非奇H矩阵的判定和迭代法的收敛性分析

摘 要

非奇H矩阵是一类很重要的特殊矩阵，在矩阵理论和实际应用中具有重要意义。它在计算数学、数学物理、控制系统的稳定性等领域中有着广泛的应用。本文研究了非奇H矩阵的判定问题，改进了近期的一些结果，并给出了一个新判据。同时研究了AOR和GAOR迭代法的收敛性问题和迭代矩阵特征值模的上界问题。本文共分为四个部分：

第一部分为绪论和预备知识，主要介绍了论文的研究背景、本文的主要工作以及相关的基础知识。

第二部分主要研究了非奇H矩阵的判定问题。在3.1节中，我们改进了文献[8]中的结果，并通过引进一类新的矩阵，得到了一个新的充分条件。在3.2节中，我们基于和α对角占优矩阵给出了非奇H矩阵的新判据，所得的结果包含了文献[9]中结果。

第三部分主要研究了AOR和GAOR迭代法的收敛性问题。4.1节我们以系数矩阵是双α对角占优矩阵为基础，研究了AOR迭代法的收敛性问题。我们首先给出了迭代阵谱半径的新上界，然后根据所求的上界来分析了AOR迭代法的收敛性。4.2节我们研究了系数矩阵是和α对角占优矩阵的GAOR迭代法的收敛性问题。

第四部分主要研究了基于双α对角占优矩阵的迭代法的迭代矩阵特征值模的上界。

关键词： 和α对角占优矩阵 双α对角占优矩阵 AOR迭代法 GAOR迭代法 收敛性 特征值模

THE CRITERION OF NONSINGULAR H-MATRIX AND THE CONVERGENCE ANALYSIS OF ITERATION METHOD

ABSTRACT

Nonsingular H-matrix is an important special class of matrices, which plays an important role in matrix theories and applications, such as computational mathematics, mathematical physics, convergence of iteration method, stability of control systems and so on. In this paper, we study the criterion of H-matrix, convergence of AOR and GAOR iteration methods and the upper bound for module of eigenvalue of iteration matrix. This paper mainly includes four parts:

Part one is mainly about the background of this paper, the works we have done and the introduction of H-matrix and iteration method.

Part two is about the criterions of nonsingular H-matrix. In 3.1, we improve the results in paper[8] and obtain a new criterion. In 3.2, we obtain new criterions of nonsingular H-matrix which includes the results of paper[9] according to sum α diagonally dominant matrix.

Part three is mainly about the convergence of iteration method. In 4.1, we study the convergence of AOR iteration method whose coefficient matrix is a double α diagonally dominant matrix. Firstly, we obtain new bound of the iteration matrix, then we analyze the convergence of AOR method. In 4.2, we analyze the convergence of GAOR iteration method whose coefficient matrix is a sum α diagonally dominant matrix.

Part four is mainly about the upper bounds for the module of eigenvalue of iteration matrix based on double α diagonally dominant matrix.

KEY WORDS: sum α diagonally dominant matrix　double α diagonally dominant matrix　AOR method　GAOR method　convergence module of eigenvalue

符号说明

$<n>$	自然数集合$\{1,2,\cdots,n\}$
$A=(a_{ij})$	矩阵
$M_n(R)$	n阶实矩阵的集合
$M_n(C)$	n阶复矩阵的集合
I	单位矩阵
$A\geq 0$	矩阵A是非负矩阵
$A>0$	矩阵A是正矩阵

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含本人已用于其他学位申请的论文或成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

本人签名：问浩　　　日期：2009年6月13日

关于论文使用授权的说明

本学位论文作者完全了解青岛科技大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权学校可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人离校后发表或使用学位论文或与该论文直接相关的学术论文或成果时，署名单位仍然为青岛科技大学。(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

本学位论文属于：

保密 □，在　　年解密后适用于本声明。

不保密□。

(请在以上方框内打“√”)

本人签名：问浩　　　日期：2009年6月13日

导师签名：　　　日期：2009年6月13日

1 绪论

1.1 选题背景

源自研究线性方程组的系数问题，数学家们首先发展了“行列式”而不是“矩阵”。“矩阵”作为专业的数学术语，于1848年Sylvester首次引入使用。矩阵代数起源于1855年A.Cayley关于线性变换的工作，矩阵代数和行列式也因此而建立起了联系来。1888年Peano引入了向量空间的现代定义后，人们更多关注与向量的研究。矩阵也被视为一种非常有用的记号，开头热衷的一阵之后便很少对矩阵进行研究了[1]。矩阵理论和方法发展的黄金时期是：20世纪40年代以后，高速计算机的问世和科学计算方法的不断涌现。由于利用矩阵理论与方法来处理错综复杂的问题时，具有描述问题表达简洁，对问题的实质刻画深刻等优点，因此引起了许多数学学者、工程技术人员和科技人员广泛参与的兴趣。众多数学学者参与为矩阵理论的发展提供了有力的智力支持，而工程技术人员和科技人员的加入又为矩阵理论和方法的应用开辟了广阔的前景[2]。

特殊矩阵是具有特殊性质或特殊结构的一类矩阵，在许多实际问题中具有广泛的应用。如在均衡论、投入产出分析的研究中产生的M矩阵；在控制论及神经网络系统的稳定性、线性时滞系统的稳定性研究中需要H矩阵及正稳定阵的理论；在求解大型线性方程组中单调矩阵有着广泛的应用等等[2]。

H矩阵是近年来计算数学研究的较为热门的一种特殊矩阵，目前对它的研究主要集中在两个方面：一是研究它本身的数学性质；二是研究与它有关的迭代矩阵的谱半径的估计、收敛性分析以及计算机算法。自A. M. Ostrowski首先提出了H矩阵的定义并研究了它的一些简单性质以来，有众多学者在此基础上又给出了许多优美的性质，如H矩阵的一个更为直观的定义是其比较矩阵为M矩阵，这个性质表明了对H矩阵研究有助于揭示M矩阵的性质。通过研究矩阵元素之间的关系来研究H矩阵是研究其性质的一种重要的方法，因此学者们定义了对角占优矩阵、广义对角占优矩阵等。在研究它们的性质时，证明广义对角占优矩阵与非奇H矩阵是一个等价的概念。这样从不同的角度不同的问题背景下提出的两种概念在纯数学上是等价的，这为矩阵理论的研究与发展奠定了宽厚的基础[2]。随着研究的不断深入人们又

定义了和α对角占优矩阵、非零元素链对角占优矩阵、链α对角占优矩阵、双对角占优矩阵、双α对角占优矩阵等概念，这些概念为我们研究非奇H矩阵的判定和迭代法的收敛性分析提供了理论基础。

为求得一个给定线性方程组的解，我们经常选用合适的迭代方法求其近似解。对于系数矩阵为严格对角占优矩阵，当方程组的阶数较底时，人们常常选用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法；而当方程组的阶数较高时，这两种方法的收敛速度较慢。因此许多学者便提出了收敛速度更快的 JOR、SOR、MSOR、AOR SAOR、GAOR、SSOR、TOR 等方法。这些方法或含有一个参数或含多个参数，而参数的选择范围对最优参数的选取具有重要的意义[2]。前人对 AOR 和 GAOR 迭代法作了些研究，但是，其研究方法或局限于严格对角占优的条件，或局限于双严格对角占优矩阵条件。因此在使用中有一定的局限性，所以本文试图从涵盖范围更广的矩阵----和α对角占优矩阵、双α对角占优矩阵等条件下来研究它们的参数收敛范围或特征值模的上界，得到了比较好的结果。

1.2 本文的主要工作

本文首先给出了非奇H矩阵的两个新判据，随后研究了基于严格双α对角占优矩阵的 AOR 迭代法的收敛性问题、基于严格和α对角占优矩阵的 GAOR 迭代法的收敛性问题，最后给出了基于严格双α对角占优矩阵的迭代法的迭代矩阵特征值模的上界。

2 预备知识

2.1 H矩阵概述

定义 2.1.1 [1] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，如果

$$a_{ij}\geq 0,\forall i,j\in<n>, \tag{2.1.1}$$

即矩阵A的所有元素非负，则称A为非负矩阵，记为$A\geq 0$。如果$\forall i,j\in<n>$，(2.1.1)式中不等式都严格成立，即A的所有元素都是正的，则称A为正矩阵，记为$A>0$。

设$A=(a_{ij})\in M_n(C),B=(b_{ij})\in M_n(C)$，如果成立$A-B\geq 0$，则记为$A\geq B$。如果成立$A-B>0$，则记为$A>B$。

定义 2.1.2 [3] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若A可表示为$A=sI-B$，其中$s>0,B\geq 0$，则当$s>\rho(B)$时，称A为非奇M矩阵。

定义 2.1.3 [3] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若A满足：

$$a_{ij}\leq 0,\quad \forall i,j\in<n>,i\neq j,$$

则称A为Z矩阵；若$A\in Z$且满足：

$$a_{ii}>0,\quad i\in<n>,$$

则称A为L矩阵。

定理 2.1.1 [3] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，则矩阵A是M矩阵的充分条件是：矩阵A为L矩阵，且$A^{-1}\geq 0$。

定义 2.1.4 [3] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，则A的比较矩阵为$m(A)$，其中

$$m(A)=\begin{cases}|a_{ij}| & i=j\\ -|a_{ij}| & i\neq j\end{cases}。$$

定义 2.1.5 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，A为非奇H矩阵的最为直观的定义是其比较矩

阵$m(A)$为非奇M矩阵。

定义 2.1.6 [3] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若A满足：

$$|a_{ii}|\geq R_i(A),\forall i\in<n>, \tag{2.1.2}$$

且至少有一个$i\in<n>$使$(2.1.2)$式中不等式严格成立，则称A为对角占优矩阵；如果$(2.1.2)$式中n个不等式都严格成立，则称A为严格对角占优矩阵。

定义 2.1.7 [1] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，$n\geq 2$，如果存在$n\times n$置换矩阵P使得：

$$PAP^T=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中A_{11}是$r\times r$子矩阵，A_{22}是$(n-r)\times(n-r)$子矩阵，$1\leq r\leq n$，则称A为可约矩阵。否则，即A是不可约的，称A为不可约矩阵。

定义 2.1.8 [1] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，$n\geq 2$，是不可约矩阵且满足：

$$|a_{ii}|\geq R_i(A),\forall i\in<n>, \tag{2.1.3}$$

且至少存在一个$i\in<n>$使$(2.1.3)$式中不等式严格成立，则称A为不可约对角占优矩阵。

定义 2.1.9 [3] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$满足：

1）$|a_{ii}|\geq R_i(A),\forall i\in<n>$；

2）$J=\{i\in<n>\,|\,|a_{ii}|>R_i(A),\forall i\in<n>\}\neq\varnothing$；

3）对$i\in N\backslash J$，有A的非零元素链$a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}i_k}\neq 0$，其中$i\neq i_1\neq i_2\cdots i_{k-1}\neq i_k$，且$i_k\in J$，则称$A$为具非零元素链对角占优矩阵。

定理 2.1.2 [4] 严格对角占优矩阵、不可约对角占优矩阵或具非零元素链对角占优矩阵是非奇H矩阵。

定义 2.1.10 [4] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若存在正对角矩阵X，使得AX是严格对角占优矩阵，则称A为广义对角占优矩阵，记为$A\in GD$。

定理 2.1.3 [5] A 为非奇 H 矩阵的一个的等价定义是 A 为广义严格对角占优矩阵。

定理 2.1.3 在本文第二章中将发挥重要的作用，是定理证明的重要依据。我们通过对某一给定矩阵左乘（或右乘）一个或两个正对角矩阵，看所得矩阵是否为广义对角占优矩阵来判断给定矩阵是否为非奇 H 矩阵。

2.2 迭代法概述[4]

迭代法一般可表述为：

$$x_k = \varphi_k\left(x_{k-1}, x_{k-2}, \cdots, x_{k-l}\right), k = l, l+1, \cdots \tag{2.2.1}$$

其中 φ_k 称作迭代算子，$x_{k-1}, x_{k-2}, \cdots, x_{k-l}$ 为迭代初值，通常称迭代法 $(2.2.1)$ 为 l 步迭代法；$l=1$ 时，亦称为单步迭代法。如果迭代算子 φ_k 与 k 无关，即 $\varphi_k = \varphi$，则称 $(2.2.1)$ 为定常迭代；否则称为不定常迭代。

下面讨论单步定常迭代法：

$$x_k = Gx_{k-1} + c, k = 1, 2, K, \tag{2.2.2}$$

其中 $G \in R^{n\times n}$ 称为迭代矩阵，x_0 称为初值。

定义 1.3.1 如果存在 $x \in R^n$，使得对任意的初值 $x_0 \in R^n$，由迭代法 $(2.2.2)$ 产生的序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都收敛到 x，即：

$$\lim_{x\to\infty} x_k = x,$$

则称迭代法 $(2.2.2)$ 是收敛的；否则称之为发散的。

如果迭代法 $(2.2.2)$ 是收敛的，则必有：

$$x = Gx + c$$

即：

$$u_k = x_k - x$$

则易证：

$$u_k = G^k u_0 。$$

出此可知，迭代法$(2.2.2)$收敛的充要条件是：

$$\lim_{x\to\infty} G^k = 0 。$$

定理 2.2.1 $[4]$ 迭代法$(2.2.2)$收敛的充要条件是：

$$\rho(G) < 1 。$$

定理 2.2.1 的结论是本文第四章分析迭代法收敛性问题的理论基础。

2.2.1 Jacobi 迭代法

$$A = M_J - N_J ,$$

其中

$$M_J = D, N_J = C_L + C_U ,$$

迭代矩阵为：

$$J = M_J^{-1} N_J = D^{-1}(C_L + C_U)$$

$$= L + U = I - D^{-1}A , \tag{2.2.3}$$

迭代格式为：

$$Dx_k = (C_L + C_U)x_{k-1} + b, k \in <n> 。 \tag{2.2.4}$$

设x_0是一个任意的初始迭代向量，然后由公式$(2.2.4)$作向量序列$x_1, x_2, x_3, \cdots$，这种迭代法称为 Jacobi 迭代法，或简称为 J 方法，矩阵$(2.2.3)$称为对应于矩阵A的迭代矩阵。

2.2.2 Gauss-Seidel 迭代法

对于 Jacobi 迭代法，$(2.2.4)$的分量形式是

$$x_k^i = \sum_{j \neq i} b_{ij} x_k^j + c_i, i \in <n>, \tag{2.2.5}$$

事实上，在计算x_k^i之前$x_k^1, x_k^2, \cdots, x_k^{i-1}$已经计算好了，但是，J 方法中计算$x_k^i$仍旧用

$x_{k-1}^1,x_{k-1}^2,\cdots,x_{k-1}^{i-1}$， 如果改用$x_k^i$代替$x_{k-1}^i\left(j\in\langle n\rangle\right)$，则$(2.2.5)$式变成为

$$x_k^i=\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}x_k^j+\sum_{j=i+1}^{n}b_{ij}x_k^j+c_i,i\in<n>, \tag{2.2.6}$$

这种格式迭代法称为方程组的 Gauss-Seidel 迭代法，简称 GJ 方法。$(2.2.6)$的矩阵形式是：

$$x_k=(I-L)^{-1}Ux_{k-1}+(I-L)^{-1}b, \tag{2.2.7}$$

其中矩阵$(I-L)^{-1}U$称为对应于矩阵A的 Gauss-Seidel 迭代矩阵。

2.2.3 逐次超松弛迭代法（简称为 SOR 迭代法）

A分裂为：

$$A=M_\omega-N_\omega,$$

其中

$$M_\omega=\frac{1}{\omega}D-C_L,N_\omega=\frac{1-\omega}{\omega}D+C_U,$$

ω为非零实数，称为松弛因子。

迭代矩阵为：

$$L_\omega=M_\omega^{-1}N_\omega=(I-\omega L)^{-1}\left((1-\omega)I+\omega U\right),$$

当$\omega=1$时，SOR 迭代法就是 Gauss-Seidel 迭代法。因此适当选取参数ω可望 SOR 迭代法比 Gauss-Seidel 迭代法具有更快的收敛速度。

2.2.4 快速超松弛迭代法（AOR 迭代法）

Hadjidimos 于 1978 年提出了快速超松弛迭代法，其后许多学者对它进行了讨论。AOR 迭代法的迭代矩阵为：

$$M_{\sigma\omega}=(D-\sigma C_L)^{-1}\left[(1-\omega)D+(\omega-\sigma)C_L+\omega C_\omega\right],$$

其中$\omega,\sigma\in R,\omega\neq0$。易知：

当$\omega=\sigma$时，AOR 法即为 SOR 法；当$\omega=\sigma=1$时，AOR 法即为 Gauss-Seidel 法；当$\sigma=0$时，AOR 法即为 JOR 法； 当$\omega=1,\sigma=0$时，AOR 法即为 Jacobi 法。

3 非奇H矩阵的判定

3.1 引言

非奇H矩阵在数学、物理学、经济学等众多领域中有着广泛的应用，但是其判定是非常困难的，因而也引起了很多专家学者的兴趣。近年来，许多学者在非奇H矩阵的简单判据方面做出卓越的贡献，详见文献[6,7,8,9]。研究矩阵元素间的关系来研究非奇H矩阵判据问题，是前人比较常用的研究方法。如在文献[8]中，利用和α对角占优矩阵给出了非奇H矩阵的四个充分条件，在文献[9]中，利用矩阵的元素间的关系判断一个矩阵是否为非奇H矩阵。我们进一步研究发现，文献[8]的结果还不够简洁。在本章的2.2节中，我们指出并改进了文献[8]的结果——得到两个充分条件。并通过引进一类具有非零元素链的矩阵，进一步获得了非奇H矩阵的新的充分条件。在2.3节中，给出了基于和α对角占优矩阵给出非奇H矩阵新的判定条件，所得结果包含了文献[9]中的结果。

定义 3.1.1 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，A为非奇H矩阵的最为直观的定义是其比较矩阵$m(A)=(m_{ij})_{n\times n}$为非奇M矩阵。

定义 3.1.2 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若存在$\alpha\in[0,1]$，使得

$$|a_{ii}|\ge \alpha R_i+(1-\alpha)S_i$$

对$\forall i\in\langle n\rangle$成立，则称$A$为和$\alpha$对角占优矩阵，记$A\in D_0(\alpha)$。若上式中每个不等式都是严格成立的，则称$A$为严格和$\alpha$对角占优矩阵，记为$A\in D(\alpha)$。当$\alpha=1$时，严格和$\alpha$对角占优矩阵即为严格对角占优矩阵。

3.2 非奇H矩阵的判定（一）

记$\lt n\gt =\{1,2,\cdots,n\}$，$N_1,N_2$为$\lt n\gt$的一个划分，即：

$$N_1 \cup N_2 = \lt n\gt, \quad N_1 \cap N_2 = \varnothing 。 \tag{3.2.1}$$

记

$$\alpha_i = \sum_{j\in N_1, j\neq i} |a_{ij}|, \quad \beta_i = \sum_{j\in N_2, j\neq i} |a_{ij}|, \quad \bar{\alpha}_i = \sum_{j\in N_1, j\neq i} |a_{ji}|, \quad \bar{\beta}_i = \sum_{j\in N_2, j\neq i} |a_{ji}|,$$

$$R_i(A) = \sum_{j\neq i} |a_{ij}| = \alpha_i + \beta_i = R_i, \quad S_i(A) = \sum_{j\neq i} |a_{ji}| = \bar{\alpha}_i + \bar{\beta}_i = S_i 。$$

定理 3.2.1 [7] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若$A\in D(\alpha)$，则A为非奇H矩阵。

定理 3.2.2 [8] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若存在N_1,N_2满足(3.2.1)式，$\alpha\in(0,1]$，$x,y\in R^+$使得：

$$\left[|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i\right]^x \left[|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j\right]^y \geq \alpha^{(x+y)}\alpha_j^y\beta_i^x$$

$$i\neq j, i\in N_1, j\in N_2, \tag{3.2.2}$$

且满足下列条件之一：

$$(a)\ \frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\geq 1, x\leq y; \quad (b)\ \frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\leq 1, x\geq y;$$

$$(c)\ \frac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j}\geq 1, x\leq y; \quad (d)\ \frac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j}\leq 1, x\geq y;$$

那么

(I)若(3.2.2)式严格成立，则A为非奇H矩阵。

(II)若A是不可约矩阵，则A为非奇H矩阵。

我们在研读文献[8]时发现下面两点不足：

一、首先，我们指出在文[8]的定理条件中，应加上“$x,y>0$”的条件。事实上，在文[8]的证明中，用到了“由$M_i^x>(\geq)m_j^y$”（文[8]中的(3),(4),(5)式和(6),(7),(8)式），易推知$x,y>0$，因为当$y<0$时，不等式应反向，此时，得不出定理的结果。

二、其次，我们指出文[8]定理的四个充分条件可简化为两个充分条件，即：条

件(b)蕴含条件(d)，条件(c)蕴含条件(a)。

1）我们首先证明条件(b)蕴含条件(d)。当条件(b)成立时，我们有：

$$\left[\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\right]^y \ge \left[\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\right]^x, \qquad (3.2.3)$$

由$(3.2.2)$式知：

$$\left[\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\right]^x \ge \left[\frac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j}\right]^y, \qquad (3.2.4)$$

由$(3.2.3)$和$(3.2.4)$得：

$$\left[\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\right]^y \ge \left[\frac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j}\right]^y,$$

所以 $\dfrac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j} \le \dfrac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i} \le 1$。

即 $\dfrac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j} \le 1$，所以条件$(b)$蕴含条件$(d)$。

2）同理我们可证：条件(c)蕴含条件(a)。

下面我们给出非奇 H 矩阵的一个新的充分条件。

记：$J_1=\{i\in N_1:|a_{ii}|>\alpha R_i+(1-\alpha)S_i\}$，$J_2=\{j\in N_2:|a_{jj}|>\alpha R_j+(1-\alpha)S_j\}$。

定理 3.2.3 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若存在N_1,N_2满足$(3.2.1)$式，$\alpha\in(0,1]$，$x,y\in R^+$ 使得：

$$\left[|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i\right]^x\left[|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j\right]^y \ge \alpha^{(x+y)}\alpha_j^y\beta_i^x$$

$$i\ne j, i\in N_1, j\in N_2, \qquad (3.2.5)$$

$J_1\cup J_2\ne\varnothing$，且对$\forall i\in[N_1-J_1]\cup[N_2-J_2]$，存在非零元素链$a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}k}\ne 0$，使得 $k\in J_1\cup J_2$，其中$i\ne j_1\ne\cdots\ne j_{k-1}\ne k$。

且满足下列条件之一：

$(a)\ 0<\dfrac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\le 1,\quad x\ge y\ge 0;$

$(b)\ \dfrac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j}\ge 1,\quad 0\le x\le y,$

则A为非奇H矩阵。

证明：若满足条件(a)，我们先证明存在正对角矩阵X，使$\tilde{A}=AX\in D_0(\alpha)$，令：

$$M_i^x=\left[\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\right]^x,\quad i\in N_1$$

当$\beta_i=0$时，记$M_i=+\infty, i\in N_1$，$m_j^y=\left[\dfrac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j}\right]^y, j\in N_2$，由式$(3.2.5)$得：

$$\left[\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\right]^x\ge\left[\frac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j}\right]^y \tag{3.2.6}$$

又因为 $0<\dfrac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\le 1$，$x\ge y\ge 0$，所以

$$\left[\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\right]^y\ge\left[\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\right]^x \tag{3.2.7}$$

联立$(3.2.6)$和$(3.2.7)$两式，再开方得：

$$\frac{|a_{ii}|-\alpha\alpha_i-(1-\alpha)S_i}{\alpha\beta_i}\ge\frac{\alpha\alpha_j}{|a_{jj}|-\alpha\beta_j-(1-\alpha)S_j} \tag{3.2.8}$$

即$M_i\ge m_j$，$\forall i\in N_1, j\in N_2$，故存在$d>0$，使得$\max\limits_{j\in N_2} m_j\le d\le\min\limits_{i\in N_1} M_i$，取$X=diag$ $(x_k\mid x_k=1,k\in N_1;x_k=d,k\in N_2)$，$\tilde{A}=AX=(\tilde{a}_{ij})$.于是，由$(3.2.8)$知：

$\forall i\in N_1$，有$|\tilde{a}_{ii}|=|a_{ii}|\ge\alpha\alpha_i+d\alpha\beta_i+(1-\alpha)S_i=\alpha R_i(\tilde{A})+(1-\alpha)S_i(\tilde{A})$;

$\forall j\in N_2$，有$|\tilde{a}_{jj}|=d|a_{jj}|\ge\alpha\alpha_j+d\alpha\beta_j+d(1-\alpha)S_j=\alpha R_j(\tilde{A})+(1-\alpha)S_j(\tilde{A})$。

故$\tilde{A}=AX\in D_0(\alpha)$。

因为$J_1\cup J_2\ne\varnothing$，即至少存在一个$k\in N_1\cup N_2$使得$|\tilde{a}_{kk}|>\alpha R_k(\tilde{A})+(1-\alpha)S_k(\tilde{A})$

成立。如果$\left|\tilde{a}_{kk}\right| \le \alpha R_k\left(\tilde{A}\right)+(1-\alpha)S_k\left(\tilde{A}\right)$，对$\forall i\in[N_1-J_1]\cup[N_2-J_2]$，由假设知$\tilde{A}$的元素中存在非零元素链$a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_lk}\ne 0$，使得$k\in J_1\cup J_2$。据文献[7]中定理 1 知：所以$\tilde{A}$为非奇 H 矩阵，进一步$A$为非奇 H 矩阵。

当A满足条件(b)时，仿照条件(a)的证明过程，我们亦可证得A是非奇 H 矩阵。

3.3 非奇H矩阵的判定（二）

设$A=(a_{ij})\in M_n(C),\alpha\in[0,1]$，用$T(\mathrm{A})$表示$A$的有向图中所有环路的全体。

记

$$R_i(\mathrm{A})=\sum_{j\ne i}|a_{ij}|,\quad S_i(\mathrm{A})=\sum_{j\ne i}|a_{ji}|,\quad i\in<n>=\{1,2,\cdots,n\},$$

$$I(A)=\left\{\nu\in T(A)\,\middle|\,\prod_{i\in\nu}|a_{ii}|\ne\prod_{i\in\nu}R_i(A)\ \text{或}\ \prod_{i\in\nu}|a_{ii}|\ne\prod_{i\in\nu}S_i(A)\right\},$$

$$N_2^\alpha=\left\{i\in<n>\,\middle|\,|a_{ij}|>\alpha R_i(A)+(1-\alpha)S_i(A)\right\},\quad N_1^\alpha=<n>\backslash N_2^\alpha。$$

由定义 3.1.2 知：$\alpha=1$时，严格和α对角占优矩阵即为严格对角占优矩阵，非奇 H 矩阵的主对角线元素全是非零的。因此，在本节中我们总假设矩阵的主对角线元素全是非零的。

引理 3.3.1 [10,11] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C),\alpha\in[0,1]$。若$A$满足下列条件之一：

1) A是严格和α对角占优矩阵；

2) A是不可约和α对角占优矩阵，$\alpha\in(0,1)$且$I(A)\ne\varnothing$；

3) A是和α对角占优矩阵，对每一满足$\left|a_{i_0j_0}\right|=\alpha R_{i_0}(A)+(1-\alpha)S_{i_0}(A)$的足码$i_0$都有非零元素链$a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}i_k}\ne 0$，使得$\left|a_{i_kj_k}\right|>\alpha R_{i_k}(A)+(1-\alpha)S_{i_k}(A)$，其中$i_0\ne i_1\ne\cdots\ne i_{k-1}\ne i_k$。则$A$为非奇 H 矩阵。

若$N_2^\alpha=<n>$，则由引理 3.3.1 知：A是非奇 H 矩阵；若A为非奇 H 矩阵，则必有$N_2^\alpha\ne\varnothing$。因此，我们总可以假设$N_1^\alpha\cup N_2^\alpha=<n>, N_1^\alpha\ne\varnothing, N_2^\alpha\ne\varnothing$。

引理 3.3.2 [5] 设σ,τ是任意的两个非负实数，对于$0\le\alpha\le 1$，则有：

$$\sigma\tau+(1-\alpha)\sigma\ge\tau^{\alpha}\sigma^{(1-\alpha)}。$$

定理 3.3.1 设$A=(a_{ij})\in M_n(C),\alpha\in[0,1]$。若

$$|a_{ii}|>\left(\frac{\sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|x_j}{x_i}\right)\alpha+(1-\alpha)\left(\frac{\sum\limits_{j\ne i}|a_{ji}|y_j}{y_i}\right),\ i\in N_1^{\alpha} \tag{3.3.1}$$

$$|a_{ii}|\ge\alpha\left(\frac{\sum\limits_{j\in N_1^{\alpha}}|a_{ij}|x_j+\sum\limits_{j\in N_2^{\alpha},j\ne i}|a_{ij}|}{x_i}\right)+(1-\alpha)\left(\frac{\sum\limits_{j\in N_1^{\alpha}}|a_{ji}|y_j+\sum\limits_{j\in N_2^{\alpha},j\ne i}|a_{ji}|}{y_i}\right),i\in N_2^{\alpha} \tag{3.3.2}$$

其中$0<x_i,y_i\le 1,\quad i\in\langle n\rangle$。则$A$是非奇H矩阵。

证明：对$\forall i\in N_1^{\alpha}$，我们可以令：

$$b_i=\frac{x_iy_i|a_{ii}|-y_i\alpha\sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|x_j-(1-\alpha)\sum\limits_{j\ne i}|a_{ji}|y_jx_i}{y_i\alpha\sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|x_j+(1-\alpha)\sum\limits_{j\ne i}|a_{ji}|y_jx_i}, \tag{3.3.3}$$

由本文假设和(3.3.1)式可知，$0<b_i<+\infty$，再令：

$$c_i=b_i\frac{\sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|x_j}{\sum\limits_{j\in N_2^{\alpha}}|a_{ij}|},\quad f_i=b_i\frac{\sum\limits_{j\ne i}|a_{ji}|y_j}{\sum\limits_{j\in N_2^{\alpha}}|a_{ji}|}, \tag{3.3.4}$$

当$\sum\limits_{j\in N_2^{\alpha}}|a_{ij}|=0,\ \sum\limits_{j\in N_2^{\alpha}}|a_{ji}|=0$时，记$c_i=+\infty, f_i=+\infty$，由本文假设可得$c_i>0, f_i>0$

记

$$N_x^{\alpha}=\{i\in N_2^{\alpha}\mid x_i=1\},\ N_y^{\alpha}=\{i\in N_2^{\alpha}\mid y_i=1\},$$

则一定存在一个充分小的正数ε，使得：

$$0<\varepsilon<\min\left\{\min_{i\in N_1^{\alpha}}\{c_i\},\min_{i\in N_1^{\alpha}}\{f_i\},\min_{i\in N_2^{\alpha}\setminus N_x^{\alpha}}\{1-x_i\},\min_{i\in N_2^{\alpha}\setminus N_y^{\alpha}}\{1-y_i\}\right\},$$

我们构造正对角矩阵$D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n),E=diag(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，

其中

$$d_i=\begin{cases} x_i & i\in N_1^\alpha \\ x_i & i\in N_x^\alpha \\ x_i+\varepsilon & i\in N_2^\alpha\setminus N_x^\alpha \end{cases},\quad e_i=\begin{cases} y_i & i\in N_1^\alpha \\ y_i & i\in N_y^\alpha \\ y_i+\varepsilon & i\in N_2^\alpha\setminus N_y^\alpha \end{cases}$$

根据引理3.3.1，我们下面只需证明$B=(b_{ij})=EAD$是严格和α对角占优矩阵即可。

对$\forall i\in N_1^\alpha$，根据(3.3.3)式我们得：

$$|a_{ii}|x_iy_i=(1+b_i)\left(\alpha\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_jy_i+(1-\alpha)\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_jx_i\right),\tag{3.3.5}$$

我们分四种情况讨论：

情况一：若$\sum\limits_{j\in N_2^\alpha}|a_{ij}|=\sum\limits_{j\in N_2^\alpha}|a_{ji}|=0$，由(3.3.1)式我们知：

$$\begin{aligned}|b_{ii}|&=y_i|a_{ii}|x_i>y_i\alpha\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j+(1-\alpha)\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_jx_i\\&=\alpha\sum_{j\in N_1^\alpha}|b_{ij}|+(1-\alpha)\sum_{j\in N_1^\alpha}|b_{ji}|\\&=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。\end{aligned}$$

情况二：若$\sum\limits_{j\in N_2^\alpha}|a_{ij}|=0,\sum\limits_{j\in N_2^\alpha}|a_{ji}|\neq0$，此时，对$\forall j\in N_2^\alpha$都有$|a_{ij}|=0$，由(3.3.4)式可知：

$$\begin{aligned}\varepsilon<f_i&\Leftrightarrow\varepsilon\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ji}|<b_i\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j\\&\Leftrightarrow(1+b_i)\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j>\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j+\varepsilon\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ji}|。\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

由(3.3.5)、(3.3.6)式和本文假设得：

$$\begin{aligned}|b_{ii}|&=y_i|a_{ii}|x_i=y_i\alpha(1+b_i)\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j+(1-\alpha)(1+b_i)\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_jx_i\\&>y_i\alpha\left(\sum_{\substack{j\in N_1^\alpha\\j\neq i}}|a_{ij}|x_j\right)+(1-\alpha)\left(\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j+\varepsilon\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ji}|\right)x_i\\&>y_i\alpha\left(\sum_{\substack{j\in N_1^\alpha\\j\neq i}}|a_{ij}|x_j\right)+(1-\alpha)\left(\sum_{\substack{j\in N_1^\alpha\\j\neq i}}|a_{ji}|y_j+\sum_{j\in N_y^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{j\in N_2^\alpha\setminus N_y^\alpha}|a_{ji}|(y_j+\varepsilon)\right)x_i\\&=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。\end{aligned}$$

情况三：若 $\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ij}|\neq 0, \sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ji}|=0$。我们可以仿照情况二的证明过程，得到：

$$|b_{ii}|>\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。$$

情况四：若 $\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ij}|\neq 0, \sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ji}|\neq 0$，由(3.3.4)式我们得：

$$\begin{aligned}\varepsilon<c_i &\Leftrightarrow \varepsilon\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ij}|<b_i\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j\\ &\Leftrightarrow (1+b_i)\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j+\varepsilon\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ij}|。\end{aligned}$$

由上式和(3.3.5)式得：

$$\begin{aligned}|b_{ii}| &= y_i|a_{ii}|x_i=\alpha(1+b_i)y_i\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j+(1-\alpha)(1+b_i)x_i\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j\\
&>\alpha y_i\left(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j+\varepsilon\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ij}|\right)+(1-\alpha)x_i\left(\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j+\varepsilon\sum_{j\in N_2^\alpha}|a_{ji}|\right)\\
&\geq \alpha y_i\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{j\in N_x^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{j\in N_2^\alpha\setminus N_x^\alpha}(x_j+\varepsilon)|a_{ij}|\right)\\
&\geq \alpha y_i\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{j\in N_x^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{j\in N_2^\alpha\setminus N_x^\alpha}(x_j+\varepsilon)|a_{ij}|\right)\\
&\quad +(1-\alpha)x_i\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{j\in N_y^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{j\in N_2^\alpha\setminus N_y^\alpha}(y_j+\varepsilon)|a_{ji}|\right)\\
&=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。\end{aligned}$$

下面我们证明 $\forall i\in N_2^\alpha$ 的情形：由 ε 的选取和正对角矩阵 D、E 的构造，可知：

对 $\forall i\in<n>$，有 $0<d_i, e_i\leq 1$。

分如下四种情况证明：

情况一：对 $i\in N_x^\alpha\cap N_y^\alpha$，易知：

$$|b_{ii}|=|a_{ii}|\geq\alpha\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ij}|\right)+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ji}|\right)$$

$$>\alpha\left(\sum_{j\in\langle n\rangle\setminus N_x^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{\substack{j\in N_x^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ij}|\right)+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in\langle n\rangle\setminus N_y^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_y^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ji}|\right)$$

$$=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。$$

情况二：对$i\in N_x^\alpha, i\notin N_y^\alpha$，若$\alpha\neq 1$，由(3.3.2)知：

$$(y_i+\varepsilon)|a_{ii}|\geq(y_i+\varepsilon)\alpha\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ij}|\right)+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ji}|\right),$$

进一步有：

$$|b_{ii}|=(y_i+\varepsilon)|a_{ii}|\geq(y_i+\varepsilon)\alpha\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ij}|\right)+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ji}|\right)$$

$$>(y_i+\varepsilon)\alpha\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{j\in N_2^\alpha\setminus N_x^\alpha}|a_{ij}|(x_j+\varepsilon)+\sum_{j\in N_x^\alpha}|a_{ij}|\right)$$

$$+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\setminus N_y^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ji}|(y_j+\varepsilon)+\sum_{j\in N_y^x}|a_{ji}|\right)$$

$$=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。$$

若$\alpha=1$时，则：

$$|b_{ii}|=(y_i+\varepsilon)|a_{ii}|>(y_i+\varepsilon)\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{j\in N_2^\alpha\setminus N_x^\alpha}|a_{ij}|(x_j+\varepsilon)+\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|\right)$$

$$=R_i(B)=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。$$

情况三：对$i\notin N_x^\alpha, i\in N_y^\alpha$，我们可以仿照情况二的证明过程，得到：

$$|b_{ii}|>\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。$$

情况四：对$i\notin N_x^\alpha, i\notin N_y^\alpha$，由(3.3.2)式得：

$$(y_i+\varepsilon)|a_{ii}|(x_i+\varepsilon)\geq(y_i+\varepsilon)\alpha\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ij}|\right)$$

$$+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ji}|\right)(x_i+\varepsilon),$$

即：

$$|b_{ii}|=(y_i+\varepsilon)|a_{ii}|(x_i+\varepsilon)\geq(y_i+\varepsilon)\alpha\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ij}|\right)$$

$$+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ji}|\right)(x_i+\varepsilon),$$

$$>(y_i+\varepsilon)\alpha\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\backslash N_x^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ij}|(x_j+\varepsilon)+\sum_{j\in N_x^\alpha}|a_{ij}|\right)$$

$$+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_2^\alpha\backslash N_y^\alpha\\ j\neq i}}|a_{ji}|(y_i+\varepsilon)+\sum_{j\in N_y^\alpha}|a_{ji}|\right)$$

$$=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。$$

所以，对$\forall i\in<n>$总有$|b_{ii}|>\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)$，则$B$是严格和$\alpha$对角占优矩阵，所以$B$是非奇H矩阵。由定理2.1.1可知$A$也是非奇H矩阵。

定理3.3.2 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$不可约，对$\alpha\in(0,1)$，若

$$|a_{ii}|\geq\left(\frac{\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j}{x_i}\right)\alpha+(1-\alpha)\left(\frac{\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j}{y_i}\right),i\in N_1^\alpha \tag{3.3.7}$$

$$|a_{ii}|\geq\alpha\left(\frac{\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ij}|x_j+\sum_{j\in N_2^\alpha,j\neq i}|a_{ij}|}{x_i}\right)+(1-\alpha)\left(\frac{\sum_{j\in N_1^\alpha}|a_{ji}|y_j+\sum_{j\in N_2^\alpha,j\neq i}|a_{ji}|}{y_i}\right),i\in N_2^\alpha \tag{3.3.2}$$

其中$0<x_i,y_i\leq1$，$i\in<n>$，且$\tilde{I}(A)\neq\varnothing$，

其中

$$\tilde{I}(A)=\left\{v\in T(A)\middle|\prod_{i\in v}y_i|a_{ii}|x_i\neq\prod_{i\in v}R_i(A)\ 或\ \prod_{i\in v}y_i|a_{ii}|x_i\neq\prod_{i\in v}S_i(A)\right\},$$

$$\tilde{R}_i(A)=y_i\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|x_j,\quad \tilde{S}_i(A)=x_i\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ji}|y_j,$$

则A是非奇H矩阵。

证明：构造正对角矩阵$D=diag(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$E=diag(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，并记：$B=(b_{ij}):=EAD$。则对$\forall i\in N_1^{\alpha}$，由(3.3.7)得：

$$\begin{aligned}|b_{ii}|&=y_i|a_{ii}|x_i\ge y_i\alpha\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j+(1-\alpha)x_i\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j\\&=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。\end{aligned}$$

对$\forall i\in N_2^{\alpha}$，由(3.3.2)得：

$$\begin{aligned}|b_{ii}|&=y_i|a_{ii}|x_i\ge\alpha\left(\sum_{j\in N_1^{\alpha}}|a_{ij}|x_j+\sum_{\substack{j\in N_2^{\alpha}\\ j\neq i}}|a_{ij}|\right)+(1-\alpha)\left(\sum_{j\in N_1^{\alpha}}|a_{ji}|y_j+\sum_{\substack{j\in N_2^{\alpha}\\ j\neq i}}|a_{ji}|\right)\\&=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)。\end{aligned}$$

所以，对$\forall i\in<n>$总有$|b_{ii}|\ge\alpha R_i(B)+(1-\alpha)S_i(B)$，即$B$为和$\alpha$对角占优矩阵。另外，由$A$不可约知$B$不可约，又$\tilde{I}(A)\neq\varnothing$，根据引理3.3.1知$B$为非奇H矩阵，进一步由定理2.1.1知$A$也是非奇H矩阵。

设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若

$$|a_{ii}|\ge\alpha\left(\frac{\sum_{j\in N_1^{\alpha}}|a_{ij}|x_j+\sum_{j\in N_2^{\alpha},j\neq i}|a_{ij}|}{x_i}\right)+(1-\alpha)\left(\frac{\sum_{j\in N_1^{\alpha}}|a_{ji}|y_j+\sum_{j\in N_2^{\alpha},j\neq i}|a_{ji}|}{y_i}\right),i\in N_2^{\alpha}\quad(3.3.2)$$

其中$0<x_i,y_i\le1\quad i\in<n>$，并记：

$$K_{\alpha}=\left\{i\in<n>\mid |a_{ii}|>\left(\frac{\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j}{x_i}\right)\alpha+(1-\alpha)\left(\frac{\sum_{j\neq i}|a_{ji}|y_j}{y_i}\right)\right\}。$$

定理 3.3.3 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，$\alpha\in[0,1]$，若$0<x_i,y_i\le1\quad i\in<n>$满足条件(3.3.2)和(3.3.7)，且$K_{\alpha}\neq\varnothing$，对$\forall i_0\in<n>\backslash K_{\alpha}$，总存在非零元素链$a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}i_k}\neq0$

使得$i_k \in K_\alpha$，则A非奇H矩阵。

证明：仿照定理3.3.2证明，构造正对角矩阵$D = diag(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$E = diag(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，并记：$B = (b_{ij}) := EAD$。

则对$\forall i \in <n>$有：

$$|b_{ii}| \geq \alpha R_i(B) + (1-\alpha) S_i(B)。$$

显然，K_α可以表示为：

$$K_\alpha = \{ i \in <n> \mid |b_{ii}| > \alpha R_i(B) + (1-\alpha) S_i(B) \},$$

对任意的$\forall i_0 \in <n> \backslash K_\alpha$，有非零元素链$b_{i_0 i_1} b_{i_1 i_2} \cdots b_{i_{k-1} i_k} \neq 0$使得$i_k \in K_\alpha$，其中$i_0 \neq i_1 \neq \cdots \neq i_{k-1} \neq i_k$。根据引理3.3.1我们知：$B$为非奇H矩阵。进一步由定理2.1.1知$A$也是非奇H矩阵。

注：出引理3.3.2易得：本文所得结果包含了文献[9]中的结果。

4 AOR和GAOR迭代法的收敛性分析

4.1 AOR迭代法的收敛性分析

4.1.1 引言及预备知识

对于$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，我们用$\lambda(A)$和$\rho(A)$表示矩阵A的特征值和谱半径。

我们考虑线性方程组：

$$Ax=b,$$

其中$b\in C^n$为已知向量，$x\in C^n$为未知向量。

设给定矩阵A可分裂为：

$$A=D-T-S,$$

其中D为对角占优矩阵，$-T$和$-S$分别为矩阵A的严格下三角和严格上三角部分，我们记：

$$L=D^{-1}T,U=D^{-1}S。$$

则此时AOR迭代法可以写成：

$$x^{k+1}=M_{\sigma,\omega}x^k+d,k=0,1,\cdots,x^0\in C^n,$$

其中

$$M_{\sigma,\omega}=(I-\sigma L)^{-1}\left[(1-\omega)I+(\omega-\sigma)L+\omega U\right],$$

$$d=\omega(I-\sigma L)^{-1},\quad \omega,\sigma\in R,\sigma\neq 0。$$

定义 4.1.1 [5] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若$|a_{ii}||a_{jj}|>R_i(A)R_j(A),\forall i,j\in<n>,i\neq j$，则称$A$为严格双对角占优矩阵，并记为$A\in DD$。

定义 4.1.2 [5] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$，若存在$\alpha\in[0,1]$使得

$$|a_{ii}||a_{jj}|>P_{i,\alpha}(A)P_{j,\alpha}(A),$$

对$\forall i,j\in<n>,i\neq j$成立，则成矩阵$A$为严格双$\alpha$对角占优矩阵，并记为$A\in DD(\alpha)$，其中$P_{i,\alpha}=\alpha R_i(A)+(1-\alpha)S_i(A),i\in<n>$。

引理 4.1.1 [5] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，如果 $A\in DD(\alpha)$，则矩阵 A 就是非异 **H** 矩阵。

定理 4.1.1 [25] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，如果 $A\in D(\alpha)$，且 ω,σ 满足以下条件则 AOR 迭代法收敛：

$$(\mathrm{I})\,0\le\sigma<2\Big/\Big(1+\rho\big(M_{0,1}(M(A))\big)\Big)=:s,$$

$$0<\omega<\max\Big\{t=2/\Big(1+\max_i P_{i,\alpha}(L+U)\Big),2\sigma/\big(1+\rho(M_{\sigma,\sigma})\big)\Big\}\text{，或}$$

$$(\mathrm{II})\,\max_i\Big(-\omega\big(1-P_{i,\alpha}(L+U)\big)+2\max(0,\omega-1)\Big)/2P_{i,\alpha}(L)<\sigma<0,0<\omega<t\text{，或}$$

$$(\mathrm{III})\,t\le\sigma<\min_i\Big(\omega\big(1+P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\big)+2\min(0,1-\omega)\Big)/2P_{i,\alpha}(L),0<\omega<t\text{。}$$

定理 4.1.2 [26] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，如果 $A\in DD$，且 ω,σ 满足以下条件，则 AOR 迭代法收敛：

$$(\mathrm{I})\,0\le\sigma<2\Big/\Big(1+\rho\big(M_{0,1}(M(A))\big)\Big)=:s,$$

$$0<\omega<\max\left\{2\sigma/\big(1+\rho(M_{\sigma,\sigma})\big),\min_{\substack{i,j\\i\ne j}}\frac{2}{1+\sqrt{R_i(L+U)R_j(L+U)}}=:t\right\}\text{，或}$$

$$(\mathrm{II})\max_{\substack{i,j\\i\ne j}}\frac{\omega P_1-\sqrt{\omega^2P_2^2+P_3\min\big(\omega^2,(\omega-2)^2\big)}}{P_3}<\sigma<0,\ 0<\omega<t\text{，或}$$

$$(\mathrm{III})\,t\le\sigma<\min_{\substack{i,j\\i\ne j}}\frac{\omega P_4+\sqrt{\omega^2P_5^2+P_3\min\big(\omega^2,(\omega-2)^2\big)}}{P_3},0<\omega<t\text{。}$$

其中 $P_1=R_i(L)R_j(L+U)+R_i(L+U)R_j(L)$，

$P_2=R_i(L)R_j(L+U)-R_i(L+U)R_j(L)$， $P_3=4R_i(L)R_j(L)$，

$P_4=R_i(L)\big(R_j(L)-R_j(U)\big)+R_j(L)\big(R_i(L)-R_i(U)\big)$，

$P_5=R_i(L)\big(R_j(L)-R_j(U)\big)-R_j(L)\big(R_i(L)-R_i(U)\big)$。

4.1.2 迭代矩阵谱半径的上界

在以下的内容中，我们基于严格双 α 对角占优矩阵，给出迭代矩阵谱半径的上

界，并根据其上界来分析AOR迭代法的收敛性。

定理 4.1.3 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，如果 $A\in DD(\alpha)$，$1-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)>0$，$\forall i,j\in<n>,i\neq j$，则有：

$$\rho(M_{\sigma,\omega})\le\max_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{A_2+\sqrt{A_2^2-4A_1A_3}}{2A_1},$$

其中

$$A_1=1-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L),$$

$$A_2=2|1-\omega|+|\sigma|P_{i,\alpha}(L)\big[|\omega-\sigma|P_{j,\alpha}(L)+|\omega|P_{j,\alpha}(U)\big]$$
$$+|\sigma|\big[|\omega-\sigma|P_{i,\alpha}(L)+|\omega|P_{i,\alpha}(U)\big]P_{j,\alpha}(L),$$

$$A_3=(1-\omega)^2-\big[|\omega-\sigma|P_{i,\alpha}(L)+|\omega|P_{i,\alpha}(U)\big]\big[|\omega-\sigma|P_{j,\alpha}(L)+|\omega|P_{j,\alpha}(U)\big]。$$

证明：因为 $1-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)>0$，则 $I-\sigma L\in DD(\alpha)$。由引理 4.1.1，我们知道 $I-\sigma L$ 是非奇异的。不失一般性，我们假设 λ 为迭代矩阵 $M_{\sigma,\omega}$ 的任一特征值，则有：

$$\det(\lambda I-M_{\sigma,\omega})=0,$$

即：

$$\det\big(\lambda(I-\sigma L)-((1-\omega)I+(\omega-\sigma)L+\omega U)\big)=0。$$

然而，当 $\lambda(I-\sigma L)-((1-\omega)I+(\omega-\sigma)L+\omega U)\in DD(\alpha)$，$\lambda$ 不是迭代矩阵 $M_{\sigma,\omega}$ 的特征值，也就是说，对于 $\forall i,j\in<n>,i\neq j$ 满足：

$$|\lambda-(1-\omega)|^2>\left[\alpha\sum_{t\neq i}|\lambda\sigma l_{it}-(\omega-\sigma)l_{it}-\omega u_{it}|+(1-\alpha)\sum_{k\neq i}|\lambda\sigma l_{ki}-(\omega-\sigma)l_{ki}-\omega u_{ki}|\right]$$
$$\cdot\left[\alpha\sum_{l\neq j}|\lambda\sigma l_{jl}-(\omega-\sigma)l_{jl}-\omega u_{jl}|+(1-\alpha)\sum_{s\neq j}|\lambda\sigma l_{sj}-(\omega-\sigma)l_{sj}-\omega u_{sj}|\right],$$

λ 不是迭代矩阵 $M_{\sigma,\omega}$ 的特征值。特别的，如果对于 $\forall i,j\in<n>,i\neq j$ 满足：

$$(|\lambda-(1-\omega)|)^2>$$

$$\left[\alpha\sum_{t\neq i}\left(|\lambda||\sigma||l_{it}|+|\omega-\sigma||l_{it}|+|\omega||u_{it}|\right)+(1-\alpha)\sum_{k\neq i}\left(|\lambda||\sigma||l_{ki}|+|\omega-\sigma||l_{ki}|+|\omega||u_{ki}|\right)\right]$$

$$\cdot\left[\alpha\sum_{l\neq j}\left(|\lambda||\sigma||l_{jl}|+|\omega-\sigma||l_{jl}|+|\omega||u_{jl}|\right)+(1-\alpha)\sum_{s\neq j}\left(|\lambda||\sigma||l_{sj}|+|\omega-\sigma||l_{sj}|+|\omega||u_{sj}|\right)\right],$$

λ不是迭代矩阵$M_{\sigma,\omega}$的特征值。

假设λ是迭代矩阵$M_{\sigma,\omega}$的特征值，则必须存在一对$i,j\left(i,j\in\langle n\rangle,i\neq j\right)$满足：

$$\left(|\lambda-(1-\omega)|\right)^2\leq$$

$$\left[\alpha\sum_{t\neq i}\left(|\lambda||\sigma||l_{it}|+|\omega-\sigma||l_{it}|+|\omega||u_{it}|\right)+(1-\alpha)\sum_{k\neq i}\left(|\lambda||\sigma||l_{ki}|+|\omega-\sigma||l_{ki}|+|\omega||u_{ki}|\right)\right]$$

$$\cdot\left[\alpha\sum_{l\neq j}\left(|\lambda||\sigma||l_{jl}|+|\omega-\sigma||l_{jl}|+|\omega||u_{jl}|\right)+(1-\alpha)\sum_{s\neq j}\left(|\lambda||\sigma||l_{sj}|+|\omega-\sigma||l_{sj}|+|\omega||u_{sj}|\right)\right],$$

即：

$$A_1\lambda^2-2A_2|\lambda|+A_3\leq 0\text{。}\tag{4.1.1}$$

因为$A_1=1-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)>0$，$A_2\geq 0$，且判别式$\Delta\geq 0$，所以不等式$(4.1.1)$的解满足：

$$\frac{A_2-\sqrt{A_2^2-4A_1A_3}}{2A_1}\leq|\lambda|\leq\frac{A_2+\sqrt{A_2^2-4A_1A_3}}{2A_1}\text{。}\tag{4.1.2}$$

因此

$$\rho\left(M_{\sigma,\omega}\right)\leq\max_{\substack{i,j\in N\\ i\neq j}}\frac{A_2+\sqrt{A_2^2-4A_1A_3}}{2A_1}\text{。}$$

证毕。

4.1.3 AOR 迭代法的收敛性分析

定理 4.1.4 设$A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(C)$，如果$A\in DD(\alpha)$，且满足以下条件：

$(\mathrm{I})\,0\leq\sigma<2\Big/\left(1+\rho\left(M_{0,1}\left(M(A)\right)\right)\right)=:s$，

$$0<\omega<\max\left\{2\sigma/\left(1+\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)\right),\min_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{2}{1+\sqrt{P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)}}=:t\right\}，\text{或}$$

$$(\mathrm{II})\max_{\substack{i,j\\i\neq j}}\frac{\omega P_1'-\sqrt{\omega^2 P_2'^2+P_3'\min\left(\omega^2,(\omega-2)^2\right)}}{P_3'}<\sigma<0,0<\omega<t$$ ，或

$$(\mathrm{III})t\le\sigma<\min_{\substack{i,j\\i\neq j}}\frac{\omega P_4'+\sqrt{\omega^2 P_5'^2+P_3'\min\left(\omega^2,(\omega-2)^2\right)}}{P_3'},0<\omega<t。$$

则AOR迭代法收敛。

其中 $P_1'=P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)+P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L)$，

$P_2'=P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)-P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L)$， $P_3'=4P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)$，

$P_4'=P_{i,\alpha}(L)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)+P_{j,\alpha}(L)\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)$，

$P_5'=P_{i,\alpha}(L)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)-P_{j,\alpha}(L)\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)$。

证明：容易证明若参数σ满足条件$(\mathrm{I})-(\mathrm{III})$之一，我们有：

$$1-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)>0,\forall i,j\in<n>,i\neq j。$$

首先，我们考虑第一种情况：因为$A\in DD(\alpha)$，则由引理4.1.1，我们知道A是非奇H矩阵，因此$m(A)$是非奇M矩阵，根据文献[27]：

如果$0<\sigma<2\big/\left(1+\rho\left(M_{0,1}(M(A))\right)\right)$，则有$\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)<1$成立。

对于$\sigma\neq0$时，有：

$$M_{\omega,\sigma}=(1-\omega/\sigma)I+(\omega/\sigma)M_{\sigma,\sigma},$$

如果$0<\omega/\sigma<2/\left(1+\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)\right)$，由外插定理[28]可知：

$$\rho\left(M_{\sigma,\omega}\right)<1。$$

现在我们来分析第二种情况：当满足$2\sigma/\left(1+\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)\right)\le\omega<t,0\le\sigma<s$，

因为$\sigma<2\sigma/\left(1+\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)\right)$，则$0\le\sigma<\omega$。

因为 $A_2+\sqrt{A_2^2-4A_1A_3}<2A_1 \Leftrightarrow \begin{cases} A_2-A_3<A_1 \\ A_2<2A_1 \\ \sqrt{A_2^2-4A_1A_3}<2A_1 \end{cases}$ 。 (4.1.3)

第一步：当 $\omega\le 1$，易证(4.1.3)式成立。

第二步：当 $\omega>1$，因为：

$$A_1=1-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L),$$

$$A_2=2(\omega-1)+\sigma P_{i,\alpha}(L)\left[(\omega-\sigma)P_{j,\alpha}(L)+\omega P_{j,\alpha}(U)\right]$$

$$+\sigma\left[(\omega-\sigma)P_{i,\alpha}(L)+\omega P_{i,\alpha}(U)\right]P_{j,\alpha}(L),$$

$$=2(\omega-1)+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)-2\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L)$$

$$A_3=(1-\omega)^2-\left[|\omega-\sigma|P_{i,\alpha}(L)+|\omega|P_{i,\alpha}(U)\right]\left[|\omega-\sigma|P_{j,\alpha}(L)+|\omega|P_{j,\alpha}(U)\right]$$

$$=\omega^2-2\omega+1-\omega^2P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L)$$

$$+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L),$$

所以，由 $A_2-A_3<A_1$ 得：

$$\omega^2\left[1-P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)\right]-4\omega+4>0。$$

因为 $1-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)>0,\forall i,j\in<n>,i\ne j$，判别式 $\Delta>0$，所以此不等式的解满足：

$$\omega_1>\frac{2}{1-\sqrt{P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)}} \text{ 或 } \omega_2<\frac{2}{1+\sqrt{P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)}},\ \forall i\ne j。$$

由 ω_1，我们可得 $A_2>2$，这与(4.1.3)式相矛盾，因此 ω_1 应该被舍去。所以只有 ω_2 符合条件。所以：

$$\omega<\min_{\substack{i,j\in N\\ i\ne j}}\frac{2}{1+\sqrt{P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)}}。$$

我们证明情况(II)，第一步：当 $0<\omega\le 1,\sigma<0$，

$$A_2=2-2\omega-\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)+2\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)-\omega\sigma P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L),$$

$$A_3=\omega^2-2\omega+1-\omega^2P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L)$$
$$+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)。$$

由$A_2-A_3<A_1$得：

$$4\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)-2\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)-2\omega\sigma P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L)$$
$$+\omega^2\left(P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)-1\right)<0。$$

由判别式$\Delta>0$，得此不等式的解满足：

$$\frac{\omega P_1'-\omega\sqrt{P_2'^2+P_3'}}{P_3'}<\sigma<\frac{\omega P_1'+\omega\sqrt{P_2'^2+P_3'}}{P_3'}。$$

又因为$\sigma<0$和$P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)<1,\forall i,j\in<n>,i\neq j$，所以：

$$\frac{\omega P_1'-\omega\sqrt{P_2'^2+P_3'}}{P_3'}<\sigma<0。$$

第二步：当$1<\omega<t,\sigma<0$，

$$A_2=2\omega-2-\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)+2\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)-\omega\sigma P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L),$$

$$A_3=\omega^2-2\omega+1-\omega^2P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L)$$
$$+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)-\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)。$$

由$A_2-A_3<A_1$得：

$$4\sigma^2P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)-2\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L+U)-2\omega\sigma P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L)$$
$$+\omega^2P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)-\omega^2+4\omega-4<0。$$

因为判别式$\Delta>0$，所以此不等式的解应满足：

$$\frac{\omega P_1'-\sqrt{\omega^2P_2'^2+(\omega-2)^2P_3'}}{P_3'}<\sigma<\frac{\omega P_1'+\sqrt{\omega^2P_2'^2+(\omega-2)^2P_3'}}{P_3'}。$$

又因为$\sigma<0$ 和$P_{i,\alpha}(L+U)P_{j,\alpha}(L+U)<1,\forall i\neq j;i,j\in<n>$，所以：

$$\frac{\omega P_1'-\sqrt{\omega^2P_2'^2+(\omega-2)^2P_3'}}{P_3'}<\sigma<0。$$

综合一、二两步，得到：

$$\max_{\substack{i,j\\i\neq j}}\frac{\omega P_1'-\sqrt{\omega^2 P_2'^2+P_3'\min\left(\omega^2,(\omega-2)^2\right)}}{P_3'}<\sigma<0。$$

最后，我们证明情况(III)：第一步：当 $0<\omega\le 1,\sigma\ge t$，

$$A_2=2-2\omega-\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)-\omega\sigma\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)P_{j,\alpha}(L)$$
$$+2\sigma^2 P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L),$$
$$A_3=\omega^2-2\omega+1-\omega^2\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)-\sigma^2 P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)$$
$$+\omega\sigma\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)P_{j,\alpha}(L)+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)。$$

由 $A_2-A_3<A_1$ 得：

$$4\sigma^2 P_{i,\alpha}(L)P_{J,\alpha}(L)-2\omega\sigma\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)P_{j,\alpha}(L)-2\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)$$
$$+\omega^2\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)-\omega^2<0。$$

因为判别式 $\Delta>0$，所以此不等式的解应满足：

$$\frac{\omega P_4'-\omega\sqrt{P_5'^2+P_3'}}{P_3'}<\sigma<\frac{\omega P_4'+\omega\sqrt{P_5'^2+P_3'}}{P_3'}。$$

又因为 $\sigma\ge t$，我们得：

$$t<\sigma<\min\frac{\omega P_4'+\omega\sqrt{P_5'^2+P_3'}}{P_3'}。$$

第二步：$\omega>1,\sigma\ge t$，

$$A_2=2\omega-2-\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)-\omega\sigma\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)P_{j,\alpha}(L)$$
$$+2\sigma^2 P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L),$$
$$A_3=\omega^2-2\omega+1-\omega^2\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)-\sigma^2 P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)$$
$$+\omega\sigma\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)P_{j,\alpha}(L)+\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)。$$

由 $A_2-A_3<A_1$ 得：

$$4\sigma^2 P_{i,\alpha}(L)P_{j,\alpha}(L)-2\omega\sigma\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)P_{j,\alpha}(L)-2\omega\sigma P_{i,\alpha}(L)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)$$

$$+\omega^2\left(P_{i,\alpha}(L)-P_{i,\alpha}(U)\right)\left(P_{j,\alpha}(L)-P_{j,\alpha}(U)\right)-\omega^2+4\omega-4<0。$$

由判别式$\Delta>0$，得此不等式的解满足：

$$\frac{\omega P_4'-\sqrt{\omega^2 P_5'^2+(\omega-2)^2 P_3'}}{P_3'}<\sigma<\frac{\omega P_4'+\sqrt{\omega^2 P_5'^2+(\omega-2)^2 P_3'}}{P_3'}。$$

又因为$\sigma\ge t$，我们得：

$$t\le\sigma<\min\frac{\omega P_4'+\sqrt{\omega^2 P_5'^2+(\omega-2)^2 P_3'}}{P_3'}。$$

综合一、二两步，得到：

$$t\le\sigma<\min_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{\omega P_4'+\sqrt{\omega^2 P_5'^2+P_3'\min\left(\omega^2,(\omega-2)^2\right)}}{P_3'}。$$

证毕。

4.1.4 数值例子

下面我们举例说明：基于双α对角占优矩阵所得到的定理4.1.4的收敛域大于由文[25]和文[26]所得的收敛域。

例1 给定

$$A=\begin{bmatrix}5&3&2\\2&6&3\\2&1&9\end{bmatrix}。$$

不妨令$\alpha=\frac{1}{2}$，易证，$A\in D(\alpha)$，$A\in DD$和$A\in DD(\alpha)$。

由定理4.1.4我们可得如下的收敛域：

(1) $0\le\sigma<1.1896,\quad 0<\omega<\max\left\{1.1268, 2\sigma/\left(1+\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)\right)\right\}$，或

(2) $0<\omega\le 1,\quad -0.8195\omega<\sigma<0$，或

$1<\omega<1.1268,\quad \left(287\omega-5\sqrt{777\omega^2-3072\omega+3072}\right)/160<\sigma<0$，或

(3) $0<\omega\le 1,\quad 1.1268\le\sigma<1.4440\omega$，或

$$1<\omega<1.1268,\quad t\le\sigma<\left(-91\omega+144\sqrt{5\omega^2-20\omega+20}\right)/160。$$

由定理 4.1.2 我们可得如下的收敛域：

(1) $0\le\sigma<1.1896,\quad 0<\omega<\max\left\{1.0455, 2\sigma/\left(1+\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)\right)\right\}$，或

(2) $0<\omega\le1,\quad -0.7962\omega<\sigma<0$，或

$$1<\omega<1.0455,\quad \left(9\omega-5\sqrt{5\omega^2-16\omega+16}\right)/12<\sigma<0$$ ，或

(3) $1<\omega<1.0455,\quad t\le\sigma<\left(3\sqrt{17\omega^2-64\omega+64}-6\omega\right)/8$。

由定理 4.1.1 我们可得如下的收敛域：

(1) $0\le\sigma<1.1896, 0<\omega<\max\left\{1.1250, 2\sigma/\left(1+\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)\right)\right\}$，或

(2) $0<\omega\le1, -0.6\omega<\sigma<0$， 或 $1<\omega<1.1250, \frac{7}{5}\omega-\frac{9}{5}<\sigma<0$，或

(3) $0<\omega\le1, 1.1250\le\sigma<1.31\omega$，或 $1<\omega<1.1250, t\le\sigma<1.8-0.49\omega$。

例 2 给定

$$A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}。$$

经验证 $A\notin D(\alpha)\left(\alpha\in[0,1]\right)$，且 $A\notin DD$，所以在此我们不能运用定理 4.1.1 和定理 4.1.2。但是，不妨令 $\alpha=\frac{1}{3}$，易证： $A\in DD\left(\frac{1}{3}\right)$。

由定理 4.1.4 我们可得如下的收敛域：

(1) $0\le\sigma<1.1896,\quad 0<\omega<\max\left\{1.0294, 2\sigma/\left(1+\rho\left(M_{\sigma,\sigma}\right)\right)\right\}$，或

(2) $0<\omega\le1,\quad -0.0529\omega<\sigma<0$，或

$$1<\omega<1.0294,\quad \left(83\omega-9\sqrt{94\omega^2-336\omega+336}\right)/84<\sigma<0$$ ，或

(3) $1<\omega<1.0294,\quad t\le\sigma<\left(\omega+9\sqrt{98\omega^2-392\omega+392}\right)/98$。

第二个例子说明了定理 4.1.4 有更广的适用范围。

4.2 GAOR 迭代法的收敛性分析

4.2.1 引言：

在实际问题中我们通常需要求解一些这样的线性方程组：

$$Hy = f, \tag{4.2.1}$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} I-B_1 & D \\ C & I-B_2 \end{pmatrix}$$

是可逆的。如果对于 $i=1,2$，$I-B_i$ 是非奇异的，我们可以运用 SOR 迭代法，或者一般的 AOR 迭代法([31,32])求解线性方程组(4.2.1)。然而，实际问题中对于 $i=1,2$，$I-B_i$ 通常是奇异的，前面的迭代解法就无能为力了。事实上，即使对于 $i=1,2$，$I-B_i$ 是非奇异的，求解线性方程组(4.2.1)也是不容易的，因为我们必须首先解出矩阵 $I-B_i\,(i=1,2)$ 的逆矩阵或者求解下面两个线性方程组：

$$(I-B_i)x_i = d_i, i=1,2。$$

在文[33]中 Yuan 提出了广义 SOR (GSOR)迭代法去求解线性方程组(4.2.1)。后来，Yuan 和 Jin 在文章[34]中又给出了广义 AOR (GAOR) 迭代法来求解线性方程组(4.2.1)，具有很好的效果。其迭代公式为：

$$y^{(k+1)} = l_{\omega,r}y^k + \omega k, \tag{4.2.2}$$

其中

$$l_{\omega,r} = (1-\omega)I + \omega J + \omega r K, \tag{4.2.3}$$

$$k = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -rC & I \end{pmatrix} f, \tag{4.2.4}$$

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & -D \\ -C & B_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.5}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C(I-B_1) & CD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I-B_1 & D \end{pmatrix}。 \tag{4.2.6}$$

从$(4.2.2)-(4.2.6)$式我们知道 GAOR 迭代法求解此类问题时不再需要$I-B_i\left(i=1,2\right)$的逆矩阵。

4.2.2. 迭代矩阵谱半径的界

在本节中，我们将给出严格和α对角占优矩阵的 GAOR 迭代法迭代矩阵$l_{\omega,r}$的谱半径的上下界。

定理 4.2.1 设$H\in D(\alpha)$，则$\rho\left(l_{\omega,r}\right)$满足下面的不等式

$$\min_i\left\{|1-\omega|+|\omega|\left(J+rK\right)_{ii}-\alpha R_i\left(\omega J+\omega rK\right)-\left(1-\alpha\right)S_i\left(\omega J+\omega rK\right)\right\}\leq\rho\left(l_{\omega,r}\right)\leq$$

$$\max_i\left\{|1-\omega|+|\omega|\left(J+rK\right)_{ii}+\alpha R_i\left(\omega J+\omega rK\right)+\left(1-\alpha\right)S_i\left(\omega J+\omega rK\right)\right\}。$$

证明：我们假设λ为迭代阵$l_{\omega,r}$的任一特征值，则有：

$$\det\left(\lambda I-l_{\omega,r}\right)=0，\tag{4.2.7}$$

方程$(4.2.7)$等价于：

$$\det\left(\left(\lambda+\omega-1\right)I-\omega J-\omega rK\right)=0。$$

如果进一步，我们假设$\left(\lambda+\omega-1\right)I-\omega J-\omega rK\in D\left(\alpha\right)$，即有：

$$\left|\lambda-\left(1-\omega\right)-\left(\omega J+\omega rK\right)_{ii}\right|>\alpha R_i\left(\omega J+\omega rK\right)+\left(1-\alpha\right)S_i\left(\omega J+\omega rK\right),\quad\forall i\in\langle n\rangle,$$

其中$\left(\omega J+\omega rK\right)_{ii}$为矩阵$\omega J+\omega rK$的对角元素，由此可见$\lambda$不是迭代矩阵$l_{\omega,r}$的特征值。特别的，如果 对$\forall i\in N$满足：

$$|\lambda|-|1-\omega|-\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)_{ii}>\alpha R_i\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)+\left(1-\alpha\right)S_i\left(|\omega J|+|\omega rK|\right),$$

则λ不是迭代矩阵$l_{\omega,r}$的特征值。

假设λ是迭代阵$l_{\omega,r}$的特征值，则至少需要存在一个$i\left(i\in\langle n\rangle\right)$满足：

$$|\lambda|-|1-\omega|-\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)_{ii}<\alpha R_i\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)+\left(1-\alpha\right)S_i\left(|\omega J|+|\omega rK|\right),$$

即：

$$|\lambda|<|1-\omega|+\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)+\left(1-\alpha\right)S_i\left(|\omega J|+|\omega rK|\right),$$

因此，对于$H \in D(\alpha)$我们可得：

$$\rho\left(l_{\omega,r}\right) \le \max_i \left\{|1-\omega| + \left(|\omega J| + |\omega r K|\right)_{ii} + \alpha R_i\left(|\omega J| + |\omega r K|\right) + (1-\alpha) S_i\left(|\omega J| + |\omega r K|\right)\right\}。$$

同理，我们可得$\rho\left(l_{\omega,r}\right)$的下界是：

$$\rho\left(l_{\omega,r}\right) \ge \min_i \left\{|1-\omega| + \left(|\omega J| + |\omega r K|\right)_{ii} - \alpha R_i\left(|\omega J| + |\omega r K|\right) - (1-\alpha) S_i\left(|\omega J| + |\omega r K|\right)\right\}。$$

注 1：众所周知，我们对参数ω和r取不同的值时，GAOR 迭代法将变成我们熟知的一些迭代法，如：

(I) 当参数$\omega = r$，GAOR 迭代法就是 GSOR 迭代法，

$$\rho\left(l_{\omega,\omega}\right) \le \max_i \left\{|1-\omega| + \left(|\omega J| + |\omega^2 K|\right)_{ii} + \alpha R_i\left(|\omega J| + |\omega^2 K|\right) + (1-\alpha) S_i\left(|\omega J| + |\omega^2 K|\right)\right\}。$$

(II) 当参数$r = 0$，GAOR 迭代法就是 GJ 迭代法，

$$\rho\left(l_{\omega,0}\right) \le \max_i \left\{|1-\omega| + \left(|\omega J|\right)_{ii} + \alpha R_i\left(|\omega J|\right) + (1-\alpha) S_i\left(|\omega J|\right)\right\}。$$

注 2：如果

$\min_i \left\{|1-\omega| + \left(|\omega J| + |\omega r K|\right)_{ii} - \alpha R_i\left(|\omega J| + |\omega r K|\right) - (1-\alpha) S_i\left(|\omega J| + |\omega r K|\right)\right\} \le 0$，我们规定$\rho\left(l_{\omega,r}\right)$的下界等于零。

证毕。

4.2.3. GAOR 迭代法的收敛性分析

在本节中，我们假定H是严格和α对角占优矩阵，研究用于求解线性方程组(4.2.1)的 GAOR 迭代法的收敛性，并给出了特定参数的 GAOR 迭代法收敛的充分条件。

定理 4.2.2 如果$H \in D(\alpha)$，当ω, r满足下列条件时，GAOR 迭代法收敛：

(I) $0 < \omega \le 1$ 且

$$|r| < \max_i \frac{1 - |J|_{ii} - \alpha R_i\left(|J|\right) - (1-\alpha) S_i\left(|J|\right)}{\alpha R_i\left(|K|\right) + (1-\alpha) S_i\left(|K|\right) + |K|_{ii}}，或$$

(II) $1 < \omega < 2$ 且

$$|r|<\max_{i}\frac{2-\omega-\omega\left(|J|_{ii}+\alpha R_{i}\left(|J|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|J|\right)\right)}{\omega\left(\alpha R_{i}\left(|K|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|K|\right)+|K|_{ii}\right)}。$$

证明：因为$H\in D(\alpha)$， 如果 GAOR 迭代法收敛，则有：

$$\max_{i}\left\{|1-\omega|+\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)_{ii}+\alpha R_{i}\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)\right\}<1。$$

首先，当$0<\omega\leq1$时，有：

$$\max_{i}\left\{1-\omega+\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)_{ii}+\alpha R_{i}\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)\right\}<1。$$

也就是：

$$\max_{i}\left\{|J|_{ii}+|r||K|_{ii}+\alpha R_{i}\left(|J|\right)+|r|\alpha R_{i}\left(|K|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|J|\right)+|r|(1-\alpha)S_{i}\left(|K|\right)\right\}<1,$$

即：

$$|r|<\max_{i}\frac{1-|J|_{ii}-\alpha R_{i}\left(|J|\right)-(1-\alpha)S_{i}\left(|J|\right)}{\alpha R_{i}\left(|K|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|K|\right)+|K|_{ii}}。$$

其次，当$1<\omega<2$时，有：

$$\max_{i}\left\{\omega-1+\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)_{ii}+\alpha R_{i}\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|\omega J|+|\omega rK|\right)\right\}<1,$$

即：

$$|r|<\max_{i}\frac{2-\omega-\omega\left(|J|_{ii}+\alpha R_{i}\left(|J|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|J|\right)\right)}{\omega\left(\alpha R_{i}\left(|K|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|K|\right)+|K|_{ii}\right)}。$$

证毕。

下面我们将分析：$r=0$和$r=\omega$时这两种特殊情况下 GAOR 迭代法的收敛性问题。

定理 4.2.3 如果$H\in D(\alpha)$，使得$\rho\left(l_{\omega,0}\right)<1$的$\omega$满足：

$$0<\omega<\max_{i}\frac{2}{1+\left(|J|\right)_{ii}+\alpha R_{i}\left(|J|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|J|\right)}。$$

证明：因为$H\in D(\alpha)$，根据定理 4. 2. 1 的注 1，我们知道当$r=0$时，有：

$$\rho\left(l_{\omega,0}\right)\leq\max_{i}\left\{|1-\omega|+\left(|\omega J|\right)_{ii}+\alpha R_{i}\left(|\omega J|\right)+(1-\alpha)S_{i}\left(|\omega J|\right)\right\}<1,$$

首先，当$0<\omega\leq1$时，

$$\max_{i}\left\{1-\omega+\omega\left(|J|\right)_{ii}+\alpha\omega R_{i}\left(|J|\right)+(1-\alpha)\omega S_{i}\left(|J|\right)\right\}<1,$$

也就是：

$$\max_i\left\{\left(|J|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|J|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|J|\right)\right\}<1。$$

其次，当$1<\omega<2$时，

$$\max_i\left\{\omega-1+\omega\left(|J|\right)_{ii}+\alpha\omega R_i\left(|J|\right)+(1-\alpha)\omega S_i\left(|J|\right)\right\}<1,$$

即：

$$\omega<\max_i\frac{2}{1+\left(|J|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|J|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|J|\right)}。$$

综合上述证明，使得$\rho\left(l_{\omega,0}\right)<1$的$\omega$满足：

$$0<\omega<\max_i\frac{2}{1+\left(|J|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|J|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|J|\right)}。$$

证毕。

定理 4.2.4 如果$H\in D(\alpha)$，使得$\rho\left(l_{\omega,\omega}\right)<1$的$\omega$满足：

$$0<\omega<\frac{2}{\left(|J|+|\omega K|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|J|+|\omega K|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|J|+|\omega K|\right)}。$$

证明：因为$H\in D(\alpha)$，根据定理 4.2.1 的注 1，我们知道当$r=\omega$时，有：

$$\rho\left(l_{\omega,\omega}\right)\le\max_i\left\{|1-\omega|+\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)\right\}<1$$

首先，当$0<\omega\le1$时，

$$\max_i\left\{1-\omega+\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)\right\}<1,$$

即：

$$\max_i\left\{\left(|J|+|\omega K|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|J|+|\omega K|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|J|+|\omega K|\right)\right\}<1,$$

其次，当$1<\omega<2$时，

$$\max_i\left\{\omega-1+\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|\omega J|+|\omega^2K|\right)\right\}<1,$$

即：

$$\omega<\max_i\frac{2}{\left(|J|+|\omega K|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|J|+|\omega K|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|J|+|\omega K|\right)}。$$

综上所证，使得$\rho\left(l_{\omega,\omega}\right)<1$的$\omega$满足：

$$0<\omega<\max_i \frac{2}{\left(|J|+|\omega K|\right)_{ii}+\alpha R_i\left(|J|+|\omega K|\right)+(1-\alpha)S_i\left(|J|+|\omega K|\right)}。$$

证毕。

4.2.4 数值例子

下面我们通过一个例子来求$l_{\omega,r}$的收敛域。

例 给定

$$H=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{6} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)。$$

则

$$H=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{6} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} I-B_1 & D \\ C & I-B_2 \end{pmatrix},$$

显然$H\notin D$。不妨取$\alpha=\frac{1}{2}$，易证：$H\in D\left(\frac{1}{2}\right)$，并且

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}。$$

由定理 4.2.2，我们得到参数ω,r的取值范围：

(I) $0<\omega<1$ 且 $|r|<\frac{3}{2}$ 或

(II) $1<\omega<\frac{6}{5}$ 且$|r|<\left(2-\frac{5}{3}\omega\right)\frac{9}{2\omega}$。

5 迭代矩阵特征值模的上界

5.1 引言

对于大多数的大型线性方程组，求其精确解是几乎不可能的事情，所以通常采用迭代法求其近似解。能否精确并迅速的求得近似解x^*，取决于设计的算法的好坏。因此衡量一个算法的好与坏就显的尤为重要了。迭代矩阵特征值模的上界是衡量算法优劣的重要尺度之一，因此对迭代矩阵特征值模的上界的研究具有重要意义。

对于线性方程组：

$$Ax=b \tag{5.1.1}$$

其中A是n阶复矩阵（通常为非奇异矩阵），x为未知的n维复向量，b为已知的n维复向量。

为求解线性方程组$(5.1.1)$，通常先把矩阵A分裂为：

$$A=M-N,$$

其中M为非奇异矩阵。

然后，利用迭代法：

$$X^{k+1}=M^{-1}NX^{k}+d,\quad k=0,1,\cdots \tag{5.1.2}$$

求解此类问题。

例如，我们设$A=D-C$，

其中$D=diag(A)$，则 Jacobi 迭代法的迭代矩阵J可表示为$J=D^{-1}C$。

定理 5.1.1 [42,43] 设$M=(m_{ij})\in D,N=(n_{ij})\in M_n(C)$，则有：

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\le\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{|n_{ii}|+\sum_{j\ne i}|n_{ij}|}{|m_{ii}|-\sum_{j\ne i}|m_{ij}|}。$$

定理 5.1.2 [44] 设$M=(m_{ij})\in DD,N=(n_{ij})\in M_n(C)$，则有：

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\le\max_{\substack{i\in\langle n\rangle\\ i\ne j}}\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

其中 $A=|m_{ii}m_{jj}|-R_i(M)R_j(M)$，

$B=|m_{ii}n_{jj}|+|n_{ii}m_{jj}|+R_i(M)R_j(N)+R_i(N)R_j(M)$，

$C=|n_{ii}n_{jj}|-R_i(N)R_j(N)$。

定理 5.1.3 [45] 设 $M=(m_{ij})\in DD,N=(n_{ij})\in M_n(C)$，则有

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\le\max_{\substack{i,j\in<n>\\ i\ne j}}\frac{P_2'+\sqrt{P_2'^2-4P_1'P_3'}}{2P_1'},$$

其中

$P_1'=|m_{ii}m_{jj}|-R_i(M)R_j(M)$，

$P_2'=|m_{ii}n_{jj}+n_{ii}m_{jj}|+R_i(M)R_j(N)+R_i(N)R_j(M)$，

$P_3'=-\left[|n_{ii}n_{jj}|+R_i(N)R_j(N)\right]$。

在下面两节中，我们基于严格双 α 对角占优矩阵用两种方法给出其迭代矩阵特征值模的估计。

5.2 主要结论（一）

引理 5.2.1 [5] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，如果矩阵 **A** 满足 $A\in DD(\alpha)$，则矩阵 **A** 是非奇 **H** 矩阵。

引理 5.2.2 [46] 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，则矩阵 **A** 的特征值分布在以下区域内：

$$\bigcup_{i\ne j}\left\{\lambda\in C:|\lambda-a_{ii}||\lambda-a_{jj}|\le R_i(A)R_j(A)\right\}。$$

定理 5.2.1 设 $M=(m_{ij})\in DD(\alpha),N=(n_{ij})\in M_n(C)$，则有：

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\le\max_{\substack{i\in<n>\\ i\ne j}}\frac{B'+\sqrt{B'^2-4AC'}}{2A},$$

其中 $A=|m_{ii}m_{jj}|-P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(M)$，

$B'=|m_{ii}n_{jj}+n_{ii}m_{jj}|+P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(N)+P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(M)$，

$C' = -\left[\left|n_{ii}n_{jj}\right| + P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(N)\right]$。

证明：因为 $M \in DD(\alpha)$，由引理 **5.1.1** 我们知道，矩阵 M 是非奇异的，所以 $(5.1.2)$ 式迭代法是可行的。不失一般性，不妨设 λ 为迭代矩阵 $M^{-1}N$ 的任一特征根，则有：

$$\det\left(\lambda I - M^{-1}N\right) = 0,$$

即：

$$\det\left(\lambda M - N\right) = 0。$$

如果 $\lambda M - N \in DD(\alpha)$，由双 α 对角占优矩阵的定义和引理 **5.1.1**，得：

$$\left|\lambda m_{ii} - n_{ii}\right|\left|\lambda m_{jj} - n_{jj}\right| > P_{i,\alpha}\left(\lambda M - N\right)P_{j,\alpha}\left(\lambda M - N\right), \quad i,j \in <n> (i \neq j), \quad (5.2.1)$$

由 $(5.2.1)$ 式知，λ 不是迭代矩阵 $M^{-1}N$ 的特征根。

特别的，如果对于 $\forall i,j \in <n> (i \neq j)$ 满足：

$$\left(\left|m_{ii}m_{jj}\right|\right)\left|\lambda\right|^2 - \left(\left|m_{ii}n_{jj} + n_{ii}m_{jj}\right|\right)\left|\lambda\right| - \left|n_{ii}n_{jj}\right| > \left[\left|\lambda\right|P_{i,\alpha}(M) + P_{i,\alpha}(N)\right]\left[\left|\lambda\right|P_{j,\alpha}(M) + P_{j,\alpha}(N)\right]$$

λ 不是迭代矩阵 $M^{-1}N$ 的特征根。如果 λ 是迭代矩阵 $M^{-1}N$ 的特征，则至少需要存在一对 (i,j)，$i,j \in <n> (i \neq j)$ 满足：

$$\left(\left|m_{ii}m_{jj}\right|\right)\left|\lambda\right|^2 - \left(\left|m_{ii}n_{jj} + n_{ii}m_{jj}\right|\right)\left|\lambda\right| - \left|n_{ii}n_{jj}\right| \leq \left[\left|\lambda\right|P_{i,\alpha}(M) + P_{i,\alpha}(N)\right]\left[\left|\lambda\right|P_{j,\alpha}(M) + P_{j,\alpha}(N)\right],$$

即：

$$A\left|\lambda\right|^2 - B'\left|\lambda\right| + C' \leq 0 \quad (5.2.2)$$

对于不等式 $(5.2.2)$，因为 $A > 0, B' \geq 0$ 和 $C' \leq 0$，判别式 $\Delta = B'^2 - 4AC' \geq 0$，

所以不等式 $(5.2.2)$ 的解满足：

$$\frac{B' - \sqrt{B'^2 - 4AC'}}{2A} \leq \left|\lambda\right| \leq \frac{B' + \sqrt{B'^2 - 4AC'}}{2A}, \quad i,j \in <n> (i \neq j)。$$

因为 λ 为迭代矩阵 $M^{-1}N$ 的任一特征值，所以得：

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right| \le \max_{\substack{i\in<n> \\ i\neq j}} \frac{B'+\sqrt{B'^2-4AC'}}{2A}。$$

证毕。

5.3 主要结果（二）

定理 5.3.1 设 $M=\left(m_{ij}\right)\in DD(\alpha), N=\left(n_{ij}\right)\in M_n(C)$，则有

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right| \le \max_{\substack{i,j\in<n> \\ i\neq j}}\left\{\min\left\{\frac{Q_2+\sqrt{Q_2^{\,2}-4Q_1Q_3}}{2Q_1},\frac{Q_5-\sqrt{Q_5^{\,2}-4Q_4Q_6}}{2Q_4}\right\}\right\},$$

其中

$Q_1=\left|m_{ii}m_{jj}\right|-P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(M)$，

$Q_2=\left|m_{ii}n_{jj}\right|+\left|n_{ii}m_{jj}\right|+P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(N)+P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(M)$，

$Q_3=\left|n_{ii}n_{jj}\right|-P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(N)$，

$Q_4=\left|m_{ii}m_{jj}\right|+P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(M)$，

$Q_5=\left|m_{ii}n_{jj}\right|+\left|n_{ii}m_{jj}\right|-P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(N)-P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(M)$，

$Q_6=\left|n_{ii}n_{jj}\right|+P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(N)$。

$\left(\text{注：如果有} Q_5^{\,2}-4Q_4Q_6<0\text{，我们则取} \dfrac{Q_5-\sqrt{Q_5^{\,2}-4Q_4Q_6}}{2Q_4}=+\infty\ .\right)$。

证明：因为 $M\in DD(\alpha)$，由引理 5.1.1 知，M 是非奇异矩阵。不失一般性，不妨设 λ 为迭代矩阵 $M^{-1}N$ 的任一特征值，则有：

$$\det\left(\lambda I-M^{-1}N\right)=0,$$

即：

$$\det\left(\lambda M-N\right)=0。$$

进一步，当 $\lambda M-N\in DD(\alpha)$，由定义和引理 5.1.1，得到：

$$|\lambda m_{ii}-n_{ii}||\lambda m_{jj}-n_{jj}|>P_{i,\alpha}(\lambda M-N)P_{j,\alpha}(\lambda M-N),\quad i,j\in<n>(i\neq j),$$

则λ不是迭代矩阵$M^{-1}N$的特征值。特别的，如果对$\forall i,j\in<n>,i\neq j$满足：

$$\left|(|\lambda||m_{ii}|-|n_{ii}|)(|\lambda||m_{jj}|-|n_{jj}|)\right|>\left[|\lambda|P_{i,\alpha}(M)+P_{i,\alpha}(N)\right]\left[|\lambda|P_{j,\alpha}(M)+P_{j,\alpha}(N)\right],$$

λ不是迭代矩阵$M^{-1}N$的特征值。因此，如果λ是迭代矩阵$M^{-1}N$的特征值，则至少需要存在一对$i,j\in<n>(i\neq j)$满足：

$$\left|(|\lambda||m_{ii}|-|n_{ii}|)(|\lambda||m_{jj}|-|n_{jj}|)\right|\le\left[|\lambda|P_{i,\alpha}(M)+P_{i,\alpha}(N)\right]\left[|\lambda|P_{j,\alpha}(M)+P_{j,\alpha}(N)\right],$$

即：

$$\begin{aligned}&\left(|m_{ii}m_{jj}|-P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(M)\right)|\lambda|^2-\left(|m_{ii}n_{jj}|+|n_{ii}m_{jj}|+P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(N)+P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(M)\right)|\lambda|\\&+|n_{ii}n_{jj}|-P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(N)\le 0\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

或

$$\begin{aligned}&\left(|m_{ii}m_{jj}|+P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(M)\right)|\lambda|^2-\left(|m_{ii}n_{jj}|+|n_{ii}m_{jj}|-P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(N)-P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(M)\right)|\lambda|\\&+\left[|n_{ii}n_{jj}|+P_{i,\alpha}(N)P_{j,\alpha}(N)\right]\ge 0。\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

不等式(5.3.1)，可化简为：

$$Q_1|\lambda|^2-Q_2|\lambda|+Q_3\le 0。\tag{5.3.3}$$

因为$M\in DD(\alpha)$，$Q_1=|m_{ii}m_{jj}|-P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(M)>0$且$Q_2>0$，$Q_3>0$，判别式$\Delta=Q_2^2-4Q_1Q_3\ge 0$，因此不等式(5.3.3)的解满足：

$$\frac{Q_2-\sqrt{Q_2^2-4Q_1Q_3}}{2Q_1}\le|\lambda|\le\frac{Q_2+\sqrt{Q_2^2-4Q_1Q_3}}{2Q_1}。$$

对于不等式(5.3.2)，可化简为：

$$Q_4|\lambda|^2-Q_5|\lambda|+Q_6\ge 0,\tag{5.3.4}$$

因为$Q_4=|m_{ii}m_{jj}|+P_{i,\alpha}(M)P_{j,\alpha}(M)>0$，此时分两种情况讨论：

情况1：如果判别式$\Delta<0$，不等式(5.3.4)的解是全体复数，即：$\lambda\in C$。

情况 2：如果判别式$\Delta\geq 0$，不等式$(5.3.4)$的解满足：

$$|\lambda|\leq\frac{Q_5-\sqrt{Q_5^2-4Q_4Q_6}}{2Q_4}\text{ 或 }|\lambda|\geq\frac{Q_5+\sqrt{Q_5^2-4Q_4Q_6}}{2Q_4}\text{。}$$

综合以上的分析，我们得到：

$$|\lambda|\leq\min\left\{\frac{Q_2+\sqrt{Q_2^2-4Q_1Q_3}}{2Q_1},\frac{Q_5-\sqrt{Q_5^2-4Q_4Q_6}}{2Q_4}\right\}\text{。}$$

$$\left(\text{注：如果有}Q_5^2-4Q_4Q_6<0\text{，我们则取}\frac{Q_5-\sqrt{Q_5^2-4Q_4Q_6}}{2Q_4}=+\infty\ .\right)\text{。}$$

又因为λ是迭代矩阵$M^{-1}N$的任一特征值，所以：

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\leq\max_{\substack{i,j\in\langle n\rangle\\ i\neq j}}\left\{\min\left\{\frac{Q_2+\sqrt{Q_2^2-4Q_1Q_3}}{2Q_1},\frac{Q_5-\sqrt{Q_5^2-4Q_4Q_6}}{2Q_4}\right\}\right\}\text{。}$$

证毕。

5.4 数值例子

下面给出数值例子，以说明我们在 5.2 和 5.3 部分所得结果的优越性。

例 1 设

$$M=\begin{pmatrix}-3&2&1\\1&3&2\\1&1&4\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\2&0&1\end{pmatrix}\text{。}$$

经验证知，$M\notin D$，$M\notin DD$，所以这个问题不能由定理 5.1.1、定理 5.1.2 和定理 5.1.3 来求解。但是，我们不妨$\alpha=\dfrac{1}{2}$，则$M\in DD\left(\dfrac{1}{2}\right)$，所以由定理 5.2.1 和定理 5.3.1 我们得：

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\leq 7.115\text{。}$$

本例说明定理 5.2.1 和定理 5.3.1 具有更广的适用范围。

例 2 设

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0.5\\0.5&1&0\\0&0.5&1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&0.5&0\\0.3&0&0.2\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

不妨设$\alpha=\dfrac{1}{2}$，易证：$M\in DD$，$M\in DD\left(\dfrac{1}{2}\right)$。

由定理5.1.2和定理5.1.3、定理5.2.1，有：

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\le 1.6667。$$

由定理5.3.1，有：

$$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\le \max_{\substack{i,j\in<n>\\ i\neq j}}\left\{\min\left\{0.8972,+\infty\right\},\min\left\{1.6980,0.0592\right\},\min\left\{1.7709,0.0840\right\}\right\}$$

$$=0.8972。$$

而事实上，由Matlab计算知：$\left|\lambda\left(M^{-1}N\right)\right|\le 0.8765$。由此可以看出由定理5.3.1得出的结果更贴近真值。在某种情况下，由定理5.3.1所得结果比由定理5.1.2、定理5.1.3、定理5.2.1得到的结果更精确。

结论

一. 本文的主要工作如下:

1. 给出了非奇H矩阵的新判定条件

在3.2节，我们指出了文[8]中的两点不足，并在其基础上引进一类新的具有非零元素链的矩阵，给出了一个新的定理。在3.3节中我们基于和α对角占优矩阵给出了判定非奇H矩阵的新定理,所得结果包括文[8]的结论,扩大了定理的适用范围。

2. 分析了AOR和GAOR迭代法的收敛性

在4.1节中我们以系数矩阵是严格双α对角占优矩阵为基础，研究了AOR迭代法的收敛性，所得收敛域比出文[25,26]所得的收敛域大。在4.2节中我们研究了系数矩阵是严格和α对角占优矩阵的GAOR迭代法的收敛性，也得到了比较好的结果。

3. 给出了迭代矩阵特征值模的新上界

本章主要用两种方法给出了由分裂矩阵M是双α对角占优矩阵所得的迭代矩阵特征值模的新上界，所得结果具有更广的适用范围及更精确的估计。

二. 目前还没有做的工作:

1. 非奇H矩阵的判定是比较困难的，其研究方法一般是削弱条件以使定理具有更广的适用范围。目前主要是以对角占优矩阵、和α对角占优矩阵为研究对象的，以双α对角占优矩阵为研究对象的还很少。

2. 双链α对角占优矩阵（$|a_{ii}||a_{jj}| \ge R_i^{\alpha}(A)S_i^{(1-\alpha)}(A)R_j^{\alpha}(A)S_j^{(1-\alpha)}(A)$）的AOR迭代法的收敛性还没有研究。双$\alpha$对角占优矩阵、双链$\alpha$对角占优矩阵的GAOR迭代法的收敛性也还值得进一步研究。

参考文献

[1] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].清华大学出版社,2001:3-8.

[2] 冉瑞生.H矩阵类一些研究和迭代矩阵的径估计[学位论文].电子科技大学, 2003,10.

[3] 程云鹏,张凯院,徐仲.矩阵论(第三版)[M].西北工业大学,2006.

[4] 徐树方,矩阵计算的理论与方法[M].北京大学出版社,1999.

[5] 李继成,张文修.H矩阵的判定[J].高等学校计算数学学报,1999,9(3):264-268.

[6] 黄廷祝.非奇H矩阵的简洁判据[J].计算数学,1993,8(3):318-328.

[7] 孙玉祥.广义对角占优矩阵的充分条件[J].高等学校计算数学学报,1997,19(3):216-223.

[8] 王广彬,洪振杰. 非奇H矩阵的充分条件[J].上海大学学报,2003,9(4):358-360.

[9] 申淑谦,黄廷祝,程光辉.非奇异H-矩阵的实用简单判据[J].应用数学报,2008,3:447-457.

[10] Sun Y X. Improvement of an Ostrowski' s Theorem[J]. Northeast Math, 1991,7:497-502.

[11] Gao F S. Judgement of Generalized Diagonal Dominance Matrix[C]. Proceedings of the Second China Matrix Theory and its Applications Conference. Changchun: Jilin University Press, 1996.

[12] Neumaier A. On the comparison of H-matrices with M-matrices[J]. Linear Algebra Appl. 1986,83:135-141.

[13] Berman A, Plemnons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.

[14] 谢清明.判定广义对角占优矩阵的几个充分条件[J].工程数学学报,2006,23(4):757- 760.

[15] 黄荣,刘建州.非奇H矩阵的实用性新判定[J].高校应用数学学报A辑,2004,22(1):111-119.

[16] 李阳,魏晓丽,宋立军.局部α对角占优矩与非奇H矩阵的充分条件[J].科技通报,2007,23(2):155-158.

[17] 丁碧文,刘建州.广义对角占优矩阵的充分条件[J].数学研究,2005,38(4):422-428.

[18] 房秀芬,黄廷祝. α连对角占优矩阵与M矩阵刻画[J].工程数学学报,2005,22(1):123-127.

[19] Li Bashan, Tsatsomeros M J. Doubly diagonally dominant matrices [J]. Linear Algebra Appl. 1997,261:221-235.

[20] Neumann M. A note on generalization of strict diagonal dominance for real matrices[J]. Linear Algebra Appl. 1979,26:3-4.

[21] Horn R A, Johnson C A. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[22] Huang T Z. Practical Sufficient Conditions of Nonsingular H-matrices[J]. Numer. Math. Sinica, 1993,3:318-328

[23] Gan T B, Huang T Z. Simple Criteria for Nonsingular H-matrices[J]. Linear Algebra

Appl. 2003,374:317-326

[24] Gan T B, Huang T Z. Practical Sufficient Conditions for Nonsingular H-matrices[J]. Numer. Math. Sinica, 2004,26:109-116

[25] Huang T B, Wang G B. Convergence theorem of AOR method[J]. Applied Mathematics and Physics. 2002,23(11):1183-1187.

[26] Gao Z X, Huang T Z. Convergence of AOR method[J]. Appl. Math. Comput. 2006,176: 134-140.

[27] Cvekovic' L J. Herceg D. Convergence theory for AOR method[J]. J. Comput. Math. 1990,8(2):128-134.

[28] Hadjidimos A, Yeyios A. The principle of extrapolation in with the accelerated overrelaxtion method[J]. Linear Algebra Appl. 1980,30:115-128.

[29] Hadjidimos A. Accelerated overrelaxtion method[J]. J. Comput. Math. 1978,32: 149-157.

[30] Berman A, Plemmons R. J. Nonnegative Matrices in the Mathematics Sciences[J]. SIAM Press, Philadelphia, NJ, 1994.

[31] Li W, On Nekrasov matrices[J]. Linear Algebra Appl. 1998,218:87-96

[32] Martins M. M. On an accelerated overrelaxtion iterative method for linear systems with diagonally dominant matrix[J]. Math. Comput. 1980,35(152):1269 - 1273.

[33] Yuan J Y. Numerical methods for generalized least squares problems[J]. Appl. Math. Comput. 66:571 - 584.

[34] Yuan J Y, Jin X Q. Convergence of the generalized AOR method[J]. Appl. Math. Comput. 1999,99:35-46.

[35] Horn R. A, Johnson C. R. Matrix Analysis[M]. Cambridge University Press. Cambridge, MA, 1985.

[36] Tian G X, Huang T Z, Cui S Y. Convergence of generalized AOR iterative method for linear systems with strictly diagonally dominant matrices[J]. Appl. Math. Comput. 2008,213:240-247.

[37] Darvishi M T, Hessari P. On convergence of generalized AOR method for linear systems with strictly diagonally dominant matrices[J]. Appl. Math. Comput. 2006,176: 128-133.

[38] Wang X M. Convergence theory for the general GAOR type iterative method and the MSOR iterative method applied to H-matrices[J]. Linear Algebra Appl. 1997,250: 1-19.

[39] Wang X M. The upper bound of the spectral radius of $M^{-1}N$ and convergence of some iterative methods[J]. J. Comput. Math. 1994, 53:203-217.

[40] Hu J G. The upper and lower bounds for $|M^{-1}N|$[J]. J. Comput. Math. 1986, 2 : 41-46.

[41] Huang T Z, Gao Z X. A new upper bound for moduli of eigenvalues of iterative matrices[J]. Int. J. Comput. Math. 2003, 80:799-803.

[42] Li H B, Huang T Z, Li H. An improvement on a new upper bound for moduli of eigenvalues of iterative matrices[J]. Appl. Math. Comput. 2006, 173:977-984.

[43] Hu J G. Upper bounds of the spectral radius of some iterative matrices[J]. J. Comput. Math. 1990, 8(2):118-127

[44] 申淑谦.特殊矩阵数值分析和鞍点问题的迭代求解预处理技术[学位论文].电子科技大学, 2008, 3.

致谢

衷心的感谢王广彬老师，在这短短的三年研究生生活中给我极大的关怀和帮助。在研一时王老师就为我提供了大量的有关英语六级的学习资料，为我顺利通过六级考试提供了保障。在写小论文期间，王老师给我提供了大量书籍和论文，并给予细心的讲解和专业的指导，可以说我完成的每篇文章中都凝聚着王老师大量的心血。在毕业论文的选题、内容研究和文章撰写过程中王老师都给予我细心的指导，提出了许多宝贵的意见，并同我一起修改论文。他渊博的学识、严谨的作风和一丝不苟的精神，使我受益匪浅！

感谢上海大学的谭福平老师，他给我提供了很多资料。感谢我的师弟张宁、师妹李亮亮、李雪，他们帮我做了部分论文的输入工作以及给予我生活上的帮助。

感谢亲人、同学、舍友对我多方面的关怀及帮助，使我得以顺利地走过了人生道路上重要的一段旅程。我深深的感谢他们，并将以此激励我在今后的学习、工作和生活中不断进取！

同时，向数理学院所有的领导和老师表示衷心的感谢！

攻读学位期间发表(完成)的学术论文目录

[1] Wang Guangbin, Yu Bin, Wen Hao. Convergence Theorems and Comparison Theorems for Parallel Alternating Algorithm, Proceedings of The 14th Conference of International Linear Algebra Society, 2007:287-293 (ISTP检索).

[2] Wang Guangbin, Wen Hao, Zhang Ning. Convergence Theorem for the AOR Method, Proceeding of The Eighth International Conference on Matrix Theory and its Applications, 2008:325-328 (ISTP检索).

[3] Wang Guangbin, Wen Hao, Tan Fuping. Synchronous Multi-splitting and Schwarz Methods for Solving Linear Complementarity Problems, 2008 International Symposium on Computer Science and Computational Technology, 2008:760-762 (ISTP检索).

[4] 王广彬，问浩.逆H矩阵的新性质，应用数学与计算数学学报，2008, 22(2):120-122.

[5] 问浩，谭福平，荣登奎.非奇H矩阵的充分条件，应用数学与计算数学学报，2009(已录用).

[6] Wang Guangbin, Wen Hao. Convergence of generalized AOR iterative method for linear systems with diagonally dominant matrices, (审稿中-JCAM).

[7] Wang Guangbin, Wen Hao. Some Subclasses of Nonsingular H-matrices, (审稿中-LAA).