；………………………………………………………………… 2分

当 $m\neq0$ 时，$f(x)=x|x-m|$，

对于给定的 m，$f(m)=0$，$f(-m)=-m|2m|\neq0$，

$\because f(-m)\neq f(m)$ 且 $f(-m)\neq-f(m)$，

$\therefore f(x)$ 为非奇非偶函数；

综上所述，当 $m=0$ 时，$f(x)$ 为奇函数；

当 $m\neq0$ 时，$f(x)$ 为非奇非偶函数. ………………………………………………… 4分

(2) 由题意，$f(x)=x|x-1|+n$，$x\in[0,n]$

①若 $0<n\leqslant1$，则 $f(x)=x(1-x)+n=-x^2+x+n=-(x-\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{4}$，$x\in[0,n]$

(i) $0<n\leqslant\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $[0,n]$ 上单调递增，$\therefore f(x)_{\max}=f(n)=-n^2+2n$；

(ii) $\frac{1}{2}<n\leqslant1$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上单调递增，在 $[\frac{1}{2},n]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(\frac{1}{2})=n+\frac{1}{4}$. ………………………………………………… 6分

②若 $n>1$，则 $f(x)=\begin{cases}x(1-x)+n, x\in[0,1]\\ x(x-1)+n, x\in(1,n]\end{cases}$，

(i) 当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x(1-x)+n=-x^2+x+n=-(x-\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{4}$，

$\because n>1$，$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上单调递增，在 $[\frac{1}{2},1]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(\frac{1}{2})=n+\frac{1}{4}$. ………………………………………………… 8分

(ii) 当 $x\in(1,n]$ 时，$f(x)=x(x-1)+n=x^2-x+n=(x-\frac{1}{2})^2+n-\frac{1}{4}$，

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $(1,n]$ 上单调递增，$\therefore f(x)_{\max}=f(n)=n^2$.

由 $n^2\geqslant n+\frac{1}{4}$ 得 $n^2-n-\frac{1}{4}\geqslant0$，又 $n>1$，$\therefore n\geqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=n^2$；当 $1<n<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=n+\frac{1}{4}$. ………… 10分

综合①和②可知：当 $0<n\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=-n^2+2n$；当 $\frac{1}{2}<n<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=n+\frac{1}{4}$；当 $n\geqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=n^2$. ……………………………… 12分

22.（本小题满分12分）

解：(1) $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，

令 $f'(x)=0$，$\because x\in[-\pi,\pi]$，$\therefore x=0$ 或 $x=\pm\frac{\pi}{2}$，……………………………… 2分

故 $x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减……… ……………………………………………………………………… 4分

(2) $h(x)=x^2+4-4x\sin x-4\cos x$，$h(0)=0$，$\therefore x=0$ 是 $h(x)$ 的一个零点，………… 5分

$h(-x)=(-x)^2+4-4(-x)\sin(-x)-4\cos(-x)=x^2+4-4x\sin x-4\cos x=h(x)$，

$\therefore h(x)$ 是偶函数，……………………………………………………………… 6分

$\therefore$ 要确定 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的零点个数，只需确定 $x>0$ 时，$h(x)$ 的零点个数即可.

①当 $x>0$ 时，$h'(x)=2x-4x\cos x=2x(1-2\cos x)$，

令 $h'(x)=0$，即 $\cos x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbf{N})$，……………………… 7分

$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$h\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$，

$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$h\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{25}{9}\pi^2+\frac{10\sqrt{3}}{3}\pi+2>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{3}\right)$ 有唯一零点. ……………………………………………… 9分

②当 $x\geqslant\frac{5}{3}\pi$ 时，由于 $\sin x\leqslant1$，$\cos x\leqslant1$，

$h(x)=x^2+4-4x\sin x-4\cos x\geqslant x^2+4-4x-4=x^2-4x=t(x)$，

而 $t(x)$ 在 $\left(\frac{5}{3}\pi,+\infty\right)$ 单调递增，$t(x)\geqslant t\left(\frac{5}{3}\pi\right)>0$，

$\therefore h(x)>0$ 恒成立，故 $h(x)$ 在 $\left(\frac{5}{3}\pi,+\infty\right)$ 无零点，……………………………… 11分

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有一个零点，

由于 $h(x)$ 是偶函数，$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 有一个零点，而 $h(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有3个零点. ……………………………………………… 12分