概率论第五章习题解答

习题 5.1

1． 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，且 X 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的两点分布，样本值为 $x_1, \cdots, x_n$．求 $X_1, \cdots, X_n$ 的联合分布律．

解：总体 X 的分布律为 $P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}$，$x=0, 1$，

故 $P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod\limits_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$，其中 $x_1, \cdots, x_n=0, 1$．

2． 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自参数为 λ 的泊松分布总体 X 的样本，样本值为 $x_1, \cdots, x_n$．试求 λ 为何值时，$P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}$ 最大？

解：总体 X 的分布律为 $P\{X=x\}=\dfrac{\lambda^x}{x!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$，$x=0, 1, 2, \cdots$，

则 $P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot \mathrm{e}^{-n\lambda}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}$，其中 $x_1, \cdots, x_n=0, 1, 2, \cdots$，

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-1}\cdot \mathrm{e}^{-n\lambda}+\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-1}\cdot \mathrm{e}^{-n\lambda}\cdot(-n)}{x_1!x_2!\cdots x_n!}=\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot \mathrm{e}^{-n\lambda}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}\cdot\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n\right)=0$，

得 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n=0$，即 $\lambda=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$，且当 $0<\lambda<\bar{x}$ 时，此导数为正，当 $\lambda>\bar{x}$ 时，此导数为负，

故当 $\lambda=\bar{x}$ 时，$P\{X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n\}$ 最大．

3． 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自参数为 λ 的指数分布总体 X 的样本，试求 $X_1, \cdots, X_n$ 的联合密度函数．

解：总体 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

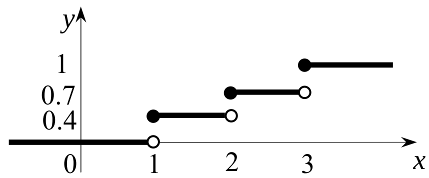
故 $f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x_i}, & x_1,\cdots,x_n>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_1,\cdots,x_n>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4． 设总体 X 的样本值为 1, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 2，求 X 的经验分布函数 $F_n(x)$，并画出其图形．

解：将样本观测值按由小到大顺序排列：1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3，

即 $x_{(1)}=x_{(2)}=x_{(3)}=x_{(4)}=1$，$x_{(5)}=x_{(6)}=x_{(7)}=2$，$x_{(8)}=x_{(9)}=x_{(10)}=3$，

故 $F_n(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.4, & 1\le x<2,\\ 0.7, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$



习题 5.2

1． 设 $X\sim N(\mu, 25)$，μ 未知，$X_1, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本．下列样本函数中，哪些是统计量？为什么？

（1）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$；（2）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$，$\sigma$ 为总体标准差.

解：（1）不是统计量，其中含有未知参数μ；

（2）是统计量，参数$\sigma=5$ 为已知.

2． 证明定理 5.2.

证：（1）$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(aX_i+b)=\frac{1}{n}(a\sum_{i=1}^{n}X_i+nb)=a\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+b=a\overline{X}+b$；

（2）$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X)=\frac{1}{n}\cdot nE(X)=E(X)$，

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X)=\frac{1}{n^2}\cdot nD(X)=\frac{1}{n}D(X).$$

3． 证明定理 5.3 中性质（1）.

证：$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\overline{X}X_i+\overline{X}^2)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\cdot n\overline{X}+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$.

4． 下列数据为某报童近 20 天的报纸销售量：658, 571, 611, 527, 546, 598, 470, 577, 549, 598, 676, 569, 608, 632, 572, 706, 609, 569, 577, 641.（1）计算样本均值$\bar{x}$和样本方差s^2；（2）假设报童每天的报纸销售量 X 服从正态分布，并且$E(X)=\bar{x}$，$D(X)=s^2$，报纸的批发价为 0.35 元，零售价为 0.5 元，卖不完退回报社的退回价为 0.1 元，求报童每天批发多少报纸，可使平均收益最大？

解：（1）$\bar{x}=\frac{1}{20}(658+571+\cdots+641)=593.2$，

$s^2=\frac{1}{19}[(658-593.2)^2+(571-593.2)^2+\cdots+(641-593.2)^2]=2883.22$；

（2）由假设得 $X\sim N(593.2, 2883.22)$，设每天批发 a 份报纸，收益为 Y，

当 $X\ge a$ 时，实际售出 a 份报纸，收益 $Y=0.15a$ 元，

当 $X<a$ 时，实际售出 X 份报纸，退回 $a-X$ 份，收益 $Y=0.15X-0.25(a-X)=0.4X-0.25a$，

即$Y=g(X)=\begin{cases}0.15a, & X\ge a,\\ 0.4X-0.25a, & X<a,\end{cases}$

则$E(Y)=\int_{-\infty}^{a}(0.4x-0.25a)f(x)dx+\int_{a}^{+\infty}0.15af(x)dx=0.4\int_{-\infty}^{a}xf(x)dx-0.25aF(a)+0.15a[1-F(a)]$

$=0.4\int_{-\infty}^{a}xf(x)dx-0.4aF(a)+0.15a$，

令$\frac{dE(Y)}{da}=0.4af(a)-0.4F(a)-0.4af(a)+0.15=-0.4F(a)+0.15=-0.4\Phi(\frac{a-593.2}{\sqrt{2883.22}})+0.15=0$，

得$\Phi(\frac{a-593.2}{\sqrt{2883.22}})=0.375$，即$\frac{a-593.2}{\sqrt{2883.22}}=-0.32$，且$\frac{d^2E(Y)}{da^2}=-0.4f(a)<0$，

故每天批发$a=593.2-0.32\times\sqrt{2883.22}=576$份报纸时，可使平均收益最大.

5． 从一大批次品率为 p 的产品中，有放回地抽取 n 个，其中次品 n_A 个.（1）n_A 是否为统计量？（2）计算 $E(n_A)$、$D(n_A)$.

解：（1）n_A是统计量，将第 i 次抽样结果记为 X_i，即 $X_i=\begin{cases}1, & 第\,i\,次抽到次品,\\ 0, & 第\,i\,次没有抽到次品,\end{cases}$ 有 $n_A=\sum_{i=1}^{n}X_i$；

（2）$n_A\sim B(n,p)$，故 $\mathrm{E}(n_A)=np$，$\mathrm{D}(n_A)=np(1-p)$.

6． 设随机变量 X 服从参数$\lambda=5$ 的指数分布，试求 X 的上侧α 分位数 x_α：（1）$\alpha=0.15$；（2）$\alpha=0.95$.

解：因 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 有 $\alpha=P\{X\ge x_\alpha\}=\int_{x_\alpha}^{+\infty}5\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x=(-\mathrm{e}^{-5x})\Big|_{x_\alpha}^{+\infty}=\mathrm{e}^{-5x_\alpha}$，

故 $x_\alpha=-\dfrac{1}{5}\ln\alpha$，当$\alpha=0.15$ 时，$x_{0.15}=-\dfrac{1}{5}\ln 0.15=0.3794$；当$\alpha=0.95$ 时，$x_{0.95}=-\dfrac{1}{5}\ln 0.95=0.0103$.

习题 5.3

1． 求 $N(5,16)$分布的上侧α 分位数：（1）$\alpha=0.95$；（2）$\alpha=0.05$；（3）$\alpha=0.01$.

解：因 $\dfrac{X-5}{4}\sim N(0,1)$，且 $\alpha=P\{X\ge x_\alpha\}=P\{\dfrac{X-5}{4}\ge\dfrac{x_\alpha-5}{4}\}$，有 $\dfrac{x_\alpha-5}{4}=u_\alpha$，

则 $x_\alpha=5+4u_\alpha=5+4\Phi^{-1}(1-\alpha)$，

（1）$x_{0.95}=5+4u_{0.95}=5+4\times(-1.64)=-1.56$；

（2）$x_{0.05}=5+4u_{0.05}=5+4\times1.64=11.56$；

（3）$x_{0.01}=5+4u_{0.01}=5+4\times2.33=14.32$.

2． 查表求自由度为 7 的 t 分布的上侧α 分位数：（1）$\alpha=0.95$；（2）$\alpha=0.99$；（3）$\alpha=0.05$；（4）$\alpha=0.01$.

解：因 $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$，

（1）$t_{0.95}(7)=-t_{0.05}(7)=-1.8946$；

（2）$t_{0.99}(7)=-t_{0.01}(7)=-2.9980$；

（3）$t_{0.05}(7)=1.8946$；

（4）$t_{0.01}(7)=2.9980$.

3． 查表计算$\chi_\alpha^2(18)$：（1）$\alpha=0.05$；（2）$\alpha=0.99$.

解：（1）$\chi_{0.05}^2(18)=28.869$；

（2）$\chi_{0.99}^2(18)=7.015$.

4． 设$\chi^2\sim\chi^2(n)$，证明：$\mathrm{E}(\chi^2)=n$，$\mathrm{D}(\chi^2)=2n$.

证：因$\chi^2\sim\chi^2(n)$，存在 $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且都服从 $N(0,1)$，使得 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$，

则 $\mathrm{E}(\chi^2)=\mathrm{E}(X_1^2)+\mathrm{E}(X_2^2)+\cdots+\mathrm{E}(X_n^2)=n\mathrm{E}(X_1^2)$，$\mathrm{D}(\chi^2)=\mathrm{D}(X_1^2)+\mathrm{D}(X_2^2)+\cdots+\mathrm{D}(X_n^2)=n\mathrm{D}(X_1^2)$，

因 $X_1\sim N(0,1)$，有 $\mathrm{E}(X_1)=0$，$\mathrm{D}(X_1)=1$，

故 $\mathrm{E}(X_1^2)=\mathrm{D}(X_1)+[\mathrm{E}(X_1)]^2=1$，即 $\mathrm{E}(\chi^2)=n$；

而 $\mathrm{D}(X_1^2)=\mathrm{E}(X_1^4)-[\mathrm{E}(X_1^2)]^2$，

且 $\mathrm{E}(X_1^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})=-\dfrac{x^3}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot3x^2\mathrm{d}x$

$=0+3\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=3\mathrm{E}(X_1^2)=3$，

故 $\mathrm{D}(X_1^2)=\mathrm{E}(X_1^4)-[\mathrm{E}(X_1^2)]^2=3-1=2$，即 $\mathrm{D}(\chi^2)=2n$.

5. 求第一自由度为 4，第二自由度为 7 的 F 分布的上侧α 分位数：（1）$\alpha=0.95$；（2）$\alpha=0.99$；（3）$\alpha=0.05$；（4）$\alpha=0.01$.

解：因 $F_\alpha(n,m)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}$，

（1） $F_{0.95}(4,7)=\dfrac{1}{F_{0.05}(7,4)}=\dfrac{1}{6.09}=0.1642$；

（2） $F_{0.99}(4,7)=\dfrac{1}{F_{0.01}(7,4)}=\dfrac{1}{14.98}=0.0668$；

（3）$F_{0.05}(4,7)=4.12$；

（4）$F_{0.01}(4,7)=7.85$.

6. 证明 $F_\alpha(n,m)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}$.

证：设 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 相互独立，有 $F=\dfrac{X/n}{Y/m}\sim F(n,m)$，且 $\dfrac{1}{F}=\dfrac{Y/m}{X/n}\sim F(m,n)$，

则 $P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\dfrac{1}{F}<\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-\alpha$，即 $P\{\dfrac{1}{F}\ge\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$，

故 $F_\alpha(n,m)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}$.

习题 5.4

1. 在总体 $N(12,4)$ 中随机抽取一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 8.8 至 13.2 之间的概率.

解：因总体 $X\sim N(12,4)$，且样本容量 $n=36$，有 $\dfrac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{36}}=\dfrac{\overline{X}-12}{1/3}\sim N(0,1)$，

故 $P\{8.8<\overline{X}<13.2\}=P\{-9.6<\dfrac{\overline{X}-12}{1/3}<3.6\}=\Phi(3.6)-\Phi(-9.6)=0.9998$.

2. 求总体 $N(30,9)$ 的容量分别为 10 和 15 的两个独立样本均值差的绝对值大于 1 的概率.

解：看作双总体 $X\sim N(30,9)$，$Y\sim N(30,9)$，样本容量分别为 $n=10$，$m=15$，且相互独立，

则 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(30-30)}{\sqrt{\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{15}}}=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{1.5}}\sim N(0,1)$，

故 $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>1\}=P\{\dfrac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{1.5}}>0.8165\}=2[1-\Phi(0.82)]=2\times(1-0.7939)=0.4122$.

3. 分别从方差为 20 和 35 的两个正态总体中抽取容量为 8 和 10 的两个独立样本 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10}$，试估计 $P\{S_x^2\ge 2S_y^2\}$.

解：双总体 $X \sim N(\mu_x, 20)$，$Y \sim N(\mu_y, 35)$，样本容量分别为 $n=8$，$m=10$，且相互独立，

则 $\dfrac{S_x^2/20}{S_y^2/35} = 1.75\dfrac{S_x^2}{S_y^2} \sim F(7,9)$，

故 $P\{S_x^2 \ge 2S_y^2\} = P\{1.75\dfrac{S_x^2}{S_y^2} \ge 3.5\} = 0.0423$.

注：最后一步利用 MATLAB 软件计算积分，程序如下：
建立 fdis.m 文件：

```
function y=fdis(x)
n=7;m=9;
y=gamma((n+m)/2)/gamma(n/2)/gamma(m/2)*(n/m)^(n/2)*x.^(n/2-1).*(1+n/m*x).^(-(n+m)/2);   % F 分布密度
```

命令窗口输入：

```
p=1-quadl(@fdis,0,3.5)
```

4． 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \cdots, X_n$ 为 X 的样本．如果利用样本讨论与总体期望 μ 有关的概率问题，应选取哪个统计量？选用哪个抽样分布？

解：讨论总体期望 μ，应选取样本均值 $\overline{X}$，

当 σ^2 已知时，选用 $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，当 σ^2 未知时，选用 $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

5． 设 $X_1, \cdots, X_n$ 与 $Y_1, \cdots, Y_m$ 分别为来自正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且两样本相互独立．如果利用样本讨论与两总体~~样本~~均值差 $\mu_1-\mu_2$ 有关的概率问题，应选取哪个统计量？选用哪个抽样分布？如果利用样本讨论与两总体~~样本~~方差比 σ_1^2/σ_2^2 有关的概率问题，应选取哪个统计量？选用哪个抽样分布？

解：讨论两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$，应选取样本均值差 $\overline{X}-\overline{Y}$，

当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时，选用 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$，

当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，选用 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$.

复习题五

1． 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，下列样本函数何时是统计量，何时不是统计量．

（1）$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 2\overline{X}$；（2）$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(aX_i+b)^2$；（3）$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i-\mathrm{E}(X_i)]^2$；（4）$\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\} - \min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$；

（5）$\dfrac{\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\} - \min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}}{\sqrt{\mathrm{D}(\overline{X})}}$.

解：（1）不含未知参数，是统计量；

（2）含参数 a, b，当参数 a, b 已知时，是统计量，当 a, b 未知时，不是统计量；

（3）含 $\mathrm{E}(X_i)=\mathrm{E}(X)$，当总体期望 $\mathrm{E}(X)$ 已知时，是统计量，当 $\mathrm{E}(X)$ 未知时，不是统计量；
（4）不含未知参数，是统计量；
（5）含 $\mathrm{D}(\overline{X})=\dfrac{1}{n}\mathrm{D}(X)$，当总体方差 $\mathrm{D}(X)$ 已知时，是统计量，当 $\mathrm{D}(X)$ 未知时，不是统计量.

2． 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为总体 X 的样本，$\overline{X^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，在下列情形下求 $\mathrm{E}(\overline{X^2})$.

（1）X 服从参数为 $p=0.6$ 的两点分布，；（2）X 服从参数 $\lambda=7$ 的泊松分布；（3）$X\sim N(3,16)$.

解：因 $\mathrm{E}(X_i^2)=\mathrm{D}(X_i)+[\mathrm{E}(X_i)]^2=\mathrm{D}(X)+[\mathrm{E}(X)]^2$，有 $\mathrm{E}(\overline{X^2})=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2)=\mathrm{D}(X)+[\mathrm{E}(X)]^2$，

（1）因 $X\sim(0\text{-}1)$，有 $\mathrm{E}(X)=p=0.6$，$\mathrm{D}(X)=pq=0.24$，故 $\mathrm{E}(\overline{X^2})=0.24+0.6^2=0.6$；

（2）因 $X\sim P(7)$，有 $\mathrm{E}(X)=\lambda=7$，$\mathrm{D}(X)=\lambda=7$，故 $\mathrm{E}(\overline{X^2})=7+7^2=56$；

（3）因 $X\sim N(3,16)$，有 $\mathrm{E}(X)=\mu=3$，$\mathrm{D}(X)=\sigma^2=16$，故 $\mathrm{E}(\overline{X^2})=16+3^2=25$.

3． 设 $X\sim N(\mu,4)$，$\overline{X}$ 为样本均值，试求样本容量 n 为多少时，才能使 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.1\}\ge 0.9$？

解：因 $X\sim N(\mu,4)$，有 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

则 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.1\}=P\{\dfrac{-0.1}{2/\sqrt{n}}<\dfrac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}<\dfrac{0.1}{2/\sqrt{n}}\}=\Phi(\dfrac{0.1}{2/\sqrt{n}})-\Phi(\dfrac{-0.1}{2/\sqrt{n}})=2\Phi(\dfrac{0.1\sqrt{n}}{2})-1\ge 0.9$，

得 $\Phi(\dfrac{0.1\sqrt{n}}{2})\ge 0.95$，$\dfrac{0.1\sqrt{n}}{2}\ge u_{0.05}=1.64$，$\sqrt{n}\ge 32.8$，故 $n\ge 1075.84$，取 $n\ge 1076$.

4． 设 $X\sim N(15,9)$，$\overline{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，样本容量 $n=6$，求 a，使概率 $P\{\overline{X}\le a\}=0.9$.

解：因 $X\sim N(15,3^2)$，且 $n=6$，有 $\dfrac{\overline{X}-15}{3/\sqrt{6}}\sim N(0,1)$，

则 $P\{\overline{X}\le a\}=P\{\dfrac{\overline{X}-15}{3/\sqrt{6}}\le\dfrac{a-15}{3/\sqrt{6}}\}=\Phi(\dfrac{a-15}{3/\sqrt{6}})=0.9$，得 $\dfrac{a-15}{3/\sqrt{6}}=u_{0.1}=1.28$，故 $a=16.57$.

5． 设 $X\sim N(\mu,9)$，$\overline{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，$n=10$．求 a：

（1）使概率 $P\{\overline{X}\le a\}=0.9$，应该用什么分布？能否求出？

（2）使概率 $P\{S^2<a\}=0.9$.

解：因 $X\sim N(\mu,3^2)$，有 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{3/\sqrt{10}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{(10-1)S^2}{9}=S^2\sim\chi^2(9)$，

（1）应该用正态分布，$P\{\overline{X}<a\}=P\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{3/\sqrt{10}}<\dfrac{a-\mu}{3/\sqrt{10}}\}=\Phi(\dfrac{a-\mu}{3/\sqrt{10}})=0.9$，即 $\dfrac{a-\mu}{3/\sqrt{10}}=1.28$，

故 $a=\mu+1.2143$，当给出 μ 值时，可以求出 a 的值；

（2）应该用$\chi^2(9)$分布，$P\{S^2 \ge a\} = 0.1$，故$a = \chi^2_{0.1}(9) = 14.684$.

6. 设$X \sim N(12, 9)$，$Y \sim N(16, 38)$，$\overline{X}, \overline{Y}, S_x^2, S_y^2$分别为来自总体$X$与$Y$的两独立样本的均值和方差，样本容量分别为 6 和 8．（1）求概率$P\{\overline{Y} - \overline{X} \le 7\}$；（2）求$a$，使概率$P\{\overline{Y} - \overline{X} \le a\} = 0.9$；（3）求$b$，使概率$P\{\dfrac{S_x^2}{S_y^2} \le b\} = 0.95$.

解：因$X \sim N(12, 9)$，$Y \sim N(16, 38)$，且样本容量$n = 6$，$m = 8$，

则$\dfrac{(\overline{Y} - \overline{X}) - (16 - 12)}{\sqrt{\dfrac{9}{6} + \dfrac{38}{8}}} = \dfrac{(\overline{Y} - \overline{X}) - 4}{2.5} \sim N(0, 1)$，$\dfrac{S_x^2 / 9}{S_y^2 / 38} \sim F(5, 7)$，

（1）$P\{\overline{Y} - \overline{X} \le 7\} = P\{\dfrac{(\overline{Y} - \overline{X}) - 4}{2.5} \le 1.2\} = \Phi(1.2) = 0.8849$；

（2）$P\{\overline{Y} - \overline{X} \le a\} = P\{\dfrac{(\overline{Y} - \overline{X}) - 4}{2.5} \le \dfrac{a - 4}{2.5}\} = \Phi(\dfrac{a - 4}{2.5}) = 0.9$，得$\dfrac{a - 4}{2.5} = 1.28$，故$a = 7.2$；

（3）$P\{\dfrac{S_x^2}{S_y^2} \le b\} = 1 - P\{\dfrac{S_x^2 / 9}{S_y^2 / 38} > \dfrac{38}{9} b\} = 0.95$，即$\dfrac{38}{9} b = F_{0.05}(5, 7) = 3.97$，故$b = 0.9403$.

7. 设$X_1, \cdots, X_5$为来自总体$N(20, 9)$的样本，求：（1）$P\{\max(X_1, \cdots, X_5) > 21.5\}$；（2）$P\{\min(X_1, \cdots, X_5) > 21.5\}$.

解：（1）$P\{\max(X_1, \cdots, X_5) > 21.5\} = 1 - P\{\max(X_1, \cdots, X_5) \le 21.5\} = 1 - P\{X_1 \le 21.5, \cdots, X_5 \le 21.5\}$
$= 1 - P\{X_1 \le 21.5\} \cdots P\{X_5 \le 21.5\} = 1 - [F(21.5)]^5 = 1 - [\Phi(0.5)]^5 = 1 - 0.6915^5 = 0.8419$；

（2）$P\{\min(X_1, \cdots, X_5) > 21.5\} = P\{X_1 > 21.5, \cdots, X_5 > 21.5\} = P\{X_1 > 21.5\} \cdots P\{X_5 > 21.5\}$
$= [1 - F(21.5)]^5 = [1 - \Phi(0.5)]^5 = (1 - 0.6915)^5 = 0.0028$.

8. 设$X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，试证明统计量$T = \dfrac{X_{n+1} - \overline{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \sim t(n-1)$.

解：因$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$，$X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$，且$\overline{X}$与$X_{n+1}$相互独立，即$X_{n+1} - \overline{X}$服从正态分布，

且$\mathrm{E}(X_{n+1} - \overline{X}) = \mathrm{E}(X_{n+1}) - \mathrm{E}(\overline{X}) = \mu - \mu = 0$，$\mathrm{D}(X_{n+1} - \overline{X}) = \mathrm{D}(X_{n+1}) + \mathrm{D}(\overline{X}) = \sigma^2 + \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{n+1}{n}\sigma^2$，

则$X_{n+1} - \overline{X} \sim N(0, \dfrac{n+1}{n}\sigma^2)$，即$\dfrac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}} \sim N(0,1)$，

因$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

故根据 t 分布的定义得 $\dfrac{\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{S\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}\sim t(n-1)$.

9. 设 X_1, X_2 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，求 $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 的分布.

解：因 $X_1\sim N(0, \sigma^2)$，$X_2\sim N(0, \sigma^2)$，且相互独立，

有 $E(X_1)=E(X_2)=0$，$D(X_1)=D(X_2)=\sigma^2$，$\mathrm{Cov}(X_1, X_2)=0$，

则 $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=0$，$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2$，

$E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=0$，$D(X_1-X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2$，

$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, X_1-X_2)=\mathrm{Cov}(X_1, X_1)-\mathrm{Cov}(X_1, X_2)+\mathrm{Cov}(X_2, X_1)-\mathrm{Cov}(X_2, X_2)=D(X_1)-D(X_2)=0$，

因 (X_1, X_2) 服从二维正态分布，X_1+X_2 与 X_1-X_2 都是 X_1 与 X_2 的线性组合，

有 (X_1+X_2, X_1-X_2) 也服从二维正态分布，即 $X_1+X_2\sim N(0, 2\sigma^2)$，$X_2-X_2\sim N(0, 2\sigma^2)$，且相互独立，

则 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，即 $\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，$\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，且相互独立，

故 $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}=\dfrac{\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}\Big/1}{\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}\Big/1}\sim F(1,1)$.

10. 设 $X_1, \cdots, X_6$ 是来自正态总体 $N(0, 3)$ 的样本，试确定常数 a 和 b，使得随机变量 $Y=a(X_1+X_2)^2+b(X_3-X_4+X_5+X_6)^2$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布.

解：因 $X_i\sim N(0, 3)$，$i=1, \cdots, 6$，且相互独立，有 $E(X_i)=0$，$D(X_i)=3$，

则 X_1+X_2 和 $X_3-X_4+X_5+X_6$ 都服从正态分布，

且 $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=0$，$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)=6$，

$E(X_3-X_4+X_5+X_6)=E(X_3)-E(X_4)+E(X_5)+E(X_6)=0$，

$D(X_3-X_4+X_5+X_6)=D(X_3)+D(X_4)+D(X_5)+D(X_6)=12$，

即 $X_1+X_2\sim N(0, 6)$，$X_3-X_4+X_5+X_6\sim N(0, 12)$，且相互独立，

得 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{6}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_3-X_4+X_5+X_6}{\sqrt{12}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{(X_1+X_2)^2}{6}+\dfrac{(X_3-X_4+X_5+X_6)^2}{12}\sim\chi^2(2)$，

故 $a=\dfrac{1}{6}$，$b=\dfrac{1}{12}$.