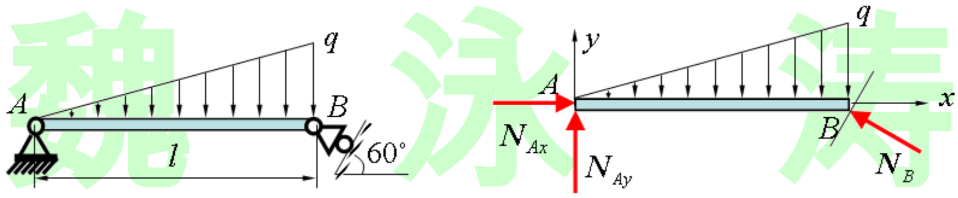
3.1 在下列各图中，已知载荷集度 q 和长度 l，试求梁长度所受的约束力。

(a)



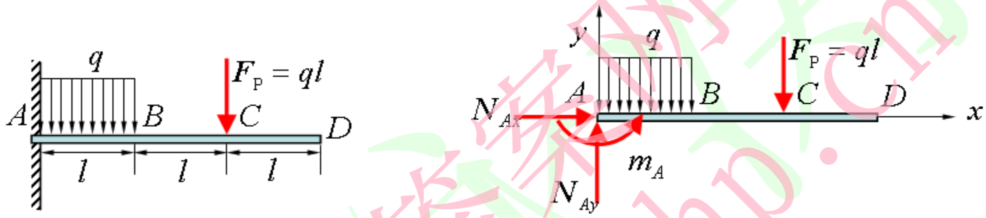
解：

$$\sum M_A = 0,\quad N_B l\sin 30^\circ - \frac{q}{2}l\times\frac{2}{3}l = 0;\quad N_B = \frac{2}{3}ql$$

$$\sum F_x = 0,\quad N_{Ax} = N_B\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}ql$$

$$\sum F_y = 0,\quad N_{Ay} = \frac{1}{2}ql - N_B\sin 30^\circ = \frac{1}{6}ql$$

(b)



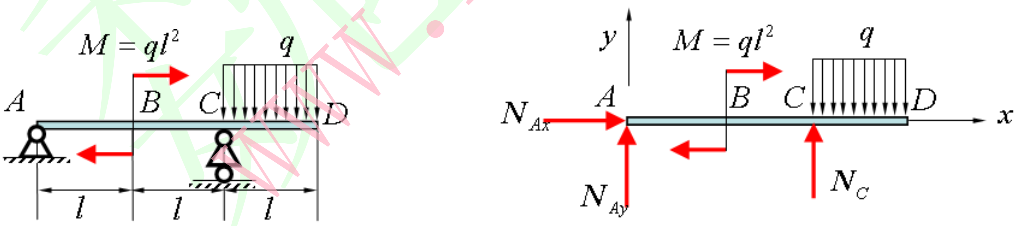
解：

$$\sum F_x = 0,\quad N_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad N_{Ay} = 2ql$$

$$\sum M_A = 0,\quad m_A - 2ql^2 - \frac{ql^2}{2} = 0,\quad m_A = 2.5ql^2$$

(c)



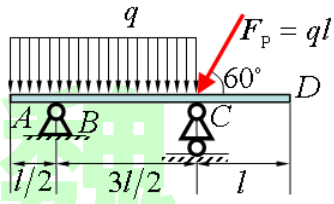
解：

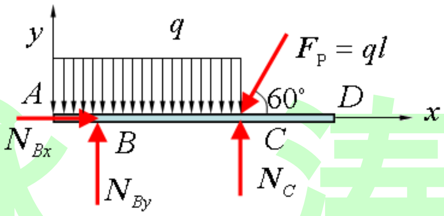
$$\sum M_A = 0,\quad 2N_C l - ql^2 - ql\times 2.5l = 0,\quad N_C = 1.75ql$$

$$\sum F_x = 0,\quad N_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad N_{Ay} + N_C - ql = 0,\quad N_{Ay} = -0.75ql$$

(d)





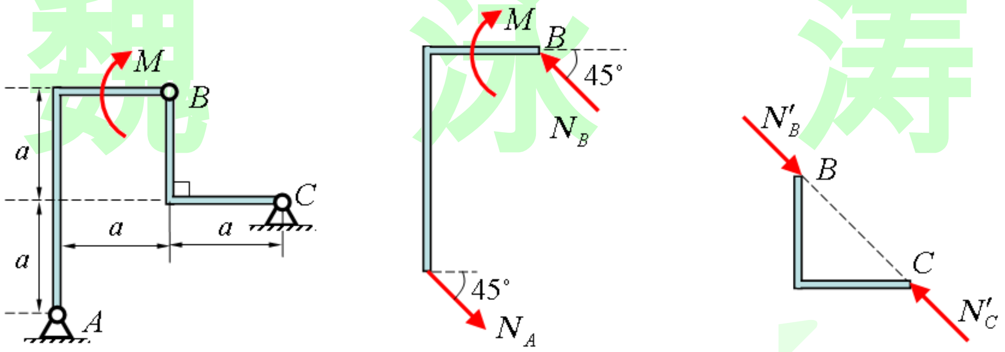
解：

$$\sum M_C = 0，\quad -1.5N_{By}l + 2ql^2 = 0，\quad N_{By} = \frac{4}{3}ql^2$$

$$\sum F_x = 0，\quad N_{Bx} = F_P \sin 30^\circ = \frac{ql}{2}$$

$$\sum F_y = 0，N_{By} + N_C - 2ql - F_P \cos 30^\circ = 0，N_{By} = \frac{2}{3}ql + \frac{\sqrt{3}ql}{2}$$

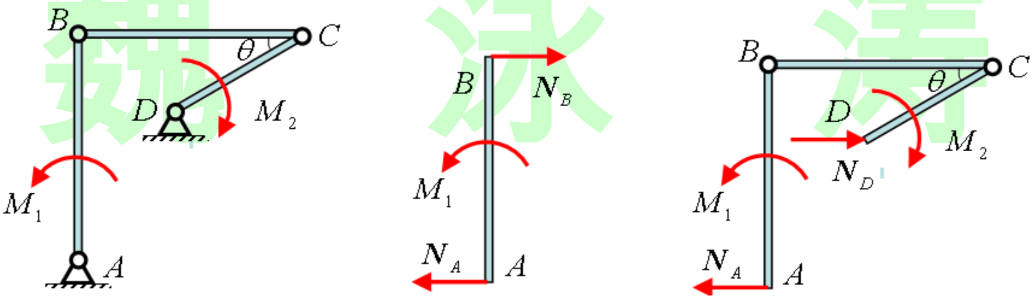
3.2 在图示结构中，二直角杆的自重略去不计，已知力偶矩 M 和长度 a，求支座 A 和 C 的约束力。



解：BC 刚体为二力构件，AB、BC 受力图如上。A、C 处的约束反力构成一对力偶，以平衡主动力偶 M。

$$N_A = N_C = \frac{M}{d} = \frac{\sqrt{2}M}{3a}$$

3.3 四连杆机构 $ABCD$ 在图示位置平衡。已知力偶矩 $M_1=1\text{N}\cdot\text{m}$，$CD=0.4\text{m}$，$AB=0.6\text{m}$，$\theta=30^\circ$，不计杆重，求力偶矩 M_2 和杆 BC 的内力。



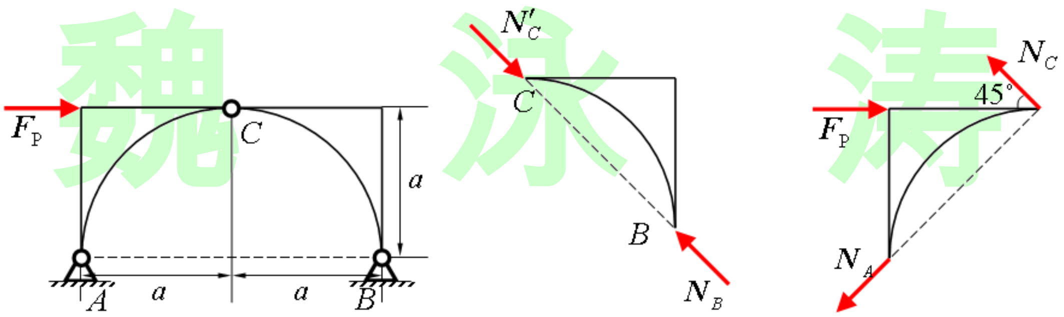
解：由于 BC 刚体是二力构件，AB 受力图如上，其中 $\boldsymbol{N}_A$ 和 $\boldsymbol{N}_B$ 构成一对力偶。

$$N_A=N_B=\frac{M_1}{\overline{AB}}=\frac{5}{3}\text{N}$$

以整体为研究对象，受力图如上，A、D 处约束反力应构成力偶。因此 N_D 也在水平方向上。

$$\sum M_D=0,\quad -N_A(\overline{AB}-\overline{CD}\sin 30^\circ)+M_1-M_2=0,\quad M_2=\frac{1}{3}\text{N}\cdot\text{m}$$

3.4 三铰拱如图所示，已知$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$，不计杆的自重，求支座$A$和$B$的约束力。

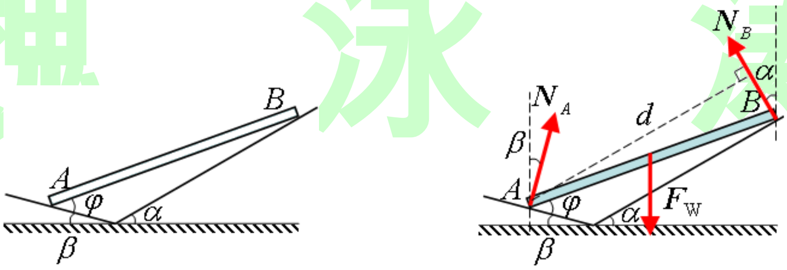


解：BC为二力构件，AC构件所受三力汇交于点C，如上图。所以

$$N_A = N_C = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{\mathrm{P}}$$

$$N_B = N'_C = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{\mathrm{P}}$$

3.5 重 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{W}}$ 的均质杆 AB 的两端分别放在两个固定的光滑斜面上，如图所示，已知二斜面的倾角分别为 α 和 β，求杆平衡时的 φ 角以及 A、B 处的约束反力。



解：杆 AB 受力图如上(注意：在杆 AB 平衡时，$\boldsymbol{N}_A$、$\boldsymbol{N}_B$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{W}}$ 应交于一点，但图中未体现出)。有：

$$N_A\cos\beta + N_B\cos\alpha = F_{\mathrm{W}}$$

$$N_A\sin\beta - N_B\sin\alpha = 0$$

解得：

$$N_A = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}F_{\mathrm{W}}，\quad N_A = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}F_{\mathrm{W}}$$

$$\sum M_A = 0，\quad \frac{F_{\mathrm{W}}l}{2}\cos(\varphi-\beta) = N_B l\sin[90^\circ-(\alpha+\beta-\varphi)]$$

即：

$$\cos\varphi\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta = \frac{2\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}[\cos(\alpha+\beta)\cos\varphi+\sin(\alpha+\beta)\sin\varphi]$$

化简后，得：

$$\tan\varphi = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

答案也可写为：

$$\tan\varphi = \frac{2\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

这是因为：

$$\frac{2\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}+\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$$

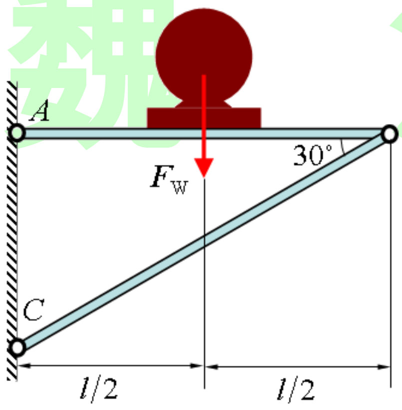
$$= \frac{\sin(\alpha+2\beta)-\sin\alpha+2\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\beta)+\sin(\alpha+\beta-\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$$

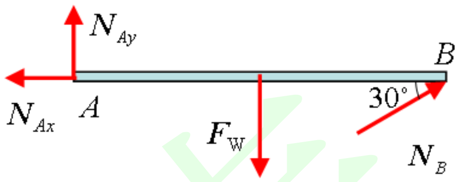
$$= \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2\cos\beta}{\sin\beta}$$

所以：

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

3.6 电动机重5kN，放在水平梁 AB 的中央，如图所示。已知 $\theta = 30^\circ$，不计梁 AB 和撑杆 BC 的自重，求支座 A 的约束力和撑杆 BC 的内力。





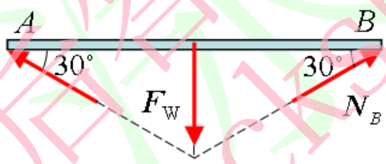
解：易知 BC 为二力构件， AB 受力图如上。

$\sum M_A = 0$， $N_B l \sin 30^\circ - 0.5F_W l = 0$， $N_B = 5\text{kN}$，即 BC 杆受压；

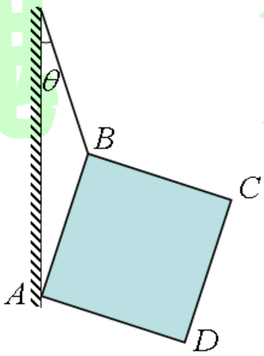
$\sum F_x = 0$， $N_{Ax} = N_B \cos 30^\circ = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\text{kN}$

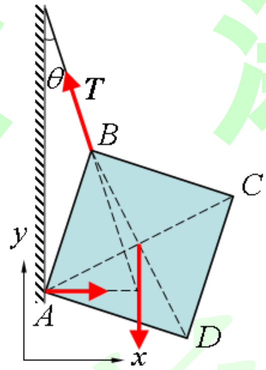
$\sum F_y = 0$， $N_{Ay} = F_W - N_B \sin 30^\circ = 2.5\text{kN}$

也可用三力汇交，求出 $N_A = 5\text{kN}$，方向如图。



3.7 边长为l的正方形薄板$ABCD$的顶点A靠在铅直的光滑墙面上，B点用一长为l的柔绳拉住，如图所示。求平衡时绳与墙面的夹角θ。





解：

$$\sum F_y = 0\text{，}\quad T\cos\theta = F_{\mathrm{W}}\text{，}\quad T = \frac{F_{\mathrm{W}}}{\cos\theta}$$

$$\sum M_A = 0\text{，}\quad T\times 2l\cos\theta\times\sin\theta = F_{\mathrm{W}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}l\cos(45^\circ-\theta)$$

即：

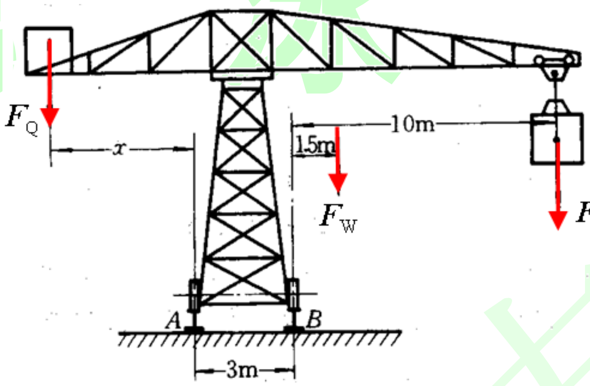
$$\frac{F_{\mathrm{W}}}{\cos\theta}\times 2l\cos\theta\times\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}l(\cos 45^\circ\cos\theta+\sin 45^\circ\sin\theta)F_{\mathrm{W}}$$

$$4\sin\theta = \cos\theta+\sin\theta$$

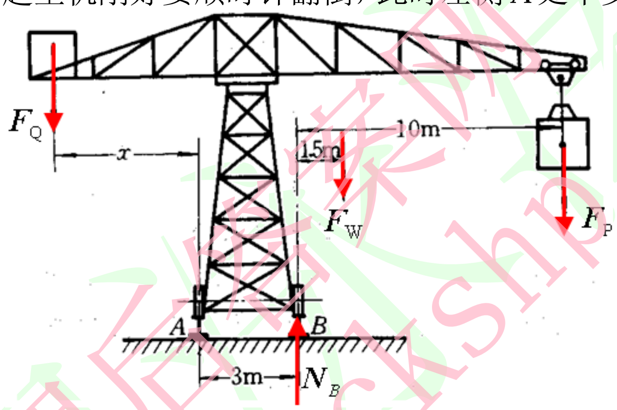
即：

$$\tan\theta = \frac{1}{3}$$

3.8 可沿轨道移动的塔式起重机如图所示。机身重 $F_W = 500\text{kN}$，最大起重重量为 $F_P = 250\text{kN}$。在左侧距左轨 x 处附加一平衡重 F_Q，试确定 F_Q 和 x 之值，使起重机在满载和空载时均不致翻到。



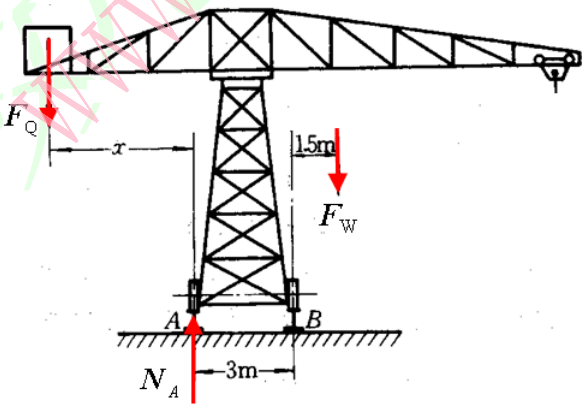
解：设满载时起重机刚好要顺时针翻倒，此时左侧 A 处不受力，受力图如下。



对右侧 B 取矩，

$$F_Q(x+3) \geq 1.5F_W + 10F_P \tag{1}$$

设满载时起重机刚好要逆时针翻倒，此时右侧 B 处不受力，受力图如下。



$$F_Q x \leq 4.5F_W$$

即：

$$-F_Q x \geq -4.5F_W \tag{2}$$

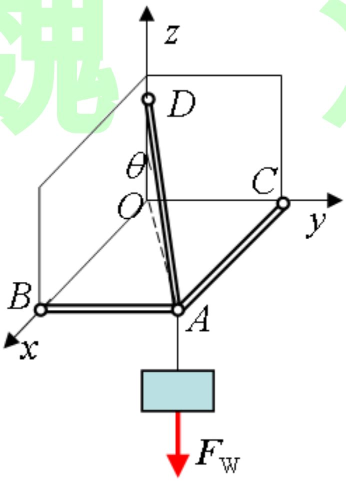
(1) 和 (2) 相加，有

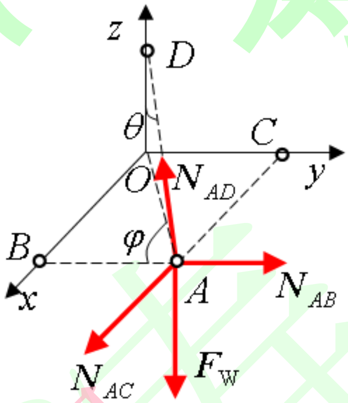
$3F_{\mathrm{Q}} \geq 10F_{\mathrm{P}} - 3F_{\mathrm{W}}$，即 $F_{\mathrm{Q}} \geq 333.3\mathrm{kN}$

若 $F_{\mathrm{Q}} = 333.3\mathrm{kN}$，可得到：

$x \leq 6.75\mathrm{m}$

3.9 挂物架如图所示，三杆的自重略去不计，用球铰链链接于 A 点，$ABOC$ 在水平面内成一矩形。已知 $F_{\mathrm{W}}=5\mathrm{kN}$，$AB=4a$，$AC=3a$，$\theta=30^{\circ}$。试求各杆的内力。





解：取球铰链 A 为研究对象，受力图如上。

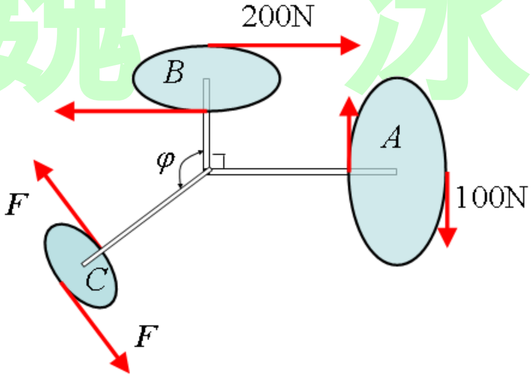
$\sin\varphi=\dfrac{3}{5}$，$\cos\varphi=\dfrac{4}{5}$

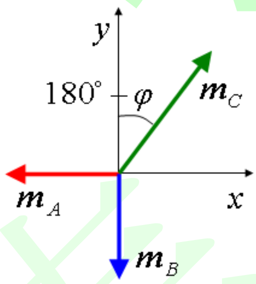
$\sum F_z=0$，$N_{AD}\cos 30^{\circ}-F_{\mathrm{W}}=0$，$N_{AD}=F_{\mathrm{W}}/\cos 30^{\circ}=5.77\mathrm{kN}$；实际受拉

$\sum F_y=0$，$N_{AB}=N_{AD}\sin 30^{\circ}\cos\varphi=2.31\mathrm{kN}$；实际受压

$\sum F_x=0$，$N_{AC}=N_{AD}\sin 30^{\circ}\sin\varphi=1.73\mathrm{kN}$；实际受压

3.10 图示三圆盘 A、B 和 C 的半径分别为 150mm、100mm 和 50mm。三轴 OA、OB 和 OC 在同一平面内。分别作用于三圆盘的各力偶的作用面与盘面重合，组成各力偶的力作用在轮缘上。若此构件是自由的，且不计其自重，求使构件平衡的力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和角 α。





解：由题意知，此三力偶的力偶矩矢量共面，如上图。

$m_A = 30000\text{N}\cdot\text{mm}$；

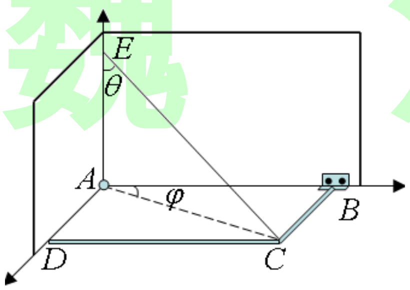
$m_B = 40000\text{N}\cdot\text{mm}$

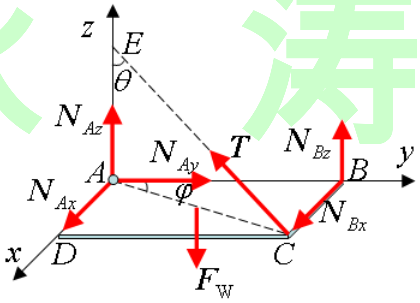
$m_C = \sqrt{m_A^2 + m_B^2} = 50000\text{N}\cdot\text{mm}$

$F = m_C/100 = 500\text{N}$

$\varphi = 180^\circ - \arctan(m_A/m_B) = 143^\circ$

3.11 如图所示，重 200N 的均质长方形薄板用球铰和蝶铰 B 固定在墙上，并用柔绳 CE 将其维持在水平位置。已知 $\theta=60^\circ$，$\varphi=30^\circ$。求绳的拉力和支座反力。





解：长方形薄板受力图如上，设 BC 长度为 a，CD 的长度为 b。

$\sum M_z=0$，$N_{Bx}=0$

$\sum M_y=0$，$\dfrac{a}{2}F_W-Ta\cos\theta=0$，$T=200\text{N}$

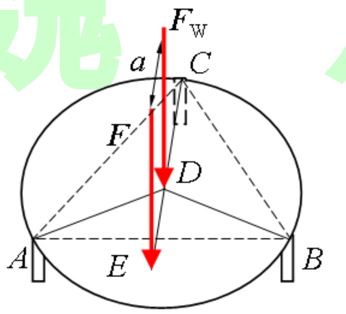
$\sum F_x=0$，$N_{Ax}+N_{Bx}-T\sin\theta\sin\varphi=0$，$N_{Ax}=86.6\text{N}$

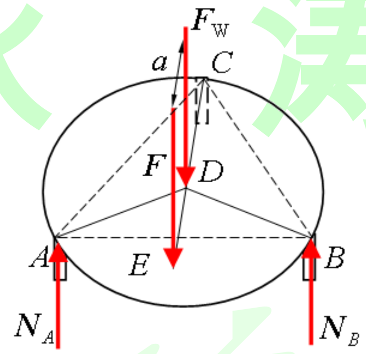
$\sum F_y=0$，$N_{Ay}-T\sin\theta\cos\varphi=0$，$N_{Ay}=150\text{N}$

$\sum M_x=0$，$-\dfrac{b}{2}F_W+Tb\cos\theta+N_{Bz}b=0$，$N_{Bz}=0$

$\sum F_z=0$，$N_{Az}+T\cos\theta-F_W=0$，$N_{Az}=100\text{N}$

3.12 三脚圆桌的半径 $r=500\text{mm}$，重 $F_W=600\text{N}$。圆桌的三脚 A、B 和 C 成一等边三角形。若在中线 CD 上距圆心为 a 的点 E 作用一铅垂力 $F=1500\text{N}$，如图所示。试求使圆桌不致翻到的最大距离。





解：在圆桌要翻倒的瞬间，C 处不受力。因此只需考虑 $\boldsymbol{F}_W$ 和 $\boldsymbol{F}$ 对轴 AB 之矩。

$\boldsymbol{F}_W$ 对 AB 轴之矩：$\dfrac{r}{2}F_W=600\times250\text{N}\cdot\text{mm}$

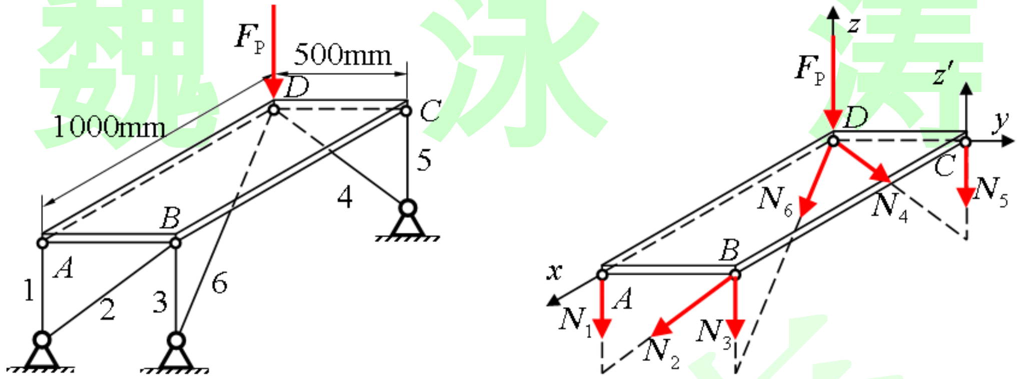
$\boldsymbol{F}$ 对 AB 轴之矩：$-F(a-\dfrac{r}{2})=-1500\times(a-250)\text{N}\cdot\text{mm}$

圆桌不翻倒，有

$600\times250-1500\times(a-250)=0$

$a=350\text{mm}$

3.13 如图所示，六杆支撑一水平面矩形板，在板角处受铅垂力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{P}$ 的作用，杆 1、3 和 5 铅直。设板和杆的自重不计，试求各杆的内力。



解：矩形板受力如上图(假设所有杆件均受拉)。并且取 D 为坐标原点建立坐标系。

$\sum M_z = 0$，$N_2 = 0$

注意到 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_3$ 和 $\boldsymbol{N}_5$ 与竖直方向平行，N_4 与过 C 点的 z' 轴相交，于是有

$\sum M_{z'} = 0$，$N_6 = 0$

$\sum F_x = 0$，$N_4 = 0$

$\sum M_x = 0$，$N_3 = -N_5$

$\sum M_y = 0$，$N_3 = -N_1$

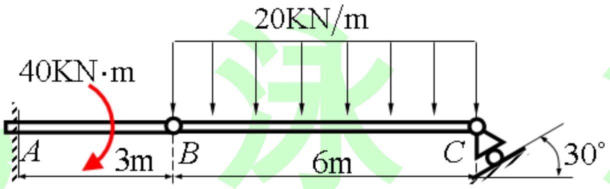
$\sum F_z = 0$，$-N_1 - N_3 - N_5 - F_\mathrm{P} = 0$，得：

$N_1 = -F_\mathrm{P}$，$N_5 = -F_\mathrm{P}$，均受压；

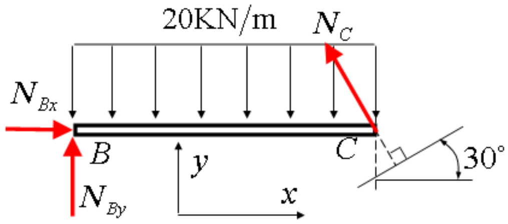
$N_3 = F_\mathrm{P}$，受拉

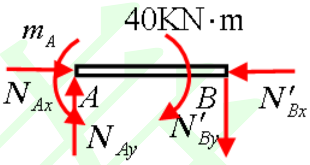
3.14 组合梁如下列各图所示，试求支座反力及中间铰的约束力。

(a)



解：取 BC 为研究对象，受力图如下。





$$\sum M_B = 0,\quad 6N_C\cos 30^\circ - 6\times 20\times 3 = 0,\quad N_C = 40\sqrt{3}\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0,\quad N_{Bx} = N_C \sin 30^\circ = 20\sqrt{3}\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0,\quad N_{By} + N_C\cos 30^\circ - 6\times 20 = 0,\quad N_{By} = 60\text{kN}$$

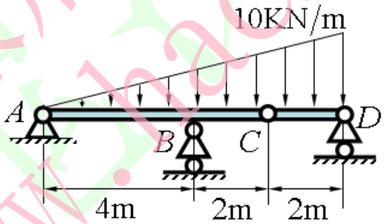
取 AB 为研究对象，受力图如上

$$\sum M_A = 0,\quad m_A - 40 - 3N'_{By} = 0,\quad m_A = 220\text{kN}\cdot\text{m}$$

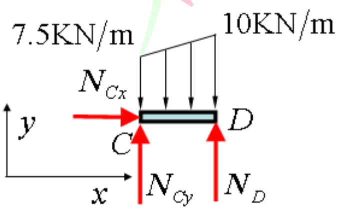
$$\sum F_x = 0,\quad N_{Ax} = N'_{Bx} = 20\sqrt{3}\text{kN}$$

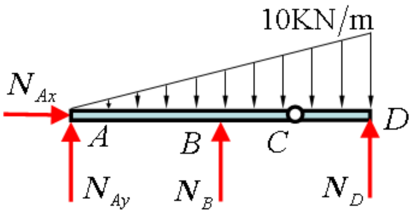
$$\sum F_y = 0,\quad N_{Ay} = N'_{By} = 60\text{kN}$$

(b)



解：取 CD 为研究对象，受力图如下。





$$\sum M_C = 0,\quad 2N_D - 7.5\times 2\times 1 - \frac{1}{2}\times 2\times 2.5\times\frac{4}{3} = 0,\quad N_D = 9.17\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0,\quad N_{Cy} + N_D - \frac{1}{2}(7.5+10)\times 2 = 0,\quad N_{Cy} = 8.33\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0,\quad N_{Cx} = 0$$

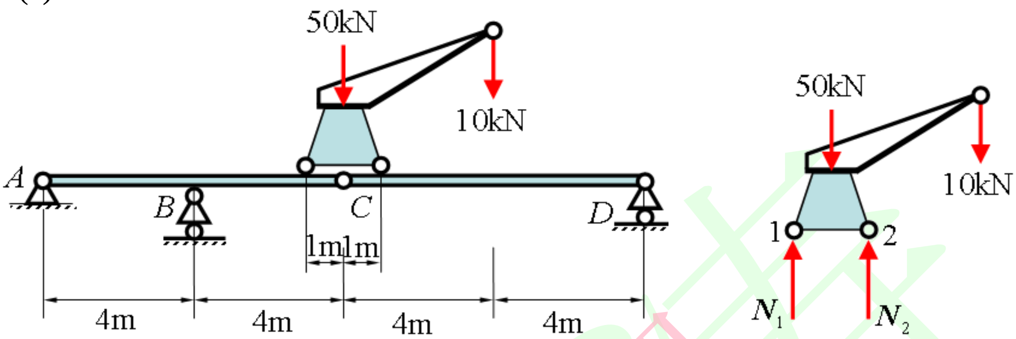
以整体为研究对象，受力图如上。

$$\sum M_A = 0，\ 8N_D + 4N_B - \frac{1}{2}\times 8\times 10\times \frac{16}{3} = 0，\ N_B = 35\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0，\ N_{Ay} + N_B + N_D - \frac{1}{2}\times 8\times 10 = 0，\ N_{Ay} = -4.17\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0，\ N_{Ax} = 0$$

(c)



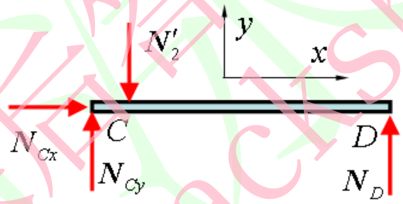
解：以吊车为研究对象，受力图如上。对 1 点取矩

$$-50\times 1 + N_2\times 2 - 5\times 10 = 0，\ N_2 = 50\text{kN}$$

于是，

$$N_1 = 10\text{kN}$$

取 CD 为研究对象，其受力图如下。

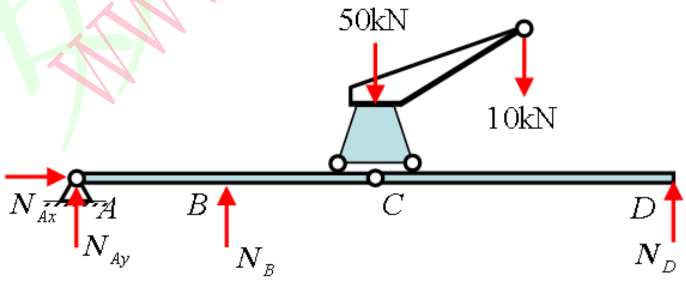


$$\sum M_C = 0，\ 8N_D - N_2'\times 1 = 0，\ N_D = 6.25\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0，\ N_{Cy} + N_D - N_2 = 0，\ N_{Cy} = 43.75\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0，\ N_{Cx} = 0$$

以整体为研究对象，受力图如下。

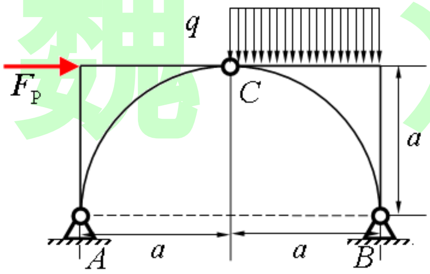


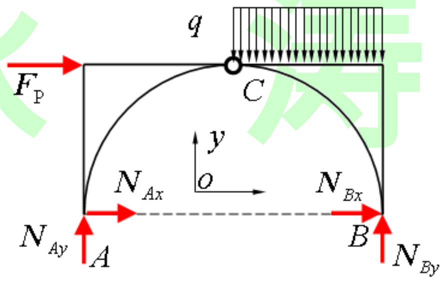
$$\sum M_A = 0，\ 4N_B - 50\times 8 - 10\times 12 + 16N_D = 0，\ N_B = 105\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0，\ N_{Ay} + N_B + N_D - 50 - 10 = 0，\ N_{Ay} = -51.25\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0，\ N_{Ax} = 0$$

3.15 三铰拱如图所示。已知 $F_P = 50\text{kN}$，$q = 20\text{kN/m}$，$a = 5\text{m}$。试求支座 A 和 B 的约束反力。



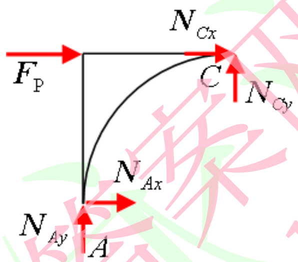


解：以整体为研究对象，受力图如上。

$\sum m_A = 0$，$-50\times5-20\times5\times7.5+N_{By}\times10=0$，$N_{By}=100\text{kN}$

$\sum F_y = 0$，$N_{Ay}+N_{By}-20\times5=0$，$N_{Ay}=0$

以 AC 为研究对象，受力图如下

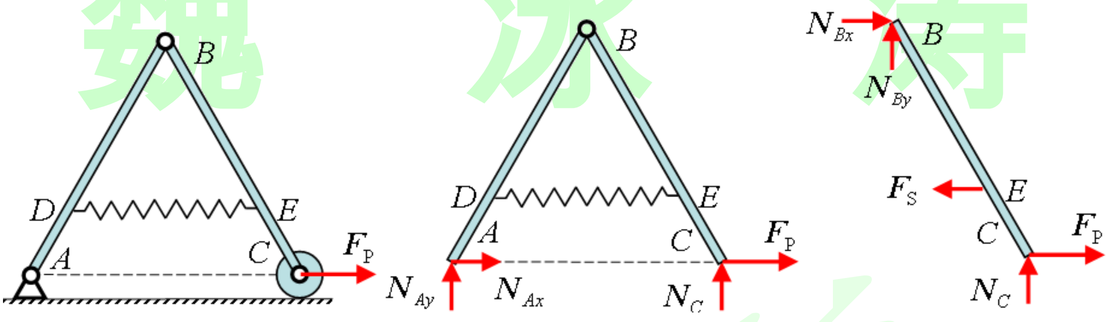


$\sum m_C = 0$，$N_{Ax}\times5-N_{Ay}\times5=0$，$N_{Ax}=0$

再次以整体为研究对象

$\sum F_x = 0$，$N_{Ax}+N_{Bx}+50=0$，$N_{Bx}=-50\text{kN}$

3.16 两等长轻杆在点 B 用铰链连接，又在杆的 D、E 两点之间连一刚性系数为 k 的弹簧，如图所示。已知 $AB = BC = l$， $BD = BE = b$，且当 $AC = a$ 时，弹簧内拉力为零。若在点 C 作用一水平力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$， 试求平衡时 A、C 两点之间的距离。



解：以整体为研究对象，受力图如上。考虑对 A 点的矩平衡，显然

$N_C = 0$

取 BC 为研究对象。设 AC 的距离为 x，则弹簧的伸长 $\varDelta$ 为

$$\varDelta = \frac{b}{l}(x-a)$$

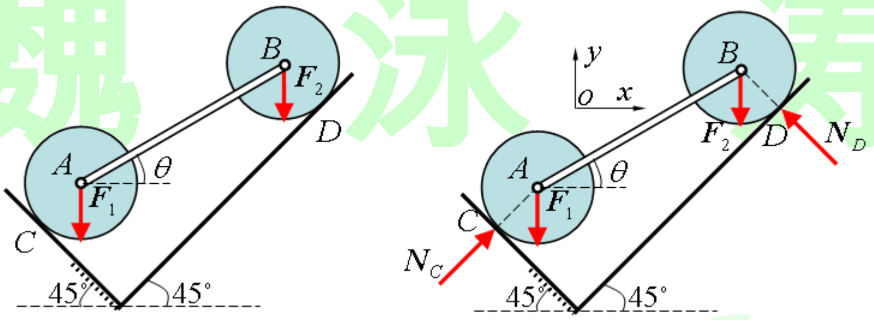
$$F_{\mathrm{S}} = k\varDelta = \frac{bk}{l}(x-a)$$

$$\sum m_B(F) = 0，\quad F_{\mathrm{S}} = \frac{l}{b}F，$$

所以，

$$x = a + \frac{Fl^2}{kb^2}$$

3.17 在杆 AB 两端用光滑圆柱铰链与两轮中心 A、B 连接，并将它们置于互相垂直的两光滑斜面上，如图所示。已知轮重 $F_2=F_1$，杆重不计。求平衡时的 θ 角。



解：整体受力图如上。

$\sum F_x=0$，$N_C=N_D$

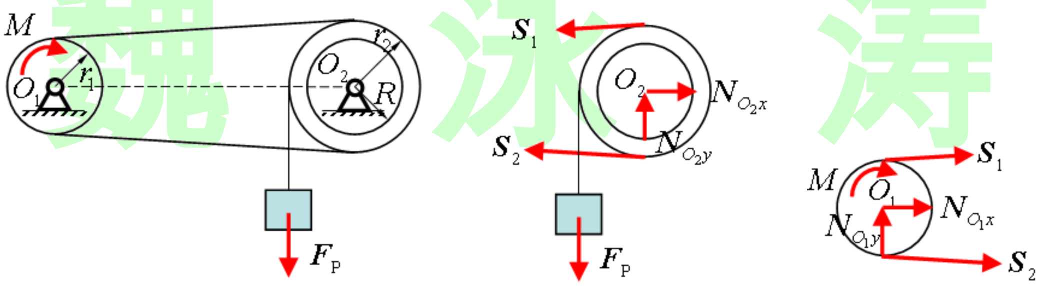
$\sum F_y=0$，$N_C\cos45^\circ+N_D\sin45^\circ=0$，$N_C=N_D=\sqrt{2}F_2$

$\sum M_A=0$，$F_2\cdot\overline{AB}\cdot\cos45^\circ=N_D\cdot\overline{AB}\cdot\cos(45^\circ+\theta)$

所以：

$\theta=0$

3.18 图示传动机构，已知 r_1、r_2 和 R，两轮的重心均位于转轴上，被提升的重物重 F_P。试求匀速提升重物时在左侧轮上施加的力偶矩 M 的大小。



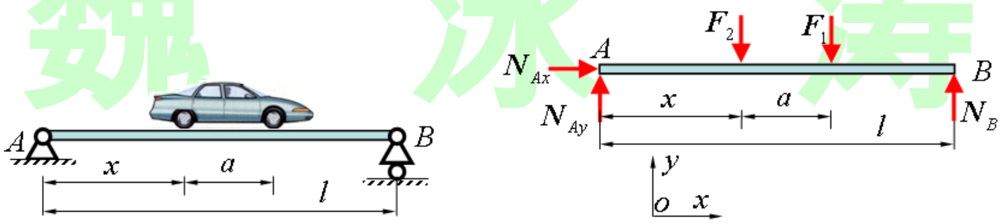
解：以右轮为研究对象，受力图如上。

$\sum M_{O_2}=0$，$(S_1-S_2)r_2+F_P R=0$

以左轮为研究对象，受力图如上

$\sum M_{O_1}=0$，$(S_1-S_2)r_1-M=0$，$M=(S_2-S_1)r_1=\dfrac{F_P R}{r_2}r_1$

3.19 如图所示，汽车停在长l的水平桥面上，前轮和后轮的压力分别为F_1和F_2。汽车前后两轮间的距离为a。试问汽车后轮到支座A的距离x为多大时，方能使支座A和B的压力相等。



解：取桥为研究对象，受力图如上。

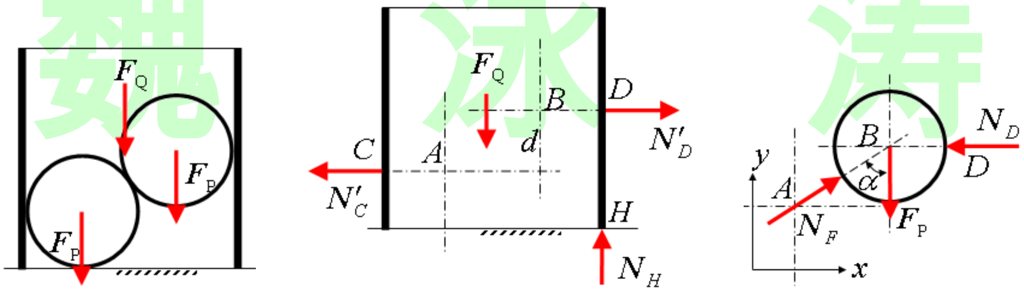
$$\sum M_A = 0，\quad N_B l - F_2 x - F_1(x+a) = 0，\quad N_B = \frac{F_1+F_2}{l}x + \frac{F_1}{l}a$$

$$\sum F_y = 0，\quad N_{Ay} = F_1 + F_2 - \frac{F_1+F_2}{l}x - \frac{F_1}{l}a$$

令$N_{Ay} = N_B$，得：

$$x = \frac{l}{2} - \frac{F_1 a}{F_1+F_2}$$

3.20 半径为 R 的圆形玻璃杯将两个半径为 r ($r<R<2r$)，重 F_{P} 的小球扣在光滑的水平桌面上，如图所示意。求玻璃杯不致翻到的最小重量 F_{Q}。



解：设玻璃杯具有不致翻到的最小重量 F_{Q}。此时地面对玻璃杯的支持力在最右下角，如图所示。显然

$$N'_C = N'_D$$

$$\sum M_H = 0\text{，}\quad F_Q R - N'_C d = 0\text{，}\quad F_Q = N'_C d/R$$

而

$$d = 2\sqrt{r^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{2Rr-R^2}$$

以 B 球(上面的球)为研究对象

$$\sum F_x = 0\text{，}\quad N_F\cos\alpha - N_D = 0$$

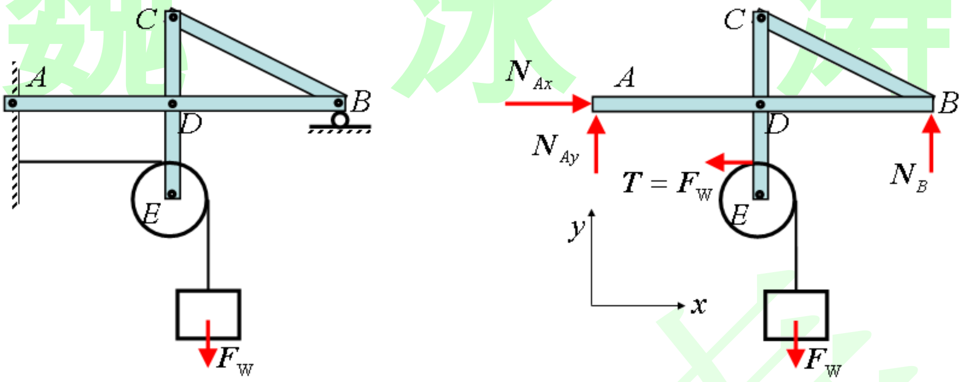
$$\sum F_y = 0\text{，}\quad N_F\sin\alpha - F_{\mathrm{P}} = 0$$

所以，

$$N_D = F_{\mathrm{P}}\cdot\tan\alpha = \frac{2(R-r)}{d}F_{\mathrm{P}}$$

$$F_Q = \frac{dN_D}{R} = \frac{d}{R}\frac{2(R-r)}{d}F_{\mathrm{P}} = 2F_{\mathrm{P}}(1-\frac{r}{R})$$

3.21 图示桁架中，重物由细绳跨过滑轮 E 而水平系于墙上。已知 $F_W = 1200\text{N}$，$AD = BD = 2\text{m}$，$CD = DE = 1.5\text{m}$。不计杆和滑轮的自重，试求支座 A 和 B 处的约束反力，以及杆 BC 的内力。



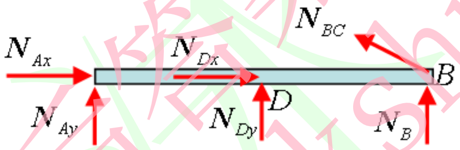
解：取整体为研究对象，受力图如上。

$\sum M_A = 0$，$N_B \overline{AB} - F_W(\overline{AD} + r) - T(\overline{DE} - r) = 0$，$N_B = 1050\text{N}$

$\sum F_x = 0$，$N_{Ax} = T = 1200\text{N}$

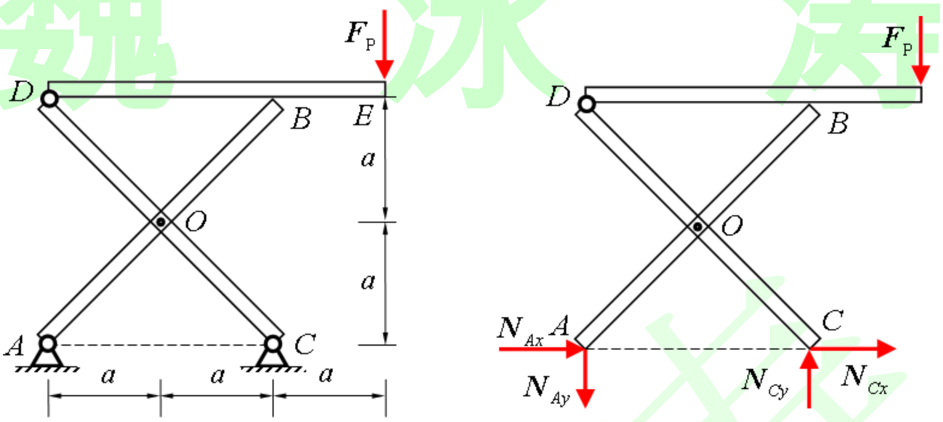
$\sum F_y = 0$，$N_{Ay} = 150\text{N}$

以 ADB 为研究对象，受力图如下。



$\sum M_D = 0$，$N_B \overline{BD} + \frac{3}{5} N_{BC} \overline{BD} - N_{Ay} \overline{AD} = 0$，$N_{BC} = -1500\text{N}$ (受压)

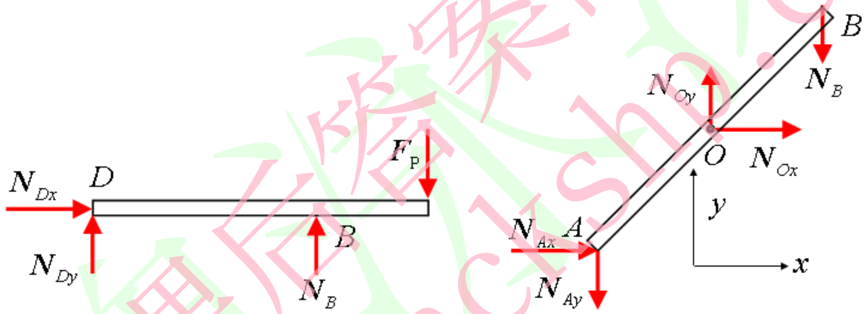
3.22 图示构架由 AB、CD 和 DE 三根杆组成。杆 AB 和 CD 在中点 O 用铰链链接，DE 杆的 E 端作用有一铅直力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$，$B$ 处为光滑接触。不计杆的自重，试求铰链 O 的约束反力。



解：以整体为研究对象，受力图如上。

$\sum M_C=0$，$2aN_{Ay}-aF_{\mathrm{P}}=0$，$N_{Ay}=0.5F_{\mathrm{P}}$

以 DE 为研究对象，受力图如下



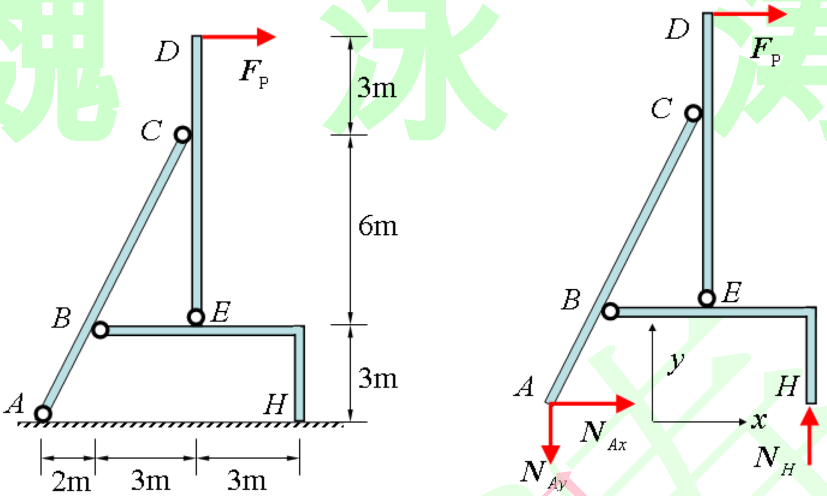
$\sum M_D=0$，$2aN_B-3aF_{\mathrm{P}}=0$，$N_B=1.5F_{\mathrm{P}}$

以 AOB 为研究对象，受力图如上。

$\sum F_y=0$，$-N_{Ay}+N_{Oy}-N_B=0$，$N_{Oy}=2F_{\mathrm{P}}$

$\sum M_A=0$，$N_{Oy}a-N_{Ox}a-2aN_B=0$，$N_{Ox}=-F_{\mathrm{P}}$

3.23 直杆 AC、DE 和直角杆 BH 铰接成图示构架。已知水平力 $F_P = 1.2\text{kN}$，杆的自重不计，H 点支持在光滑的水平面上。不计杆的自重，试求铰链 B 的约束反力。



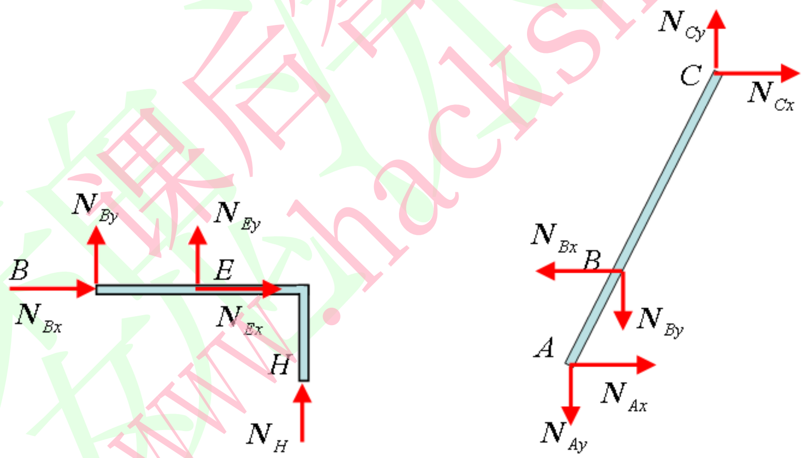
解：以整体为研究对象，受力图如上。

$\sum M_H = 0$，$-12F_P + 8N_{Ay} = 0$，$N_{Ay} = 1.5F_P = 1800\text{N}$

$\sum F_y = 0$，$N_H = 1800\text{N}$

$\sum F_x = 0$，$N_{Ax} = -1200\text{N}$(实际方向水平向左)

以 BEH 为研究对象，受力图如下

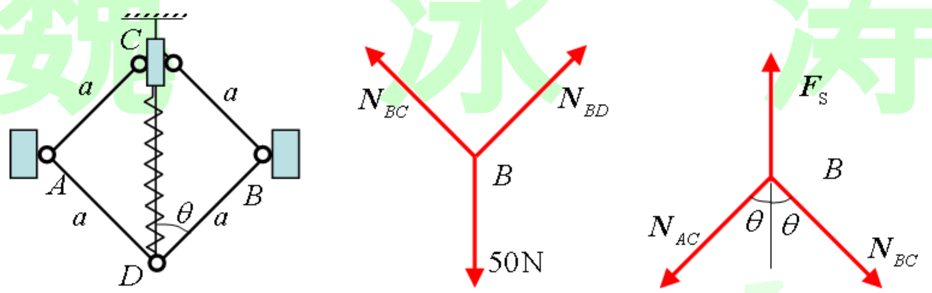


$\sum M_E = 0$，$3N_{By} - 3N_H = 0$，$N_{By} = 1800\text{N}$

以 ABC 为研究对象，受力图如上

$\sum M_C = 0$，$9N_{Ax} + 3N_{By} + 5N_{Ay} - 6N_{Bx} = 0$，$N_{Bx} = 600\text{N}$

3.24 图示机构由两个重50N的集中质量(几何尺寸忽略不计)，四根等长轻杆及刚度系数 $k=8\,\mathrm{N/mm}$ 的弹簧组成，已知 $a=200\mathrm{mm}$，弹簧未变形时，$\theta=45^\circ$。不计算摩擦，试求机构平衡时的 θ 角。



解：以 B 为研究对象，受力图如上。其中 BC 杆受拉，BD 杆受压。

$$N_{BC}=\frac{25}{\cos\theta^\circ}$$

由对称性，

$$N_{AC}=\frac{25}{\cos\theta^\circ}$$，也受拉。

当机构平衡时，弹簧变形为 $\Delta=\sqrt{2}a-2a\cos\theta=(\sqrt{2}-2\cos\theta)a$

以 C 为研究对象，受力图如上。

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}=8\Delta=8(\sqrt{2}-2\cos\theta)a$$

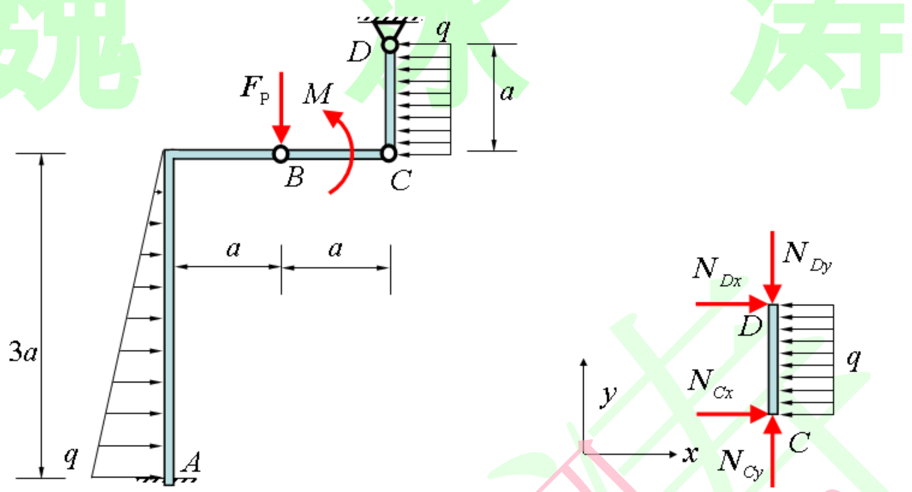
于是有：

$$2N_{BC}\cdot\cos\theta=8(\sqrt{2}-2\cos\theta)\times 200$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{64}$$

$$\theta=46.25^\circ$$

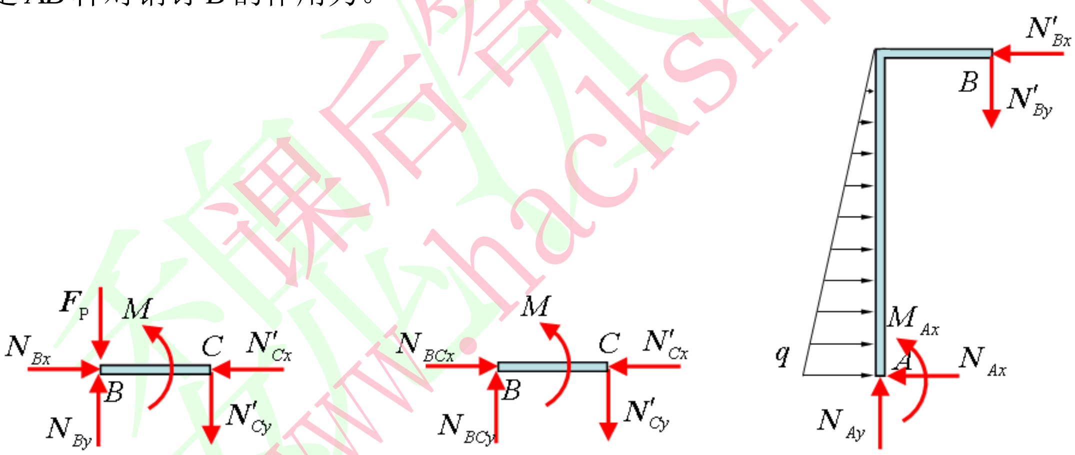
3.25 构架由直杆 BC、CD 和直角杆 AB 组成，如图所示。在铰链 B 的销钉上作用有铅垂力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$。已知 q、a，且 $M=qa^2$，求固定端 A 的约束反力及销钉 B 对 BC 杆、AB 杆的作用力。



解：取 CD 为研究对象，受力图如上。

$\sum m_D(\boldsymbol{F})=0$，$N_{Cx}=0.5qa$

取直杆 BC 与销钉 B 组成的系统为研究对象，其受力图如下。N_{Bx}、N_{By} 就是 AB 杆对销钉 B 的作用力。



$\sum F_x=0$，$N_{Bx}=0.5qa$

$\sum m_C(\boldsymbol{F})=0$，$N_{By}=F_{\mathrm{P}}+qa$

取直杆 BC(不含销钉 B)为研究对象，其受力图如上。

$\sum F_x=0$，$N_{BCx}=0.5qa$

$\sum m_C(\boldsymbol{F})=0$，$N_{BCy}=qa$

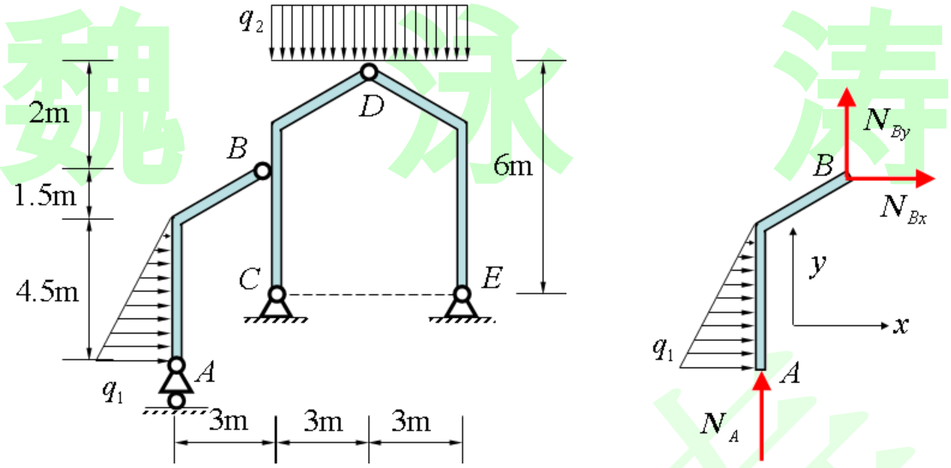
取 AB 杆为研究对象(不含销钉 B)，其受力图如下。$\boldsymbol{N}'_{Bx}$、$\boldsymbol{N}'_{By}$ 就是销钉 B 对 AB 杆的作用力。

$\sum F_x=0$，$N_{Ax}=qa$

$\sum F_y = 0$ ， $N_{Ay} = F_{\mathrm{P}} + qa$

$\sum m_A(\boldsymbol{F}) = 0$ ， $M_A = (F_{\mathrm{P}} + qa)a$

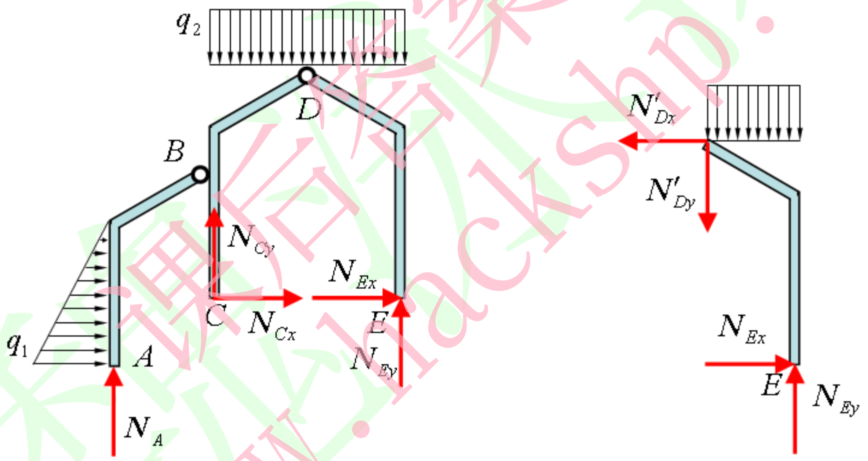
3.26 静定刚架如图所示。已知 $q_1 = 2\text{kN/m}$，$q_2 = 4\text{kN/m}$。试求支座 A、C 和 E 的约束反力。



解：以 AB 为研究对象，受力图如上。

$\sum M_B = 0$，$\dfrac{1}{2}q_1 \times 4.5 \times 4.5 - 3N_A = 0$，$N_A = 6.75\text{kN}$

以整体为研究对象，受力图如下。



$\sum M_C = 0$，$6N_{Ey} + \dfrac{1}{2}q_1 \times 4.5 \times 0.5 - 3N_A - 6q_2 \times 3 = 0$，$N_{Ey} = 15\text{kN}$

$\sum F_y = 0$，$N_A + N_{Cy} + N_{Ey} - 6q_2 = 0$，$N_{Cy} = 2.25\text{kN}$

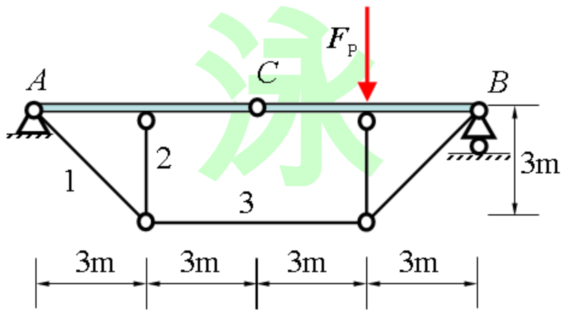
以 DE 为研究对象，受力图如上。

$\sum M_D = 0$，$3N_{Ey} + 6N_{Ex} - 3q_2 \times 1.5 = 0$，$N_{Ex} = -4.5\text{kN}$

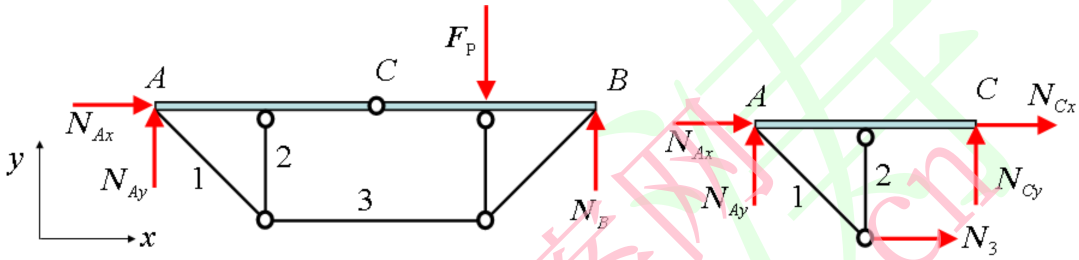
再次以整体为研究对象

$\sum F_y = 0$，$N_{Cx} + N_{Ey} + \dfrac{1}{2}q_1 \times 4.5 = 0$，$N_{Cx} = 0$

3.27 组合结构如图所示，试求在载荷 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 作用下，杆1、2和3所受的力。



解：以整体为研究对象，受力图如下。

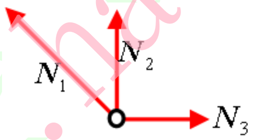


$$\sum M_B=0,\quad 3F_{\mathrm{P}}-12N_{Ay}=0,\quad N_{Ay}=\frac{1}{4}F_{\mathrm{P}}$$

以 AC 、杆 1、2 为研究对象，受力图如上。

$$\sum M_C=0,\quad 3N_3-6N_{Ay}=0,\quad N_3=\frac{1}{2}F_{\mathrm{P}}$$

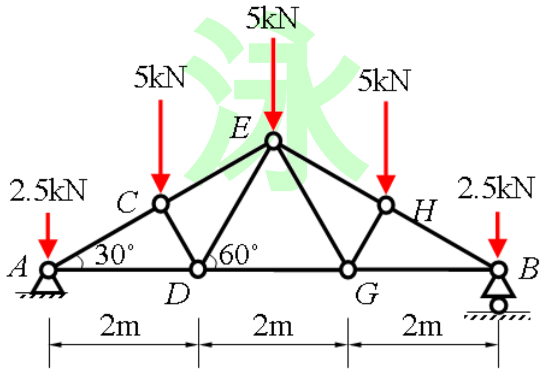
以连接杆 1、2 和 3 的节点为研究对象，受力图如下。



$$N_1=\frac{\sqrt{2}}{2}F_{\mathrm{P}},\quad N_2=-\frac{1}{2}F_{\mathrm{P}}(\text{受压})$$

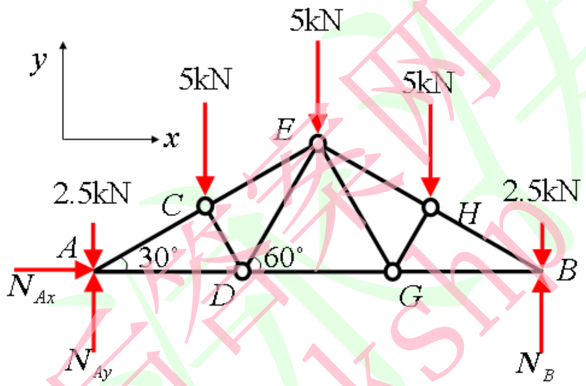
3.29 试用节点法计算图示桁架各杆的内力。

(a)



(a)

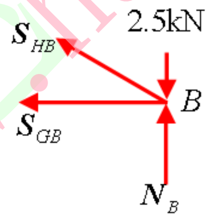
解：以整体为研究对象。受力图如下。



由对称性可知，$S_{AC}=S_{HB}$，$S_{CE}=S_{EH}$，$S_{CD}=S_{GH}$，$S_{ED}=S_{EG}$

$\sum M_A=0$，$5\times1.5+5\times3+5\times4.5+2.5\times6-6N_B=0$，$N_B=10\text{kN}$

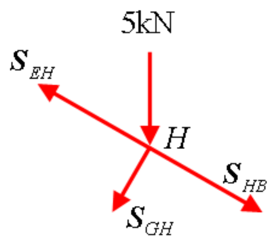
研究节点 B



$S_{HB}\sin30^\circ+10-2.5=0$，$S_{HB}=-15\text{kN}$，受压

$S_{HB}\cos30^\circ+S_{GB}=0$，$S_{GB}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\text{kN}$，受拉

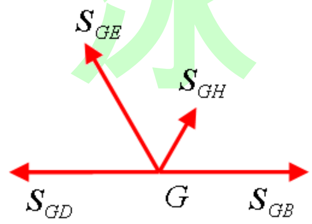
研究节点 H



$S_{GH}+5\cos 30^{\circ}=0$，$S_{GH}=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\text{kN}$，受压

$S_{EH}+5\sin 30^{\circ}-S_{HB}=0$，$S_{GH}=-12.5\text{kN}$，受压

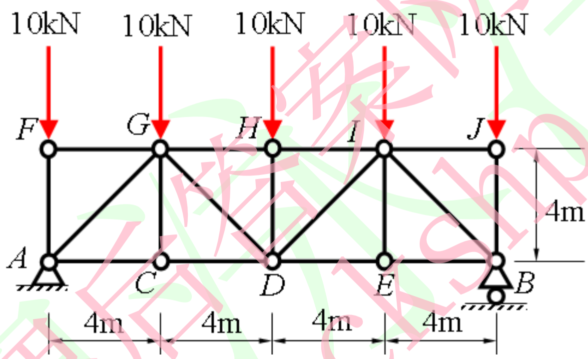
研究节点 G



$S_{GE}\cos 30^{\circ}+S_{GH}\cos 30^{\circ}=0$，$S_{GE}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\text{kN}$，受拉

$S_{GB}+S_{GH}\cos 60^{\circ}-S_{GE}\cos 60^{\circ}-S_{GD}=0$，$S_{GD}=5\sqrt{3}\text{kN}$，受拉

(b)



(b)

解：容易判断杆 FG、CG、EI 和 IJ 为零力杆，由此立刻可知：

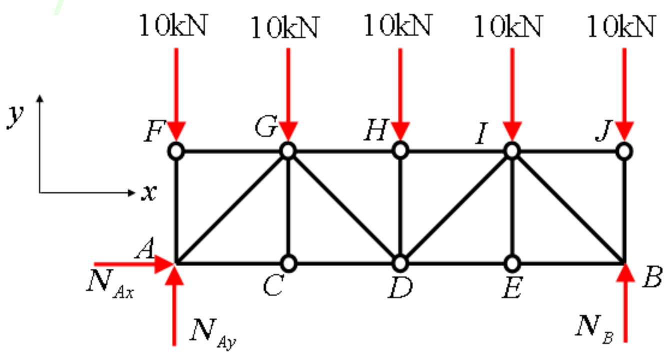
$S_{AF}=-10\text{kN}$，受压

$S_{BJ}=-10\text{kN}$，受压

$S_{DH}=-10\text{kN}$，受压

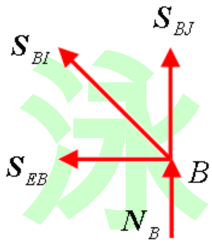
同时，由对称性可知，$S_{AG}=S_{BI}$，$S_{DG}=S_{DI}$，$S_{AC}=S_{CD}=S_{DE}=S_{EB}$，$S_{GH}=S_{IH}$

以整体为研究对象，受力图如下。



$\sum M_A=0$，$16N_B-10\times 16-10\times 12-10\times 8-10\times 4=0$，$N_B=25\text{kN}$

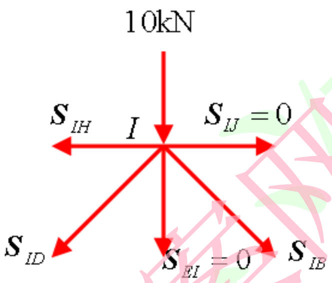
以节点 B 为研究对象



$S_{BI}\cos 45^{\circ}+S_{BJ}+N_B=0$， $S_{BI}=-15\sqrt{2}\text{kN}$，受压

$S_{BI}\cos 45^{\circ}+S_{EB}=0$， $S_{EB}=15\text{kN}$，受拉

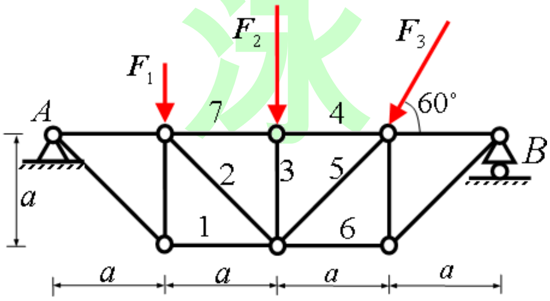
以节点 I 为研究对象。



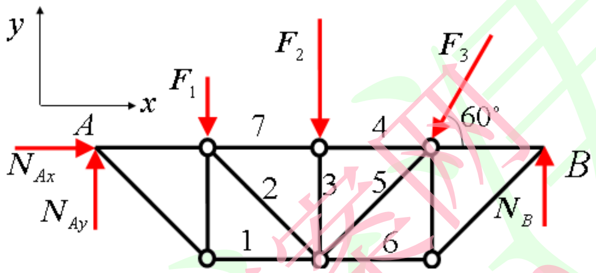
$10+S_{ID}\cos 45^{\circ}+S_{IB}\cos 45^{\circ}=0$， $S_{ID}=5\sqrt{2}\text{kN}$，受拉

$S_{IB}\cos 45^{\circ}-S_{IH}-S_{ID}\cos 45^{\circ}=0$， $S_{IH}=-20\text{kN}$，受压

3.29 平面桁架受力如图示，已知 $F_1=10\text{kN}$， $F_2=F_3=20\text{kN}$，试求桁架 1、2、3 和 4 杆的内力。



解：以整体为研究对象，受力图如下

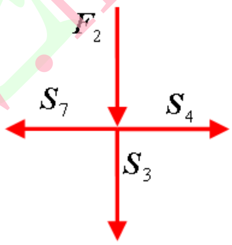


$\sum M_A=0$， $aF_1+2aF_2+3aF_3\sin 60^\circ-4aN_B=0$， $N_B=\dfrac{50+30\sqrt{3}}{4}\text{kN}$

$\sum F_x=0$， $N_{Ax}=10\text{kN}$

$\sum F_y=0$， $N_B+N_{Ay}-F_1-F_2-F_3\sin 60^\circ=0$， $N_{Ay}=\dfrac{70+10\sqrt{3}}{4}\text{kN}$

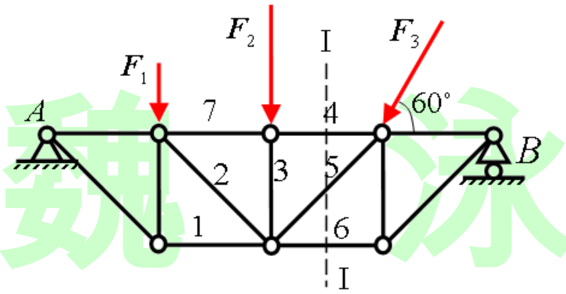
以 3、4 和 7 杆的铰接点为研究对象

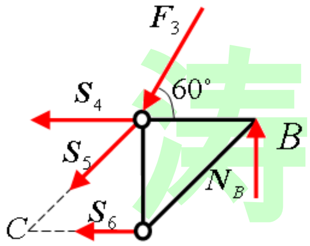


$S_3=-20\text{kN}$，受压；

$S_7=S_4$

以截面 I 打断桁架如图，取右边为研究对象。

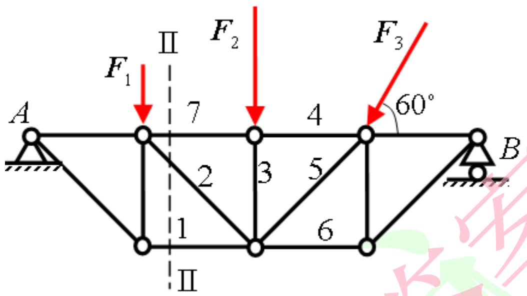


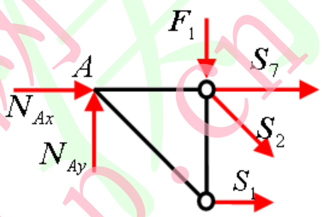


$\sum M_C = 0$， $2aN_B - aS_4 - aF_3\sin 60^\circ + aF_3\cos 60^\circ = 0$， $S_4 = -(35+5\sqrt{3})\text{kN}$，受压

$S_7 = S_4 = -(35+5\sqrt{3})\text{kN}$， 受压

以截面 II 打断桁架如图，取左边为研究对象。

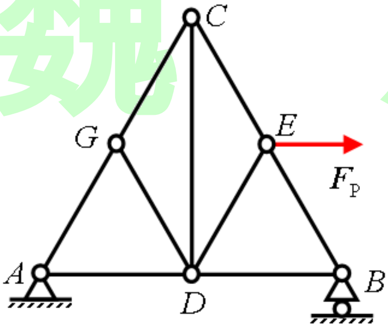


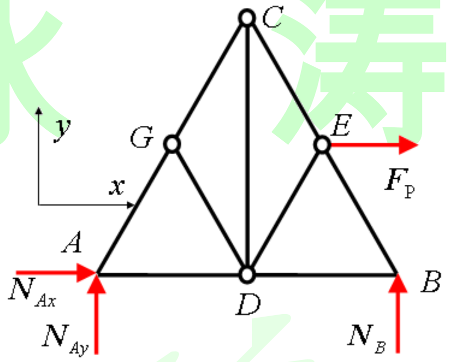


$\sum F_y = 0$， $N_{Ay} - F_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}S_2 = 0$， $S_2 = \dfrac{15\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{2}\text{kN}$，受拉

$\sum F_x = 0$， $N_{Ax} + S_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}S_2 + S_7 = 0$， $S_2 = \dfrac{35+5\sqrt{3}}{2}\text{kN}$，受拉

3.30 平面桁架如图所示。ABC 为等边三角形，D、E 和 G 分别为三条边的中点在节点 E 上作用有水平力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$。试求 CD 杆的内力。

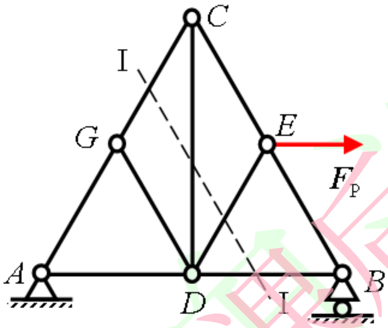


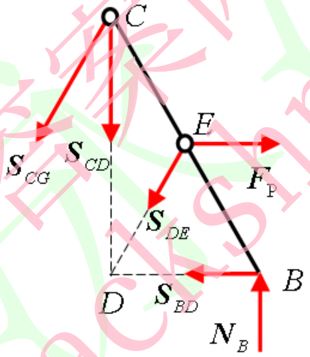


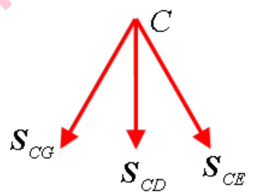
解：以整体为研究对象，受力图如上。

$$\sum M_A = 0,\quad N_B \cdot \overline{AB} - \frac{\sqrt{3}}{4}F_{\mathrm{P}} \cdot \overline{AB} = 0,\quad N_B = \frac{\sqrt{3}}{4}F_{\mathrm{P}}$$

以截面 I 打断桁架如图，取右边为研究对象。







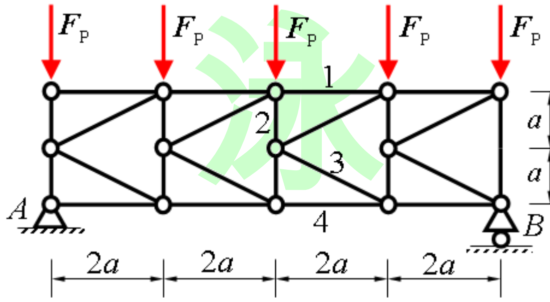
$$\sum M_D = 0,\quad \frac{N_B}{2}\cdot\overline{AB} + \frac{\sqrt{3}}{4}S_{CG}\cdot\overline{AB} - \frac{\sqrt{3}}{4}F_{\mathrm{P}}\cdot\overline{AB} = 0,\quad S_{CG} = \frac{F_{\mathrm{P}}}{2}$$

取节点 C 为研究对象，受力图如上。

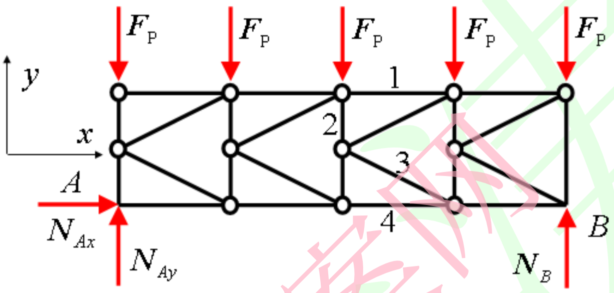
$$S_{CG} = S_{CE}$$

$$S_{CD} + S_{CG}\cos 30^{\circ} + S_{CE}\cos 30^{\circ} = 0,\quad S_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F_{\mathrm{P}}$$

3.31 试求图示桁架 1、2、3、4 杆的内力。



解：以整体为研究对象，受力图如下。

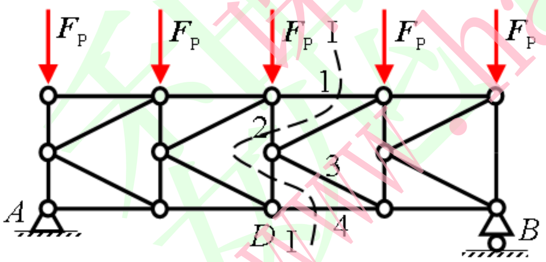


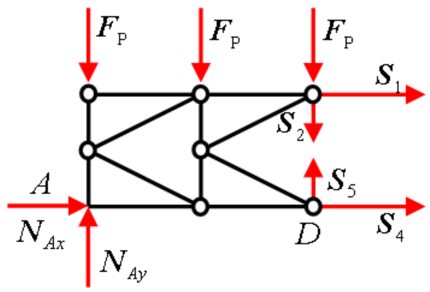
$$\sum M_B = 0,\quad 8aN_{Ay} - 8aF_P - 6aF_P - 4aF_P - 2aF_P = 0,\quad N_{Ay} = 2.5F_P$$

$$\sum F_x = 0,\quad N_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad N_B = 2.5F_P$$

以截面 I 截断桁架如图，取左边为研究对象。

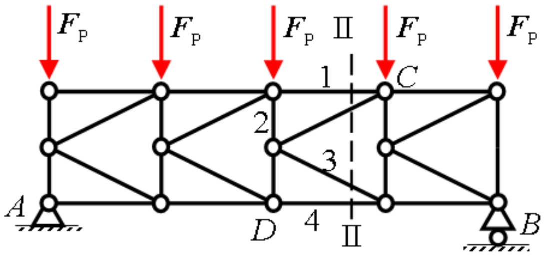


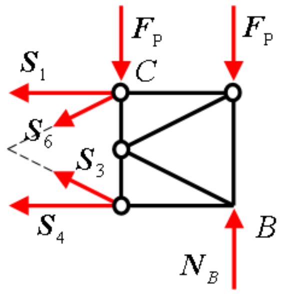


$$\sum M_D = 0,\quad 4aN_{Ay} + 2aS_1 - 4aF_P - 2aF_P = 0,\quad S_1 = -2F_P\text{，受压}$$

$$\sum F_x = 0,\quad S_4 = 2F_P\text{，受拉}$$

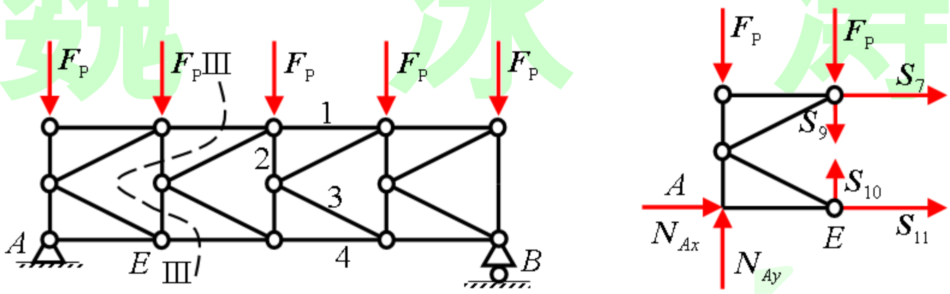
以截面 II 截断桁架如图，取右边为研究对象。





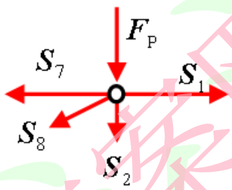
$\sum M_C = 0$， $2aF_P + 2aS_4 + \frac{4}{\sqrt{5}} aS_3 - 2aN_B = 0$， $S_3 = -\frac{\sqrt{5}}{4} F_P$， 受压

以截面 III 截断桁架如图，取右边为研究对象。



$\sum M_E = 0$， $2aN_{Ay} + 2aS_7 - 2aF_P = 0$， $S_7 = -1.5F_P$

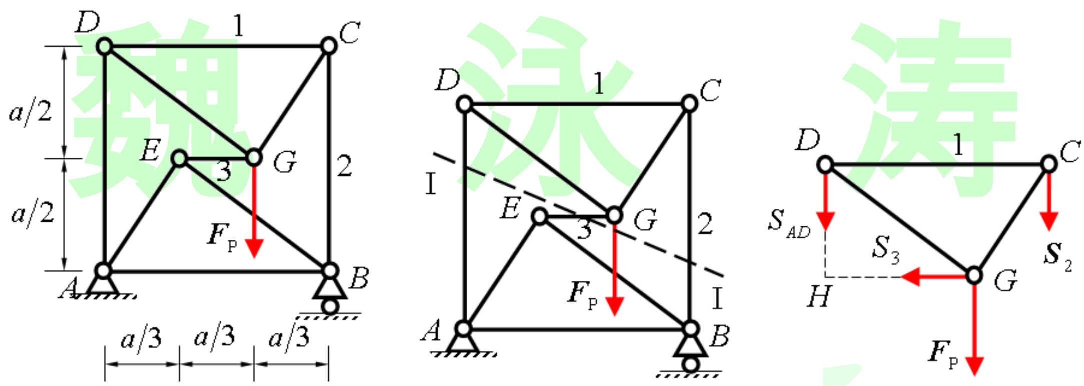
取连接 1、2、7、8 杆的节点为研究对象，受力图如下



$S_1 - S_7 - \frac{2}{\sqrt{5}} S_8 = 0$， $S_8 = -\frac{\sqrt{5}}{4} F_P$

$-S_2 - F_P - \frac{1}{\sqrt{5}} S_8 = 0$， $S_2 = -\frac{3}{4} F_P$， 受压

3.32 试求图示桁架 1、2、3 杆的内力。

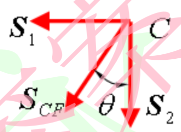


解：取截面 I 截断桁架如图，取上部为研究对象。

$\sum M_H = 0$， $F_P \times \dfrac{2}{3}a + S_2 \times a = 0$， $S_2 = -\dfrac{2}{3}F_P$，受压

$\sum F_x = 0$， $S_3 = 0$

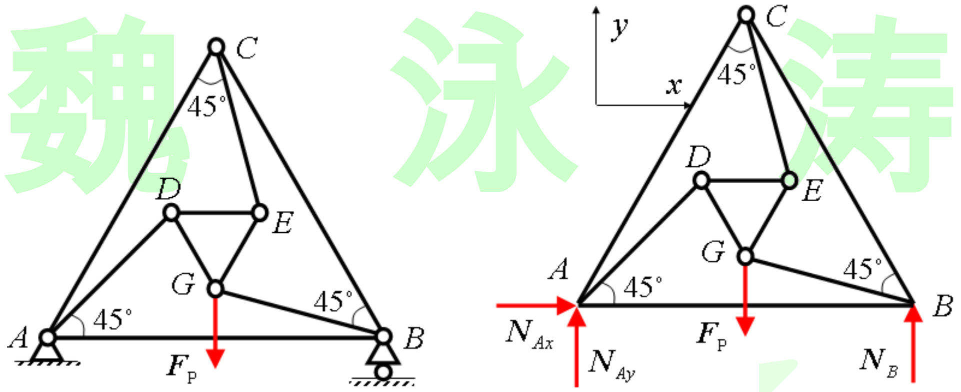
取节点 C 为研究对象，受力图如下



$\theta = \arctan(\dfrac{2}{3})$

$S_1 = S_2 \tan\theta = -\dfrac{2}{3}F_P \times \dfrac{2}{3} = -\dfrac{4}{9}F_P$，受压

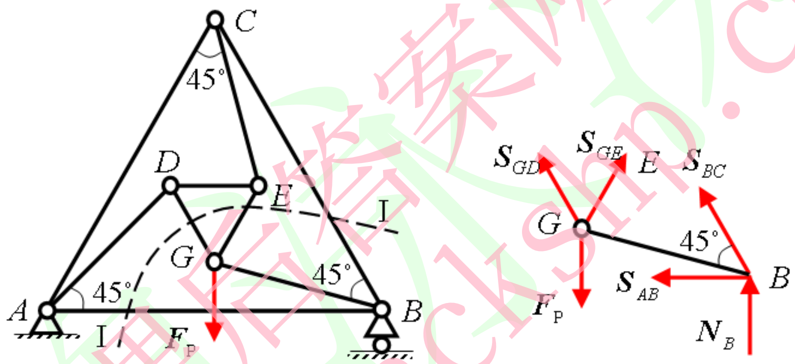
3.33 试求图示桁架 AB 杆的内力。



解：取整体为研究对象，受力图如上，显然

$$N_B = N_{Ay} = \frac{F_P}{2}，\quad N_{Ax} = 0$$

以截面 I 截断桁架如图，取右边为研究对象。

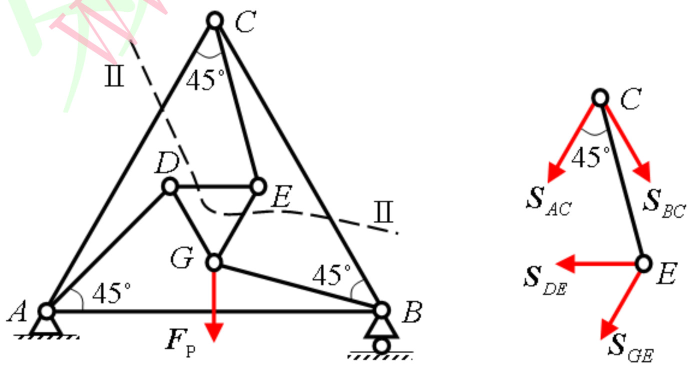


$$\sum M_G = 0，\quad S_{AB}\overline{GB}\sin 15^\circ - S_{BC}\overline{GB}\sin 45^\circ - N_B\overline{GB}\cos 15^\circ = 0$$

即：

$$S_{AB}\sin 15^\circ - S_{BC}\sin 45^\circ - N_B\cos 15^\circ = 0 \tag{1}$$

以截面 II 截断桁架如图，取上边为研究对象

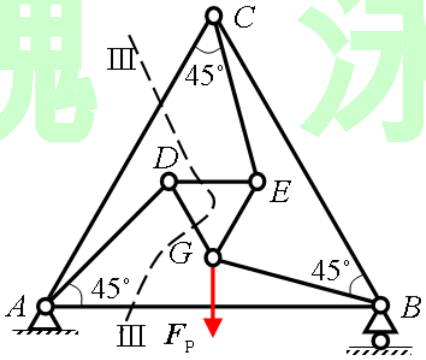


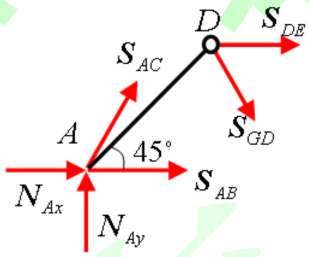
$$\sum M_E = 0，\quad S_{BC}\overline{EC}\sin 15^\circ - S_{AC}\overline{EC}\sin 45^\circ = 0$$

即：

$$S_{BC}\sin 15^\circ - S_{AC}\sin 45^\circ = 0 \tag{2}$$

以截面 III 截断桁架如图，取左边为研究对象





$$\sum M_D = 0，\quad S_{AB}\overline{DA}\sin 45^\circ - S_{AC}\overline{DA}\sin 15^\circ - N_{Ay}\overline{DA}\sin 45^\circ = 0$$

即：

$$S_{AB}\sin 45^\circ - S_{AC}\sin 15^\circ - N_{Ay}\sin 45^\circ = 0 \tag{3}$$

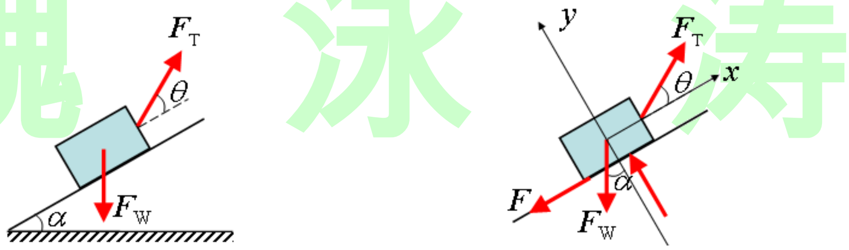
将(2)带入(1)，得

$$S_{AB}\sin^2 15^\circ - S_{AC}\sin^2 45^\circ - N_B\cos 15^\circ\sin 15^\circ = 0 \tag{4}$$

联立求解(3)和(4)

$$S_{AB} = \frac{\begin{vmatrix} \sin 45^\circ N_{Ay} & -\sin 15^\circ \\ \cos 15^\circ\sin 15^\circ N_B & -\sin^2 45^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 45^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin^2 15^\circ & -\sin^2 45^\circ \end{vmatrix}} = 0.4296F_P$$

3.34 重 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{W}}$ 的物体放在倾角为 α 的斜面上，如图所示。已知接触处的摩擦系数为 f_{s}，求拉动物体所需的力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$，并求角 θ 等于多大时，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 具有极小值。



解：设重物处于向上滑动的临界状态，此时所受摩擦力为最大静滑动摩擦力。重物受力图如上。

$$\sum F_y = 0, \quad N = -F_{\mathrm{T}}\sin\theta + F_{\mathrm{W}}\cos\alpha$$

得 A、B 间的最大静滑动摩擦力

$$F = f_{\mathrm{s}}N = f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{W}}\cos\alpha - f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{T}}\sin\theta$$

$$\sum F_x = 0, \quad F_{\mathrm{T}}\cos\theta - F - F_{\mathrm{W}}\sin\alpha = 0$$

得

$$F_{\mathrm{T}} = \frac{f_{\mathrm{s}}\cos\alpha + \sin\alpha}{f_{\mathrm{s}}\sin\theta + \cos\theta}F_{\mathrm{W}}$$

令：$\varphi = \arctan f_{\mathrm{s}}$，则

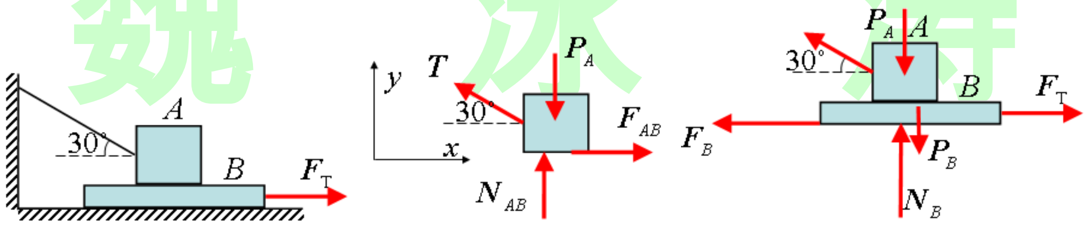
$$F_{\mathrm{T}} = \frac{\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi}F_{\mathrm{W}} = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\theta-\varphi)}F_{\mathrm{W}}$$

显然，当 $\theta = \varphi$ 时，F_{T} 有极小值，

$$F_{\mathrm{Tmin}} = \sin(\alpha+\varphi)F_{\mathrm{W}}$$

注意：以上求解，不考虑重物翻倒的可能。

3.35 重 5kN 的物体 A 放在重 2kN 的物体 B 上面，A 与墙之间用一绳连接，如图所示。已知物体 B 与水平面之间的摩擦系数为 $f_1 = 0.2$，物体 A 与物体 B 之间的摩擦系数为 $f_2 = 0.25$，求拉动物体 B 所需的最小力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$。



解：设拉动物体 B 的最小力为 $\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$，则此时 A 与 B、B 与地面间的静摩擦力都达到最大值。

以 A 为研究对象，受力图如上

$\sum F_y = 0$，$N_{AB} = P_A - T\sin 30^\circ$

得 A、B 间的最大静滑动摩擦力

$$F_{AB} = f_2 N_{AB} = 0.25(P_A - 0.5T)$$

$\sum F_x = 0$，$F_{AB} - T\cos 30^\circ = 0$

得：

$$T = \frac{f_2 P_A}{\cos 30^\circ + \dfrac{f_2}{2}} = 1.261\mathrm{kN}$$

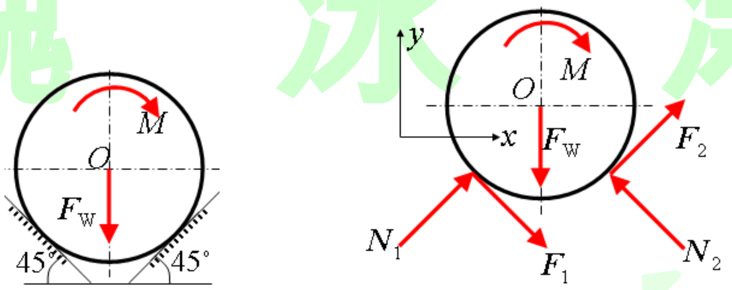
以整体为研究对象，受力图如上

$$N_B = P_A + P_B - T\sin 30^\circ = 6.369\mathrm{kN}$$

$$F_B = f_1 N_B = 1.274\mathrm{kN}$$

$$F_\mathrm{T} = F_B + \frac{\sqrt{3}}{2}T = 2.366\mathrm{kN}$$

3.36 如图所示，置于V型槽中的棒料上作用有一力偶，当其力偶矩 $M=15\text{N}\cdot\text{m}$ 时，刚好能转到此棒料。已知棒料重 $F_\text{W}=400\text{N}$，直径 $D=0.25\text{m}$，不计滚动阻力偶，试求棒料与V型槽之间的静滑动摩擦系数。



解：由题意知，当棒料刚好转动时，其左右均受到槽面施加的最大静滑动摩擦力。

棒料受力图如上

$F_1=fN_1$，$F_2=fN_2$

$\sum F_y=0$，$(N_1+N_2+F_2-F_1)\sin45^\circ-G=0$

$\sum F_x=0$，$\cos45^\circ(N_1-N_2+F_2+F_1)=0$

$\sum m_O=0$，$F_2\dfrac{D}{2}+F_1\dfrac{D}{2}-M=0$

将以上方程联立求解，有：

$3f^2-10\sqrt{2}f+3=0$

解得：

$f_1=0.223$，$f_2=4.49$(舍去)

注意：关于舍去 $f_2=4.49$ 的说明。

此时斜面的摩擦角 $\varphi=\arctan4.49>45^\circ$，容易求出左侧法向反力

$N_1=-F_\text{W}\cos\varphi\sin(\varphi-45^\circ)<0$

即此时棒料的左侧并未与槽面发生相互作用。于是根据(去掉了 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_1$ 的)受力图，有

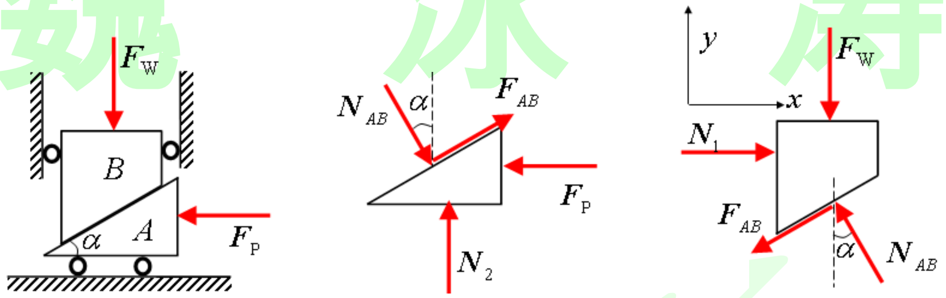
$F_2=F_\text{W}\sin45^\circ$，$N_2=F_W\sin45^\circ$

即此时棒料右侧受到的摩擦力并未达到最大值。而转动棒料所需要的最小力偶为

$M=F_\text{W}\dfrac{D}{2}\sin45^\circ\neq15\text{N}\cdot\text{m}$

与题意不符，故 $f_2=4.49$ 须舍去。

3.37 尖劈顶重装置如图所示。在 B 块上受铅垂力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{W}}$ 的作用。A 与 B 块之间的静摩擦系数为 f_{s}(其它有滚珠处表示光滑)。如不计 A 和 B 块的自重，试求维持系统平衡的水平力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 的取值范围。



解：(一).设 A 处于向左运动的临界状态，此时 F_{P} 为最大，A、B 间的摩擦力也为最大静滑动摩擦力。A、B 的受力图如上。

研究 B：

$$F_{AB}=f_{\mathrm{s}}N_{AB}$$

$$F_{\mathrm{W}}+F_{AB}\sin\alpha=N_{AB}\cos\alpha$$

所以：

$$N_{AB}=\frac{F_{\mathrm{W}}}{\cos\alpha-f_{\mathrm{s}}\sin\alpha}，\quad F_{AB}=\frac{f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{W}}}{\cos\alpha-f_{\mathrm{s}}\sin\alpha}$$

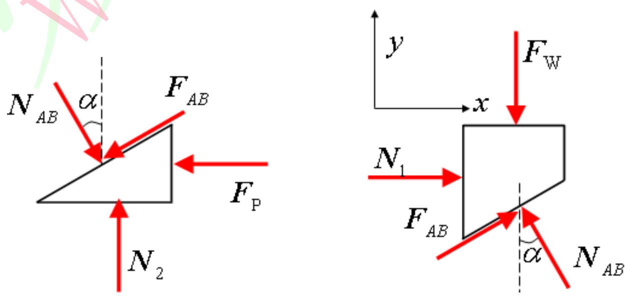
研究 A：

$$F_{\mathrm{P}}=F_{AB}\cos\alpha+N_{AB}\sin\alpha=F_{\mathrm{W}}\frac{f_{\mathrm{s}}\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-f_{\mathrm{s}}\sin\alpha}$$

注意：若 $\dfrac{1}{f_{\mathrm{s}}}\le\tan\alpha$，系统自锁，无论施加多大的力 F_{P}，A 也不会向左运动。定义摩擦角 $\varphi_m=\arctan f_{\mathrm{s}}$，则

$$F_{\mathrm{P}}=F_{\mathrm{W}}\tan(\alpha+\varphi_m)$$

(二).设 A 处于向右运动的临界状态，此时 F_{P} 为最大，A、B 间的摩擦力也为最大静滑动摩擦力。A、B 的受力图如上。



研究 B：

$$F_{AB}=f_{\mathrm{s}}N_{AB}$$

$$F_{\mathrm{W}}=F_{AB}\sin\alpha+N_{AB}\cos\alpha$$

所以：

$N_{AB}=\dfrac{F_{\rm W}}{\cos\alpha+f_{\rm s}\sin\alpha}$， $F_{AB}=\dfrac{f_{\rm s}F_{\rm W}}{\cos\alpha+f_{\rm s}\sin\alpha}$

研究 A：

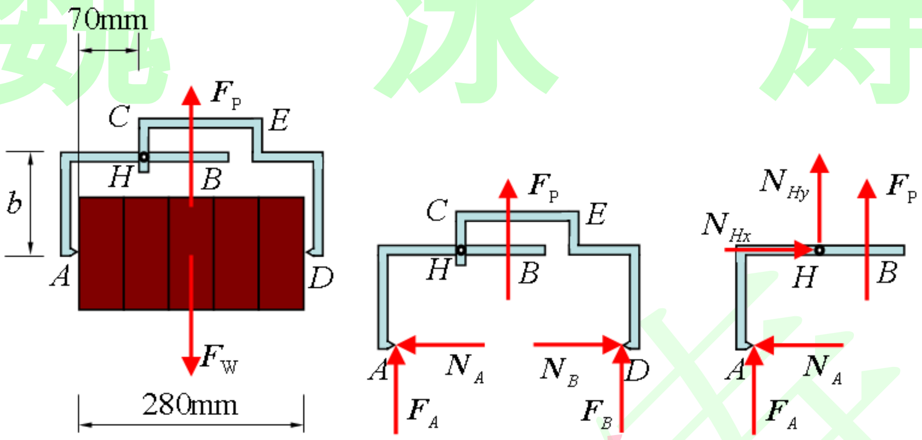
$$F_{\rm P}=N_{AB}\sin\alpha-F_{AB}\cos\alpha=F_{\rm W}\frac{\sin\alpha-f_{\rm s}\cos\alpha}{\cos\alpha+f_{\rm s}\sin\alpha}=F_{\rm W}\tan(\alpha-\varphi_m)$$

注意：若 $\tan\alpha\le f_{\rm s}$，系统自锁，无论力 $F_{\rm P}$ 多么小， A 也不会向右运动。

综上，若 $f_s<\tan\alpha<\dfrac{1}{f_{\rm s}}$ $F_{\rm P}$ 取值范围如下

$$F_{\rm W}\tan(\alpha-\varphi_m)\le F_{\rm P}\le F_{\rm W}\tan(\alpha+\varphi_m)$$

3.38 砖夹由曲杆 AHB 和 $HECD$ 在 H 点铰接而成，如图所示。设被提起的砖共重 F_{W}，提举力 F_{P} 作用在砖夹的中心线上，砖夹与砖之间的静摩擦系数 $f_{\mathrm{s}}=0.5$，问距离 b 多大才能保证砖不下滑。



解：设距离 b 刚好保证砖不下滑，则砖夹和砖之间的静摩擦力达到最大值。以砖夹为研究对象，受力图如上。显然，

$N_A=N_B$，$F_A=F_B=0.5F_{\mathrm{P}}$

以 AHB 为研究对象，受力图如上。

$\sum M_H=0$，$70F_{\mathrm{P}}+70F_A-N_A b=0$，$N_A=\dfrac{210F_A}{b}$

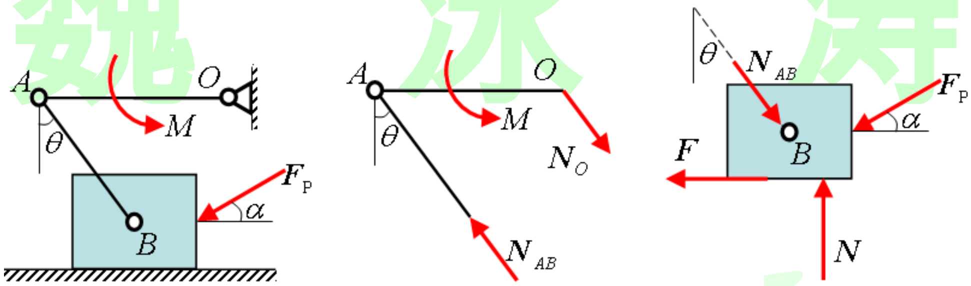
由于

$$\frac{F_A}{N_A}\le f_{\mathrm{s}}$$

所以

$b\le 210f_{\mathrm{s}}=105\mathrm{mm}$

3.39 曲柄连杆机构如图所示。在长度为l的曲柄OA上作用有一力偶M，滑块B与水平面之间的摩擦角为φ_m。在图示位置，曲柄OA水平，连杆AB与铅锤线的夹角为θ。求机构在图示位置保持平衡的力F_P之值。



解：若机构保持平衡，则OA与AB组成的系统受力图如上，其中$\boldsymbol{N}_{AB}$与$\boldsymbol{N}_O$构成力偶。所以

$$N_{AB}=\frac{M}{l\cos\theta}$$

(一).设滑块B处于向右运动的临界状态，受力图如上。

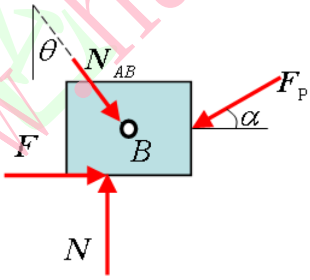
$$N=F_P\sin\alpha+N_{AB}\cos\theta$$
$$F=fN=fF_P\sin\alpha+fN_{AB}\cos\theta$$
$$F_P\cos\alpha+F-N_{AB}\sin\theta=0$$

所以

$$F_P=N_{AB}\frac{\sin\theta-f\cos\theta}{f\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{M}{l\cos\theta}\frac{\sin(\theta-\varphi_m)}{\cos(\alpha-\varphi_m)}$$

注意：若$\theta\le\varphi_m$，此时系统自锁，即使不施加F_P，滑块B也不会向右滑动。

(二).设滑块B处于向左运动的的临界状态，其受力图如下。



$$N=F_P\sin\alpha+N_{AB}\cos\theta$$
$$F=fN=fF_P\sin\alpha+fN_{AB}\cos\theta$$
$$F_P\cos\alpha-F-N_{AB}\sin\theta=0$$

所以

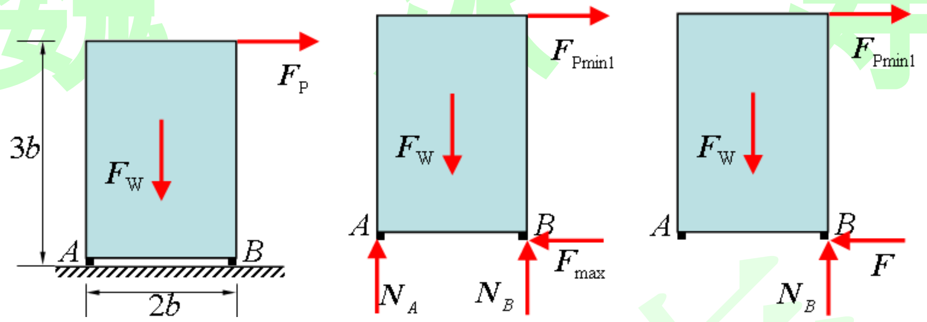
$$F_P=N_{AB}\frac{f\cos\theta+\sin\theta}{\cos\alpha-f\sin\alpha}=\frac{M}{l\cos\theta}\frac{\sin(\theta+\varphi_m)}{\cos(\alpha+\varphi_m)}$$

注意：若$\dfrac{1}{f}\le\tan\alpha$，此时系统自锁，即不论施加多大的$F_P$，滑块$B$也不会向左滑动。

综上，当$\theta > \varphi_{\mathrm{m}}$且$\tan\alpha < \dfrac{1}{f}$时，$F_{\mathrm{P}}$取值范围如下

$$\frac{M}{l\cos\theta}\frac{\sin(\theta-\varphi_{\mathrm{m}})}{\cos(\alpha-\varphi_{\mathrm{m}})} \le F_{\mathrm{P}} \le \frac{M}{l\cos\theta}\frac{\sin(\theta+\varphi_{\mathrm{m}})}{\cos(\alpha+\varphi_{\mathrm{m}})}$$

3.40 图示立柜重 $F_{\mathrm{W}}=1\mathrm{kN}$，放置在水平地面上。试按以下两种情况求能保持立柜平衡的最大水平力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$：(1) A 端为光滑接触，B 端与地面间的静摩擦系数 $f_B=0.4$；(2) B 端为光滑接触，A 端与地面间的静摩擦系数 $f_A=0.4$。



解：(1)设 F_{Pmin1} 是使立柜滑动所需最小的力，此时 B 处的摩擦力为最大静滑动摩擦力。受力图如上，则显然有

$F_{\max}=f_B N_B=0.4N_B$

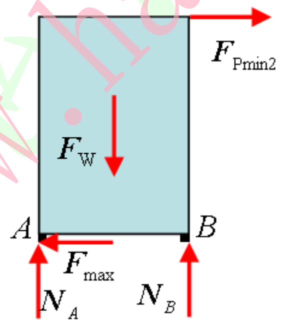
$F_{\mathrm{Pmin1}}=F_{\max}=0.4N_B$

$\sum M_A=0$，$F_{\mathrm{W}}b+3bF_{\mathrm{Pmin1}}-2bN_B=0$，$N_B=1.25F_{\mathrm{W}}$

这将导致 $N_A<0$，故在这种情况下，柜子所能发生的运动是绕 B 点的转动。此时 A 与地面脱离接触，受力图如上。

$$\sum M_B=0,\quad F_{\mathrm{W}}b-3bF_{\mathrm{Pmin1}}=0,\quad F_{\mathrm{Pmin1}}=\frac{1}{3}F_{\mathrm{W}}=0.333\mathrm{kN}$$

(2) 设 F_{Pmin2} 是使立柜滑动所需最小的力，此时 A 处的摩擦力为最大静滑动摩擦力，受力图如下。



则显然有

$F_{\max}=f_A N_A=0.4N_A$

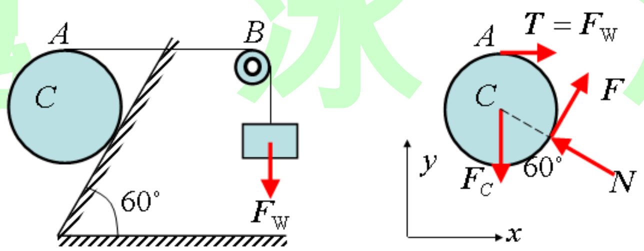
$F_{\mathrm{Pmin2}}=F_{\max}=0.4N_A$

$$\sum M_B=0,\quad 3bF_{\mathrm{Pmin2}}+2bN_A-F_{\mathrm{W}}b=0,\quad N_A=\frac{1}{3.2}F_{\mathrm{W}}$$

$F_{\mathrm{Pmin2}}=0.4N_A=0.125F_{\mathrm{W}}=0.125\mathrm{kN}$

由于 B 处光滑，因此立柜不可能发生绕 B 点的转动。

3.41 如图所示，已知物块重 $F_W = 200\text{N}$，圆柱体 C 的半径为 200mm，与斜面间的静摩擦系数为 0.6。忽略滑轮摩擦，求在图示位置(AB 水平)平衡时圆柱 C 的重量。



解：圆柱 C 处于平衡状态时受力图如上。

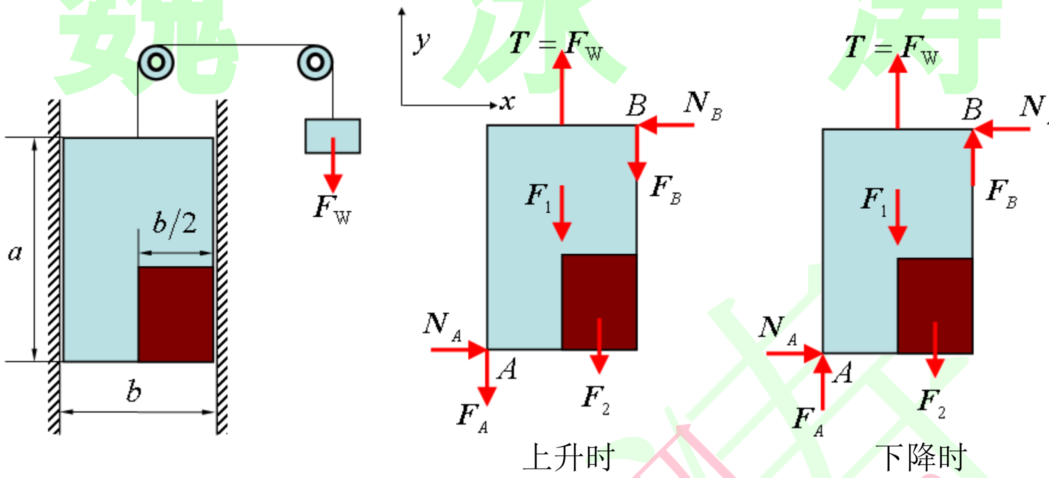
$\sum M_C = 0$，$F = T = F_W = 200\text{N}$

$\sum F_x = 0$，$T + F\cos 60^\circ - N\cos 30^\circ = 0$，$N = 200\sqrt{3}\text{N}$

因为 $F < fN = 120\sqrt{3}\text{N}$，所以图示的平衡状态存在。

$\sum F_y = 0$，$F_C = T\sin 60^\circ + N\sin 30^\circ = 200\sqrt{3}\text{N}$

3.42 如图所示，已知升降机重 F_1，重 F_2 的货物置于升降机内的一侧。由于货物偏于一边而使升降机的两角与滑道靠紧，设期间的静摩擦系数为 f_s。求使升降机上升或下降而不被卡住所需的平衡重 F_W。



解：(一).设升降机上升时，被卡住的临界状态，受力图如上。显然有

$$N_A = N_B$$

且

$$F_A = f_s N_A\text{，}\quad F_B = f_s N_B$$

$$\sum F_y = 0\text{，}\quad F_A = F_B = \frac{1}{2}(F_W - F_1 - F_2)$$

$$\sum M_B = 0\text{，}\quad bF_A + \frac{b}{2}F_1 + \frac{b}{4}F_2 + aN_A - \frac{b}{2}F_W = 0\text{，}\quad F_W = F_1 + F_2(1 + \frac{bf_s}{2a})$$

(二).设升降机下降时，被卡住的临界状态，受力图如上。同样有

$$N_A = N_B$$

且

$$F_A = f_s N_A\text{，}\quad F_B = f_s N_B$$

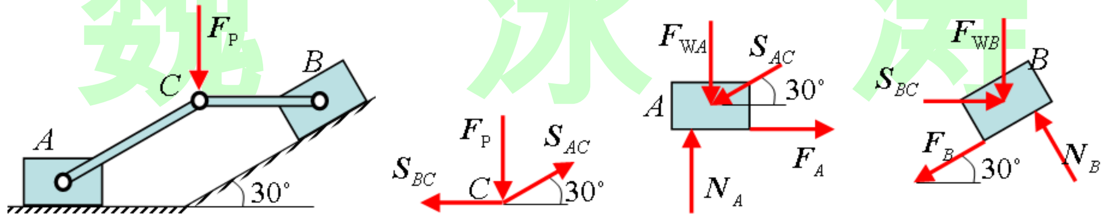
$$\sum F_y = 0\text{，}\quad F_A = F_B = \frac{1}{2}(F_1 + F_2 - F_W)$$

$$\sum M_B = 0\text{，}\quad \frac{b}{2}F_1 + \frac{b}{4}F_2 + aN_A - bF_A - \frac{b}{2}F_W = 0\text{，}\quad F_W = F_1 + F_2(1 - \frac{bf_s}{2a})$$

所以，平衡重 F_W 的范围为

$$F_1 + F_2(1 - \frac{bf_s}{2a}) \le F_W \le F_1 + F_2(1 + \frac{bf_s}{2a})$$

3.43 各重100N的滑块 A 和 B 分别与轻杆 AC 和 BC 铰接，如图所示。已知 BC 水平，AC 平行于斜面，滑块与水平面、滑块与斜面间的静摩擦系数均为0.5。求在图示位置不致引起滑块移动的最大铅锤力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$



解：以节点 C 为研究对象，假定杆 AC、BC 均受压。受力图如上。容易得出

$$S_{AC}=2F_{\mathrm{P}}$$

$$S_{BC}=\sqrt{3}F_{\mathrm{P}}$$

(一).以 A 为研究对象，设 A 处于平衡状态，受力图如上。

$$N_A=S_{AC}\sin 30^\circ+F_{\mathrm{W}A}=100+F_{\mathrm{P}}$$

$$F_A=S_{AC}\cos 30^\circ=\sqrt{3}F_{\mathrm{P}}$$

由于 A 处于平衡时有

$$F_A=\sqrt{3}F_{\mathrm{P}}\le f_{\mathrm{s}}N_A=0.5(100+F_{\mathrm{P}})$$

即：

$$F_{\mathrm{P}}\le 40.58\mathrm{N}$$

(二).再以 B 为研究对象，设 B 处于平衡状态，受力图如上

$$N_B=F_{\mathrm{W}B}\cos 30^\circ+S_{BC}\sin 30^\circ=50\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{\mathrm{P}}$$

$$F_B=S_{BC}\cos 30^\circ-F_{\mathrm{W}B}\sin 30^\circ=1.5F_{\mathrm{P}}-50$$

由于 A 处于平衡时有

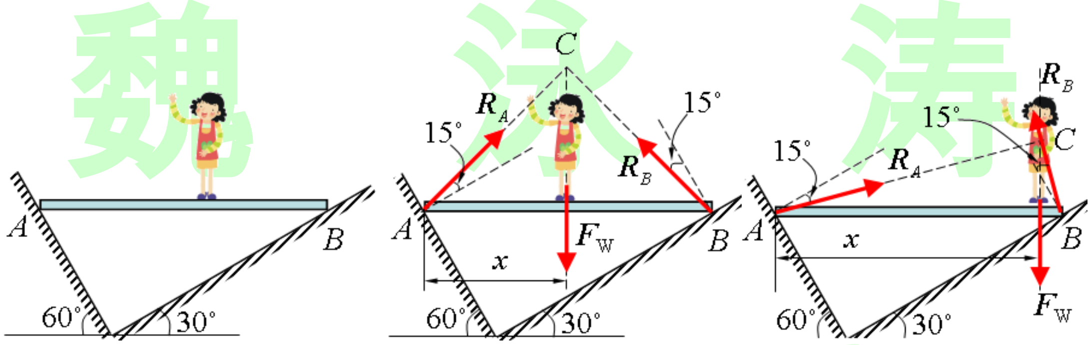
$$F_B=1.5F_{\mathrm{P}}-50\le f_{\mathrm{s}}N_B=0.5(50\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{\mathrm{P}})$$

即

$$F_{\mathrm{P}}\le 87.44\mathrm{N}$$

综合(一)和(二)，当 $F_{\mathrm{P}}\le 40.58\mathrm{N}$，系统维持平衡。

3.44 长为l的水平梯放在V型槽内，如图所示。略去梯重，梯子两端与斜面间的摩擦角均为15°。求不致引起梯子滑动的人在梯上的安全挥动范围。



梯子逆时针旋转　　梯子顺时针旋转

解：(一).设人位于距x处时，梯子即将作逆时针转动，此时A、B处的总反力均在摩擦角边缘，受力图如上。

显然，$\angle CAB = \angle CBA = 45^{\circ}$

所以，$x = 0.5l$

(二).设人位于距x处时，梯子即将作顺时针转动，此时A、B处的总反力均在摩擦角边缘，受力图如上。

由几何关系，$\angle CAB = 15^{\circ}$，$\angle CBA = 75^{\circ}$

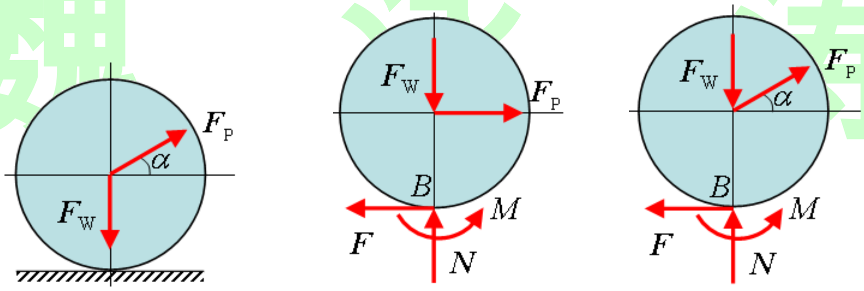
所以，$\angle ACB = 90^{\circ}$

$\overline{AC} = \overline{AB}\cos 15^{\circ} = l\cos 15^{\circ}$

$x = \overline{AC}\cos 15^{\circ} = l\cos^2 15^{\circ} = 0.933l$

综合(一)和(二)，人在AB上的活动范围是从梯子中点到至A点$0.933l$处。

3.45 圆柱滚子重 $F_W = 3\text{kN}$，半径 300mm，放在水平地面上，若滚阻系数为 $\delta = 5\text{mm}$，求 $\alpha = 0$ 及 $\alpha = 30^\circ$ 的两种情况下，拉动滚子所需的力 F_P 之值。



$\alpha = 0$　　　　$\alpha = 30^\circ$

解：(一). $\alpha = 0$ 时受力图如上。

要使滚子产生滚动，F_P 对 B 点之矩应大于滚阻力偶 M 的最大值

$$F_P r \geq M = \delta N = \delta F_W = 15\text{N}\cdot\text{m}$$

即

$$F_P \geq 50\text{N}$$

(二). $\alpha = 30^\circ$ 时受力图如上。

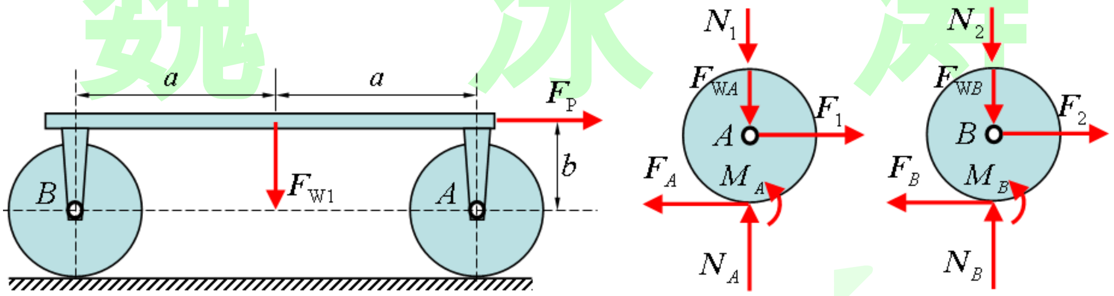
同(一)，要使滚子产生滚动，F_P 对 B 点之矩应大于滚阻力偶 M 的最大值，

$$F_P r\cos 30^\circ \geq M = \delta N = \delta(F_W - F_P \sin 30^\circ)$$

即

$$F_P \geq \frac{\delta F_W}{r\cos 30^\circ + \delta \sin 30^\circ} = 57.18\text{N}$$

3.46 小车底盘重 F_{W1}，所有轮子共重 F_{W2}，轮的半径为 r。若车轮沿水平轨道滚动而不滑动，且滚阻系数为 δ，尺寸如图所示。求使小车在轨道上匀速运动时所需的水平力 $\boldsymbol{F}_{P}$ 之值及地面对前、后轮的滚动阻力偶。



解：研究前轮 A，其受力图如上。由于小车匀速前进，对前轮 A 有(对接触点取矩)

$$M_A - F_1 r = 0$$

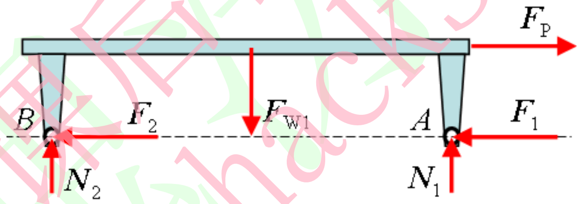
即：

$$F_1 = \frac{M_A}{r} = \frac{\delta N_A}{r} = \frac{\delta(F_{WA} + N_1)}{r}$$

对后轮 B，同样有

$$F_2 = \frac{M_B}{r} = \frac{\delta N_B}{r} = \frac{\delta(F_{WB} + N_2)}{r}$$

以底盘为研究对象，受力图如下。



$$N_1 + N_2 = F_{W1}$$

$$F_P = F_1 + F_2 = \frac{\delta(F_{WA} + N_1)}{r} + \frac{\delta(F_{WB} + N_2)}{r} = \frac{\delta(F_{W1} + F_{W2})}{r}$$

$$\sum M_B = 0，\quad 2aN_1 - aF_{W1} - bF_P = 0，\quad N_1 = \frac{F_{W1}}{2} + \frac{b\delta}{2ar}(F_{W1} + F_{W2})$$

$$N_2 = \frac{F_{W1}}{2} - \frac{b\delta}{2ar}(F_{W1} + F_{W2})$$

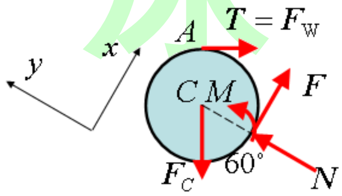
设前、后轮重量相同，即 $F_{WA} = F_{WB} = \dfrac{F_{W2}}{2}$，则

$$M_A = \delta(F_{WA} + N_1) = (F_{W1} + F_{W2})\frac{(ar + b\delta)\delta}{2ar}$$

$$M_B = \delta(F_{WB} + N_2) = (F_{W1} + F_{W2})\frac{(ar - b\delta)\delta}{2ar}$$

3.47 题 3.41 中，增加圆柱体与斜面间的滚组系数$\delta = 2\text{mm}$，其他条件不变，求平衡时圆柱体C的重量。

解：(一).设圆柱体处于向上滚动的临界状态，此时滚组力偶达到最大值。受力图如下



$$\sum F_y = 0\text{，}\quad N = F_C\cos 60^\circ + F_W\cos 30^\circ\text{，}\quad N = 0.5F_C = 100\sqrt{3}\ \ \text{N}$$

$$\sum F_x = 0\text{，}\quad F + T\cos 60^\circ - F_C\sin 60^\circ = 0\text{，}\quad F = \frac{\sqrt{3}}{2}F_C - 100\ \ \text{N}$$

$$M = \delta N = F_C + 200\sqrt{3}\ \ \text{N}\cdot\text{mm}$$

$$\sum M_C = 0\text{，}\quad M + Fr - F_W r = 0$$

即：

$$F_C + 200\sqrt{3} + 100\sqrt{3}F_C - 100\times 200 - 200\times 200 = 0$$

最终可得：

$$F_C = 343.43\text{N}$$

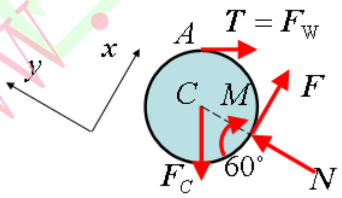
此时，可计算出

$$N = 344.42\text{N}\text{，}$$

$$F = 196.55\text{N} \le fN = 206.65\text{N}$$

即在此状态下，滑动摩擦力并未达到最大值。

(二).设圆柱体处于向下滚动的临界状态，此时滚组力偶达到最大值。受力图如下



$$\sum F_y = 0\text{，}\quad N = F_C\cos 60^\circ + F_W\cos 30^\circ\text{，}\quad N = 0.5F_C = 100\sqrt{3}\ \ \text{N}$$

$$\sum F_x = 0\text{，}\quad F + T\cos 60^\circ - F_C\sin 60^\circ = 0\text{，}\quad F = \frac{\sqrt{3}}{2}F_C - 100\ \ \text{N}$$

$$M = \delta N = F_C + 200\sqrt{3}\ \ \text{N}\cdot\text{mm}$$

$$\sum M_C = 0\text{，}\quad Fr - M - F_W r = 0$$

即：

$$100\sqrt{3}F_C - 100\times 200 - F_C - 200\sqrt{3} - 200\times 200 = 0$$

最终可得：

$F_C = 350.43\text{N}$

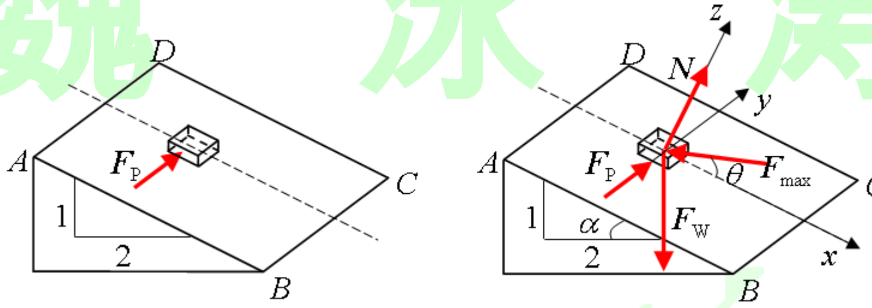
此时，可计算出

$N = 348.42\text{N}$，

$F = 203.48\text{N} \le fN = 208.99\text{N}$

即在此状态下，滑动摩擦力并未达到最大值。

3.48 重50N的方块放在倾斜的粗糙面上，斜面的边 AB 与 BC 边垂直，如图所示。如在方块上作用一个与 BC 边平行的水平力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$，此力由零逐渐增大，当方块与斜面间的静摩擦系数为0.6时，求能保持方块平衡的水平力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 的最大值。



解：方块处于静平衡的极限状态时，所受摩擦力为最大静滑动摩擦力 $\boldsymbol{F}_{\max}$。方块受力图如上，其中，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$、$\boldsymbol{F}_{\max}$ 均位于 xy 平面，即 $ABCD$ 平面。

$$\alpha = \arctan\frac{1}{2}$$

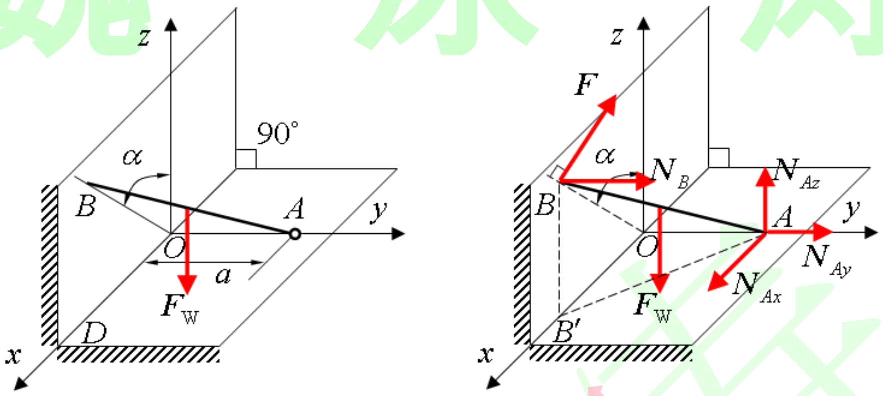
$$\sum F_z = 0，\quad N = F_{\mathrm{W}}\cos\alpha$$

$$F_{\max} = fN = 30\cos\alpha$$

$$\sum F_x = 0，\quad F_{\mathrm{W}}\sin\alpha - F_{\max}\cos\theta = 0，\quad \theta = \arccos(F_{\mathrm{W}}\sin\alpha / F_{\max})$$

$$\sum F_y = 0，\quad F_{\mathrm{P}} - F_{\max}\sin\theta = 0，\quad F_{\mathrm{P}} = 14.83\mathrm{N}$$

3.49 均质杆 AB 长 l，重 F_W， A 端用光滑球形铰链固定在地面上， B 端自由地靠在铅直墙面上，如图所示。已知墙面与铰链 A 的水平距离等于 a， B 端与墙面间的静摩擦系数为 f_s。设图中 OB 与轴的交角为 α，求杆 AB 将开始沿墙面滑动时， α 等于多大。



解：在杆 AB 即将滑动时，其所受摩擦力为最大静滑动摩擦力 $\boldsymbol{F}$， 如上图。 $\boldsymbol{F}$ 在 xoz 平面内，且与 OB 垂直。

$$F = f_s N_B$$

$$\sum F_x = 0,\quad N_{Ax} - F\cos\alpha = 0,\quad N_{Ax} = f_s N_B \cos\alpha$$

$$\sum M_z = 0,\quad -N_{Ax}a + N_B \cdot \overline{OB} \cdot \sin\alpha = -N_{Ax}a + N_B\sqrt{l^2 - a^2}\sin\alpha = 0$$

上两式相除，得：

$$\tan\alpha = \frac{af_s}{\sqrt{l^2 - a^2}}$$