第二章　线性系统的数学模型

数学模型

描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间相互关系的数学表达式。

有了数学模型，就可以应用一定的数学方法对系统的性能进行定性分析和定量计算，乃至对系统进行综合和校正。

对线性定常系统，微分方程是最基本的数学模型，最常用的数学模型是在此基础上转换来的传递函数和动态结构图。

建立数学模型的方法有机理分析法和实验辨识法两种。

线性系统微分方程的编写步骤：

1. 确定系统或环节的输入量和输出量，选取必要的中间变量。

2. 从输入端开始，根据决定各变量之间相互关系的物理、化学等定律，一一写出相关变量的微分（或代数）方程式。

3. 消去中间变量，写出只含有系统输入和输出变量的微分方程。

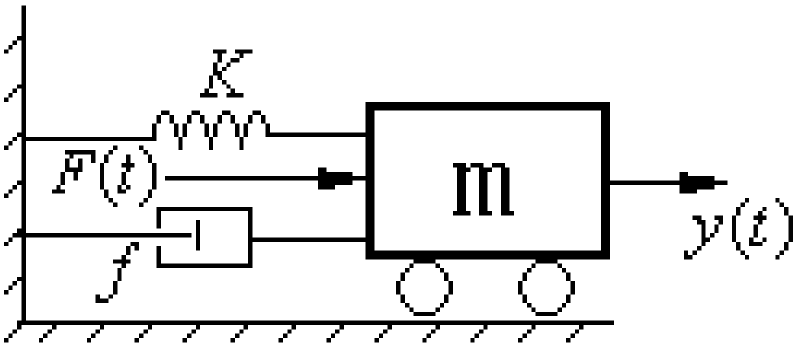
4. 将结果标准化，即含输出量的项写在等式左边，含输入量的项写在等式右边，且都按微分的高阶到低阶排列。其形式为：

$$\frac{d^n}{dt^n}c(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}c(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}c(t)+a_n c(t)$$

$$=b_0\frac{d^m}{dt^m}r(t)+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}r(t)+\cdots+b_{m-1}\frac{d}{dt}r(t)+b_m r(t)$$

例1：弹簧-阻尼-质量的机械位移系统

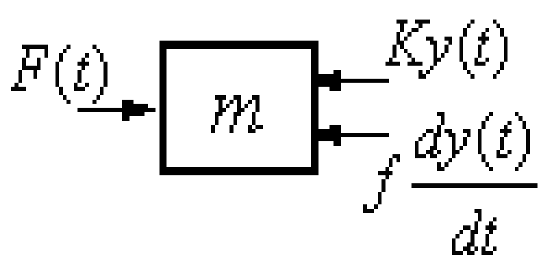
求弹簧-阻尼-质量的机械位移系统的微分方程。 K为弹簧的弹性系数， f为阻尼器的阻尼系数，忽略小车与地面的摩擦，试写出以外力F为输入，以位移y为输出的系统微分方程。



[解]：画出小车受力图。

弹簧力为 Ky

阻尼器阻力为 $f\dfrac{dy}{dt}$



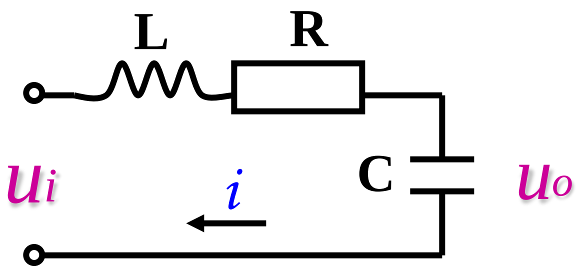
由牛顿运动定律，有

$$F - Ky - f\frac{d}{dt}y = m\frac{d^2}{dt^2}y$$

∴该系统微分方程为：

$$m\frac{d^2}{dt^2}y + f\frac{d}{dt}y + Ky = F$$

例2： RLC串联电路



u_i — 输入

u_o — 输出

解：(1)确定输入输出量

(2)列写微分方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=u_i \quad ①$$

$$i=C\frac{du_o}{dt} \quad ②$$

(3)消去中间变量

把②代入①，并进行整理得：

$$LC\frac{d^2}{dt^2}u_o+RC\frac{d}{dt}u_o+u_o=u_i$$

这是一个线性定常二阶微分方程。

微分方程是描述线性系统的一种基本的数学模型，在确定的初始条件和输入信号作用下，通过对微分方程的求解，便可得到系统的输出响应，从而分析评价系统的性能，研究系统参数的变化对性能的影响。

但是高阶微分方程的求解是比较困难的，而且分析系统的结构参数对性能的影响也十分不便。所以对系统进行分析和设计时，通常采用另外一种数学模型——**传递函数**。

2-2 线性系统的输入—输出传递函数描述

传递函数是经典控制理论中最重要的数学模型之一。利用传递函数，可以：

- 不必求解微分方程就可以研究零初始条件系统在输入作用下的动态过程。
- 了解系统参数或结构变化对系统动态过程的影响——分析
- 可以把对系统性能的要求转化为对传递函数的要求——综合

一、传递函数的概念

1. 传递函数的定义

线性定常系统的传递函数是在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，记为：

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

设线性定常系统的微分方程为：

$$\frac{d^n}{dt^n}c(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}c(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}c(t)+a_nc(t)$$

$$=b_0\frac{d^m}{dt^m}r(t)+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}r(t)+\cdots+b_{m-1}\frac{d}{dt}r(t)+b_mr(t)$$

式中：r(t)—输入，c(t) —输出，

$a_i, b_j (i=1\sim n, j=0\sim m)$ 为常系数，取决于系统的结构和参数。对于实际系统，n≥m 。

在零初始条件下，对上式进行拉氏变换得：

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n)C(s)$$
$$= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m)R(s)$$

∴传递函数：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

只要把微分方程中的微分算子 $\frac{d}{dt}$ 用复变量s表示，把$c(t)$和$r(t)$换成相应的象函数$C(s)$和$R(s)$，即可方便的求得系统的传递函数。反之亦然。

$$D(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

$$M(s)=b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{M(s)}{D(s)}$$

极点——传递函数分母多项式的根

零点——传递函数分子多项式的根

■表示成零点、极点形式：

将传递函数的分子、分母多项式变为首一多项式，然后在复数范围内因式分解，得：

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=b_0\times\frac{Q(s)}{P(s)}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

式中：$-z_i$ 称为传递函数的零点，

$-p_j$ 称为传递函数的极点，也称为系统的特征根。

$K^*=b_0$ ——零极点增益

2. 传递函数的性质

- ➢传递函数的概念只适用于线性定常系统，它与线性常系数微分方程一一对应。

- ➢传递函数仅与系统的结构和参数有关，与系统的输入无关。

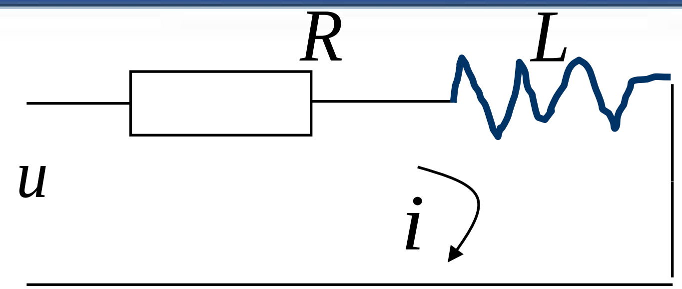
- ➢传递函数仅描述系统在零初始条件下输入和输出之间的关系，不反映系统内部中间变量如何传递。

- 物理性质不同的系统可以具有相同的传递函数；而在同一系统中，取不同的物理量作为输入或输出时，传递函数是不同的。

- 传递函数是s的有理分式，分母多项式称为系统的特征多项式。一个实际的即物理上可以实现的对象，总有分子的阶次m小于或等于分母的阶次n 。此时称为n阶系统。

3. 传递函数的求法

例1：RL电路如图所示



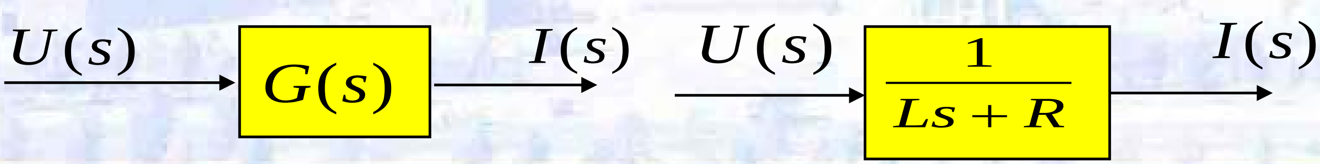
依据电路理论

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u$$

$$\Rightarrow \quad (Ls+R)I(s)=U(s)$$

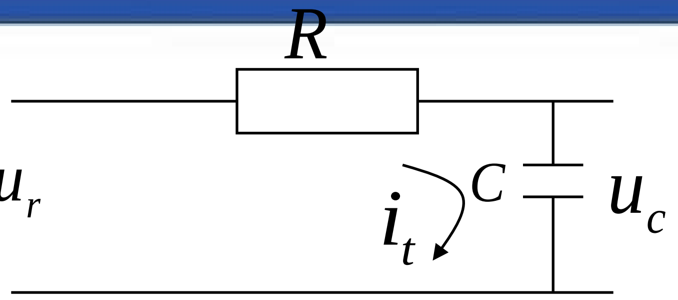
则传递函数为：

$$G(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ls+R}=\frac{\frac{1}{R}}{\frac{L}{R}s+1}$$



3. 传递函数的求法

例2：RC电路如图所示



依据基尔霍夫定律

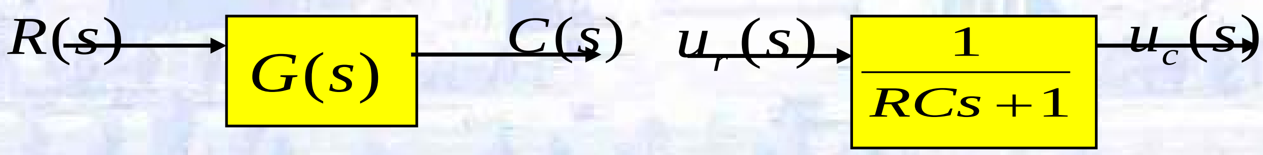
$$u_r(t) = Ri(t) + u_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

消去中间变量 $i(t)$

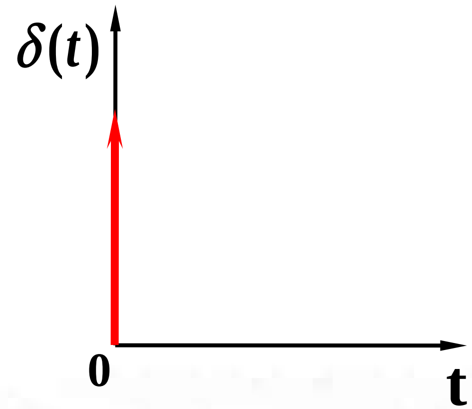
则微分方程为： $$RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

对上式进行零初始条件下的拉氏变换得 $$G(s) = \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$



4. 单位脉冲响应

单位脉冲函数 $\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0 \\ 0 & t\neq 0\end{cases}$



且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

单位脉冲函数的拉氏变换： $L[\delta(t)]=1$

当系统输入信号为δ（t）时，系统的输出响应称为脉冲响应，用g(t)表示。

4. 单位脉冲响应

$$\because \quad R(s) = L[\delta(t)] = 1$$

$$\therefore \quad C(s) = G(s)R(s) = G(s)$$

∴脉冲响应 $g(t) = c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[G(s)]$

即： $G(s) = L[g(t)]$

可见，脉冲响应函数g(t) 的拉氏变换就是传递函数。

所以，线性定常系统的传递函数和脉冲响应函数包含了关于系统动态特性的相同信息。

通过用脉冲输入信号激励系统并测量系统的响应，能够获得有关系统动态特性的全部信息。即脉冲响应也可作为系统的数学模型。

实际上，与数值较大的系统时间常数相比，持续时间很短的脉动输入信号可以看作脉冲输入信号。

2-4 典型环节的数学模型

◆ 从每个元件或设备的动态特性或数学模型来看，可以分成为数不多的几种基本类型，称它们为典型环节。

◆ 不管元件是机械式的、电气式的、热力式的、气力式的、液力式的或其他形式的，只要它们的数学模型一样，就认为它们是同一种基本环节。

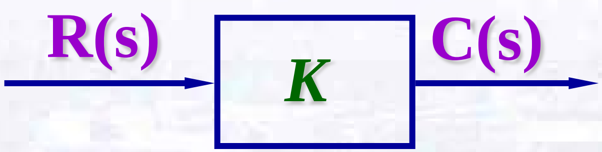
◆ 通常接触到的自动控制系统都可以看成由这些典型环节组合而成。

1. 比例环节

微分方程：　$c(t) = Kr(t)$

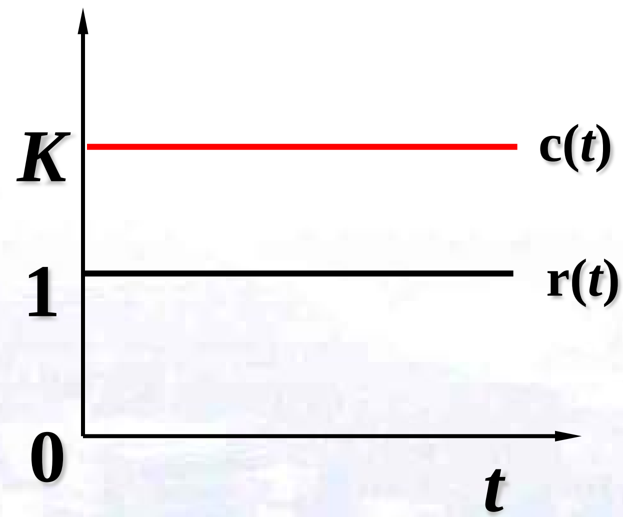
传递函数：　$G(s) = K$

框图：



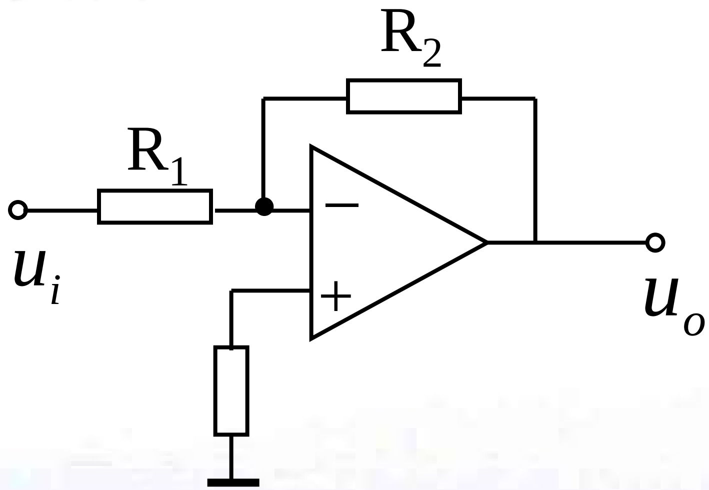
K——放大系数，又称增益

阶跃响应：



◆特点：输出不失真、不延迟、成比例地复现输入信号的变化。

实例：



利用“虚短”、“虚断”的概念，可得：

$$\frac{u_i}{R_1}=-\frac{u_o}{R_2}$$

进行拉氏变换：

$$\frac{U_i(s)}{R_1}=-\frac{U_o(s)}{R_2}$$

∴传递函数：$G(s)=\dfrac{U_o(s)}{U_i(s)}=-\dfrac{R_2}{R_1}$

另外，分压器、齿轮减速器等都是自控系统中常见的比例环节。

2. 惯性环节

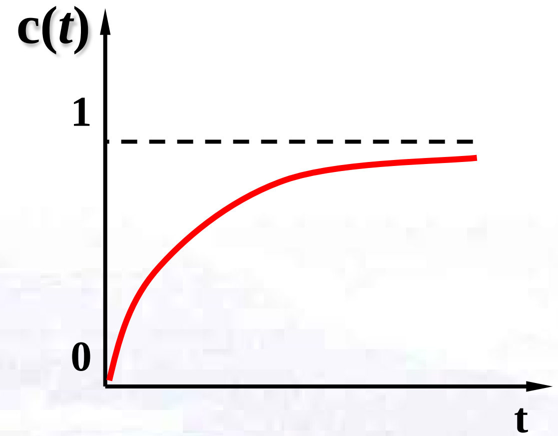
微分方程：$\tau \frac{d}{dt}c(t)+c(t)=Kr(t)$

传递函数：$G(s)=\frac{K}{\tau s+1}$

框图：$R(s) \rightarrow \boxed{\frac{K}{\tau s+1}} \rightarrow C(s)$

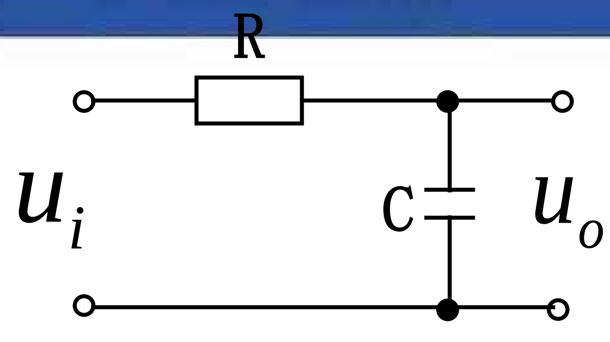
τ —— 惯性时间常数

阶跃响应：

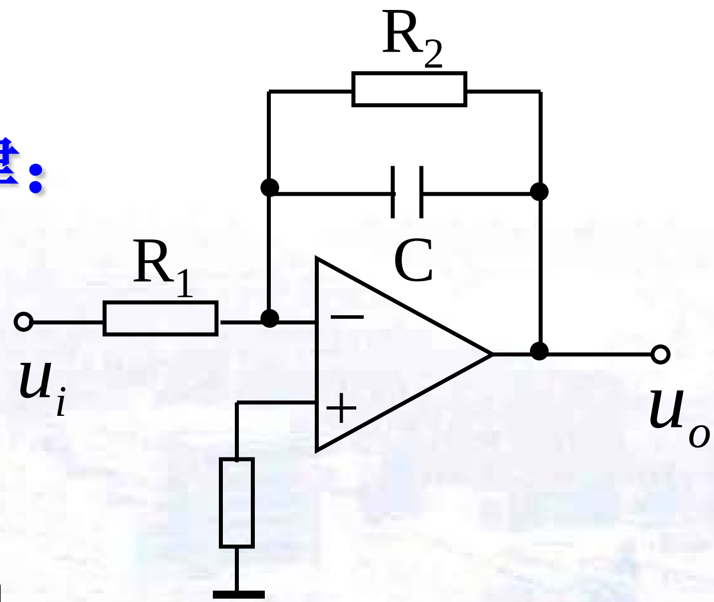


◆特点：输出量延缓地反应输入量的变化规律。当输入信号为阶跃函数时，输出响应按指数曲线上升。

①



利用运算阻抗的概念及电路定律：



$$\because \quad \frac{U_i(s)}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{U_o(s)}{\frac{1}{Cs}}$$

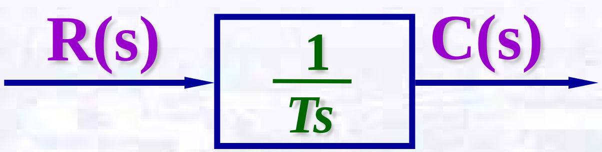
$$\therefore \quad G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{1}{RCs+1}$$

3. 积分环节

微分方程： $T\dfrac{d}{dt}c(t)=r(t)$

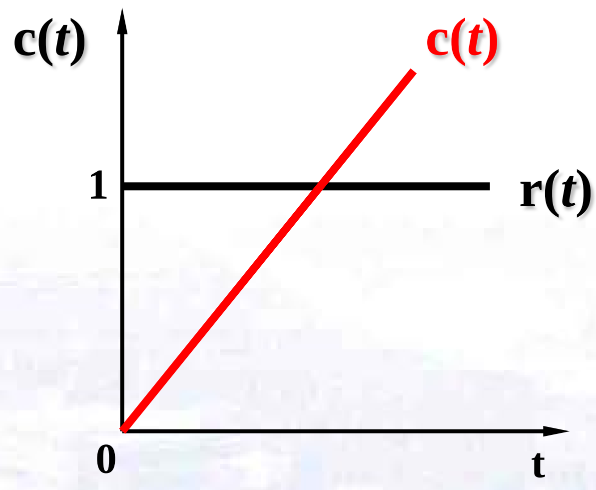
传递函数： $G(s)=\dfrac{1}{Ts}$

框图：



T —— 积分时间常数

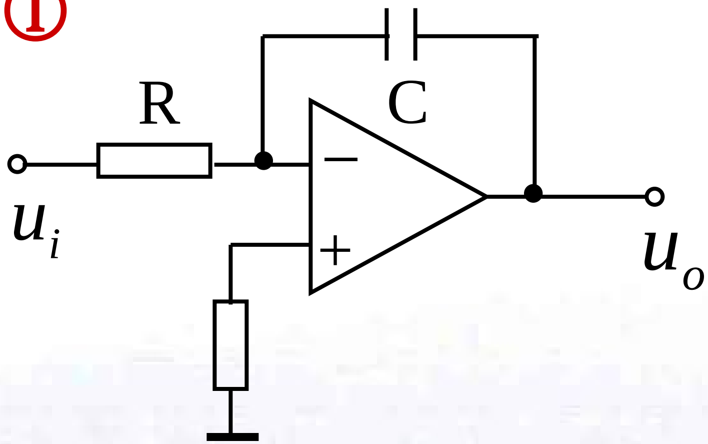
阶跃响应：



◆特点：输出量与输入量对时间的积分成正比。

实例：

①



利用运算阻抗的概念：

$$Z_1 = R$$

$$Z_2 = \frac{1}{Cs}$$

利用“虚短”、“虚断”的概念，可得：

$$\frac{U_i(s)}{Z_1} = -\frac{U_o(s)}{Z_2}$$

∴传递函数：

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{1}{RCs}$$

4. 微分环节

（1）理想微分环节

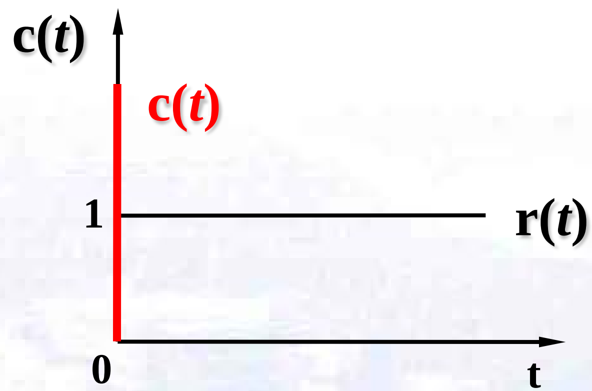
微分方程： $c(t)=\tau\dfrac{d}{dt}r(t)$

传递函数： $G(s)=\tau s$

框图： $R(s) \longrightarrow \boxed{\tau s} \longrightarrow C(s)$

τ —— 微分时间常数

阶跃响应：



◆特点：输出量与输入量对时间的微分成正比。

（2）实用微分环节

传递函数： $$G(s)=\frac{\tau s}{Ts+1}$$

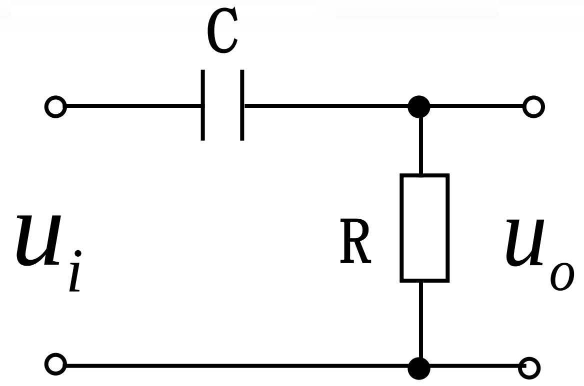
τ 、T 均为时间常数

该环节可视为理想微分环节和惯性环节的串联组合。

当T远小于1时，上式可近似为G(s)≈τs 。

实例：

①

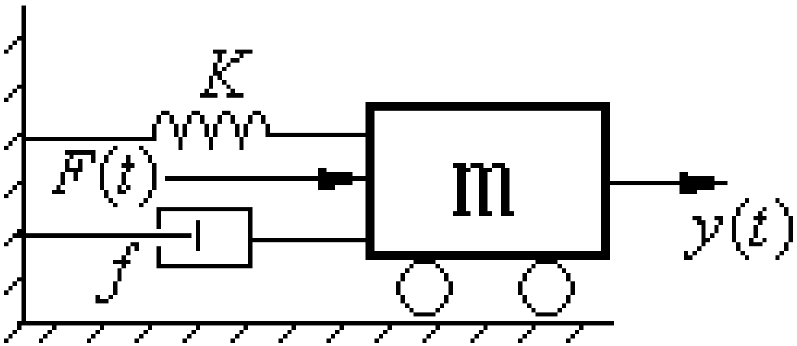


利用运算阻抗的概念及电路定律：

$$\because \quad \frac{U_i(s)}{R+1/Cs}=\frac{U_o(s)}{R}$$

$$\therefore \quad G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{R}{R+1/Cs}=\frac{RCs}{RCs+1}$$

5. 振荡环节

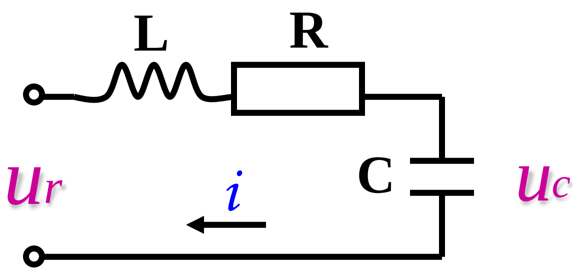


该系统微分方程为：

$$m\frac{d^2}{dt^2}y+f\frac{d}{dt}y+Ky=F$$

传递函数： $$G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+fs+K}$$

5. 振荡环节



u_r — 输入

u_c — 输出

$$LC\frac{d^2}{dt^2}u_c + RC\frac{d}{dt}u_c + u_c = u_r$$

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_c(s) = U_r(s)$$

传递函数: $$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

5. 振荡环节

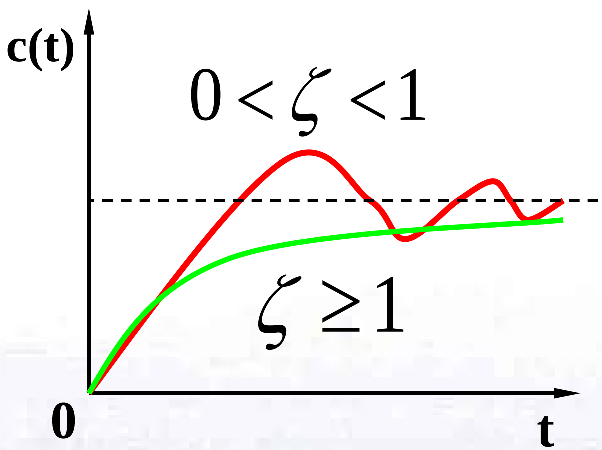
微分方程：
$$\tau^2\frac{d^2}{dt^2}c(t)+2\zeta\tau\frac{d}{dt}c(t)+c(t)=Kr(t)$$

传递函数：
$$G(s)=\frac{K}{\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1}$$

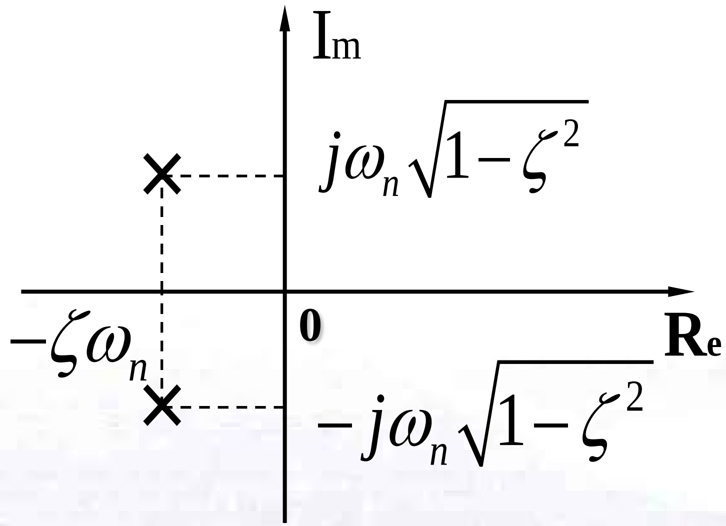
令 $\omega_n=\frac{1}{\tau}$ ， 则 $G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

ω_n —— 无阻尼自然振荡频率，ζ —— 阻尼比。

阶跃响应：



单位阶跃响应曲线



极点分布图

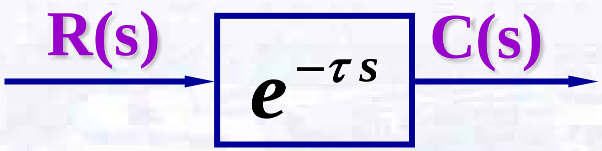
◆特点：当输入为阶跃信号时，输出量可能呈现振荡特性（**0<ζ<1** 时）。

6. 延迟环节(纯滞后环节、迟滞环节)

微分方程： $c(t) = r(t-\tau)$

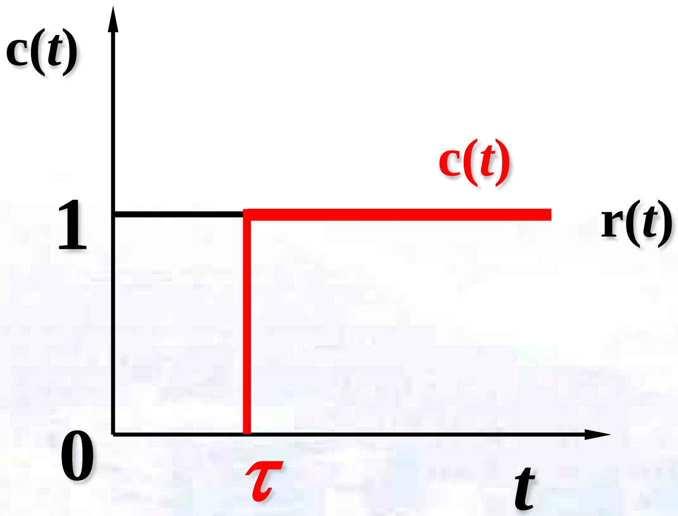
传递函数： $G(s) = e^{-\tau s}$

框图：



τ —— 延迟时间

阶跃响应：



◆特点：输出量是输入量在一定时间 τ 后的复现 。

在实际的控制工程中，有许多系统具有传递滞后的特征，特别是液压、气动和机械传动系统。

对于计算机控制系统，由于计算机进行数学运算需要一定时间，因此这类系统也有控制滞后的特征。

上述六种典型环节是按数学模型的特征来划分的，因此，它们与系统中的部件不一定能完全相对应。

一个部件的传递函数可以由若干个典型环节的传递函数所组成；反之，若干个部件传递函数的组合，有可能用一个典型环节的传递函数来表示。

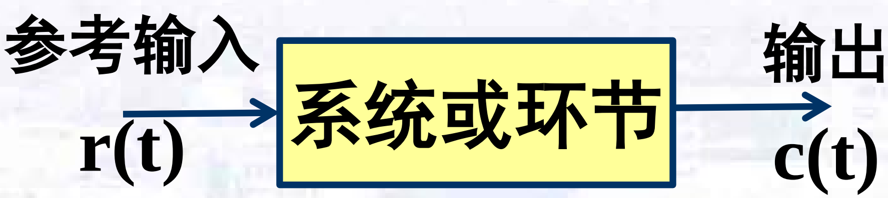
通常自动控制系统均可看成各种典型环节的组合。

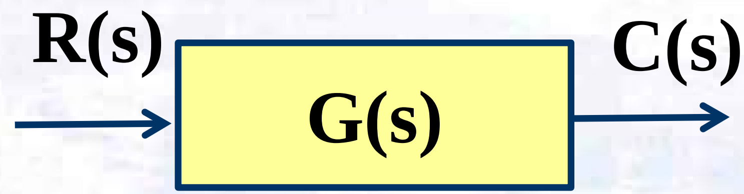
作　业

2-6 框图及其化简方法

一、框图的概念（方块图、结构图）

- 对于控制系统中的每个元件（环节），可以用框图来表示它的功能和信号流向. 方框表示系统或环节的数学模型，指向方框的箭头表示输入，从方框出来的箭头表示输出。



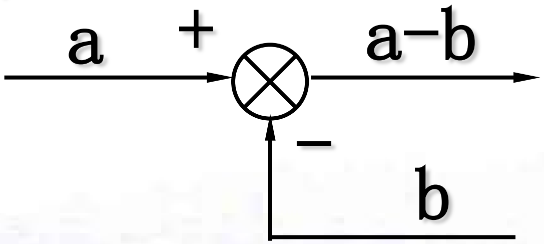


- 按照信号传递关系，从输入量到输出量依次把各个元件（环节）的方框连接起来，就组成了系统的动态结构图（框图）。

框图是描述系统的又一种数学模型。框图不仅直观地表示了系统中各环节间的关系和信号的传递过程，而且通过变换的方法可以比较方便地求出系统的传递函数。

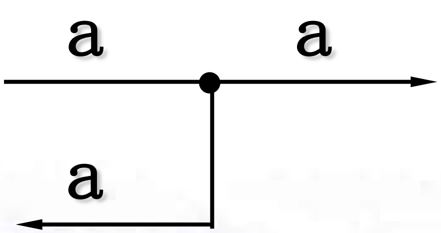
在框图中会用到以下两个概念：

1. 综合点（相加点、汇合点）



每个箭头上的“+”、“−”表示信号是相加还是相减，进行相加减的量应具有相同的量纲。

2. 引出点（分支点）



引出点引出信号后，不改变原来的信号。

二、框图的等效变换和化简

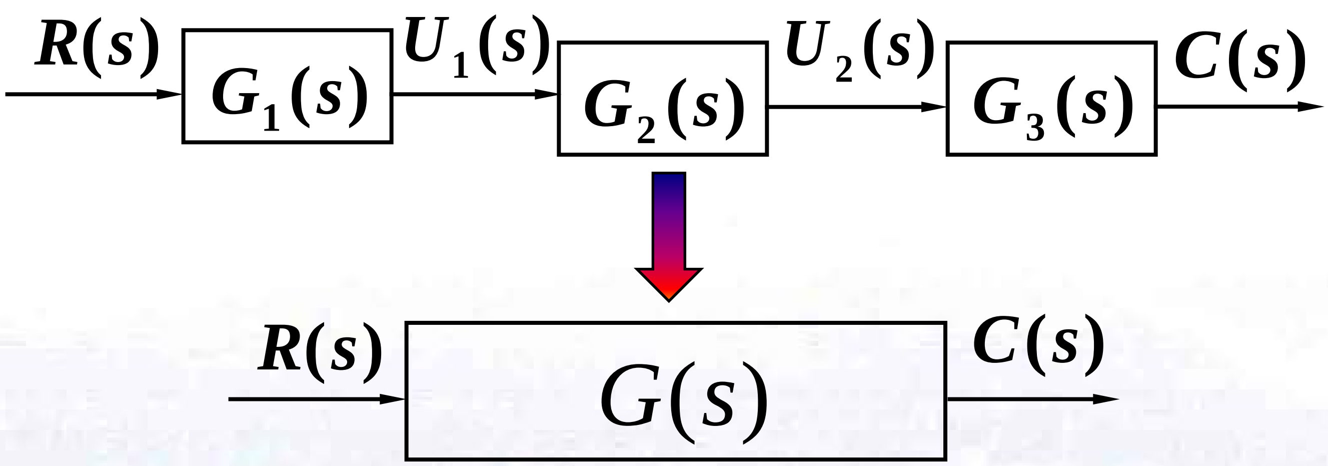
框图等效变换的基本原则：

变换前后各变量间的数学关系保持不变。

（一）环节组合的等效变换

系统中的各环节有串联、并联和反馈三种基本的连接方法。

1. 环节的串联

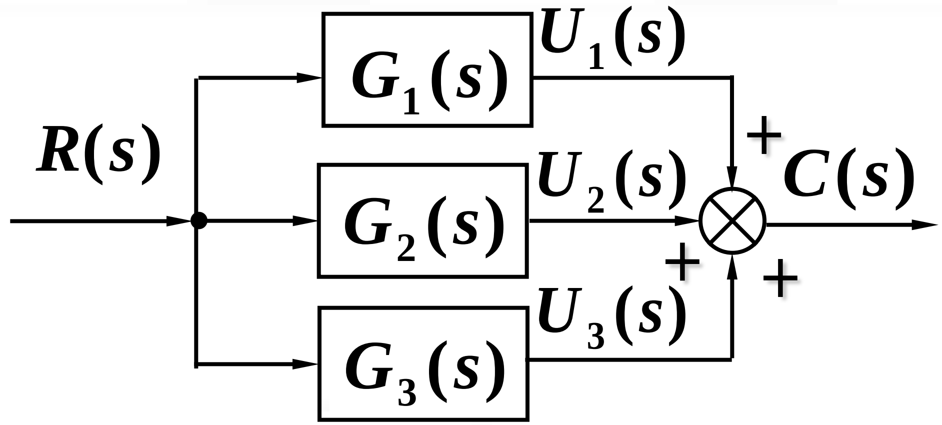


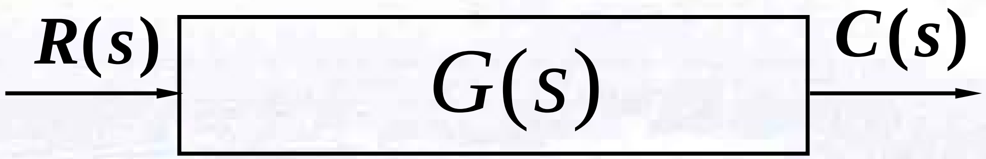
$$G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$

依此类推，可得：n个环节串联，等效传递函数为各环节传递函数的乘积，即：

$$G(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s)$$

2. 环节的并联



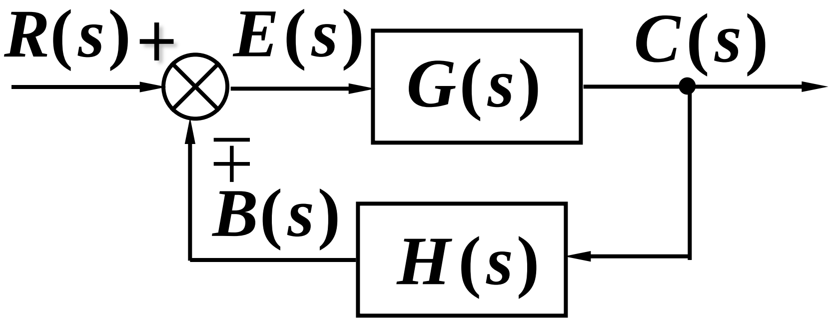


$$= G_1(s)+G_2(s)+G_3(s)$$

依此类推，可得：n个环节并联，等效传递函数为各环节传递函数的代数和，即：

$$G(s)=\sum_{i=1}^{n} G_i(s)$$

3. 反馈连接



负反馈连接时

$E(s)=R(s)-B(s)$

前向通道传递函数——打开反馈后，输出$C(s)$与$R(s)$之比。等价于$C(s)$与误差$E(s)$之比

$$\frac{C(s)}{E(s)}=G(s)$$

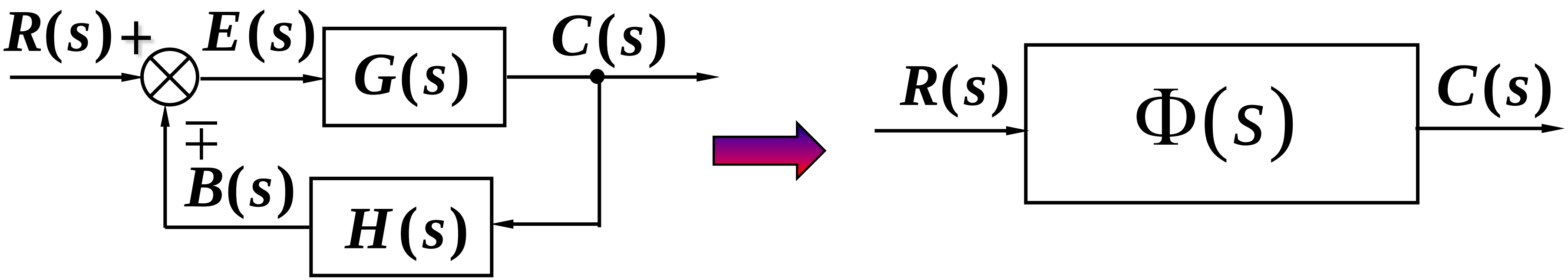
反馈通道传递函数 ——主反馈信号$B(s)$与输出信号$C(s)$之比

$$\frac{B(s)}{C(s)}=H(s)$$

开环传递函数 **Open-loop Transfer Function**

主反馈信号$B(s)$与误差信号$E(s)$之比

$$\frac{B(s)}{E(s)}=G(s)H(s)$$



推导：

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$B(s) = H(s)C(s)$$

$$E(s) = R(s) \mp B(s)$$

$$\therefore C(s) = G(s)[R(s) \mp H(s)C(s)]$$

等效传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

闭环传递函数

（二）综合点和引出点的移动

如果上述三种连接交叉在一起而无法化简，则要考虑移动某些信号的综合点和引出点。

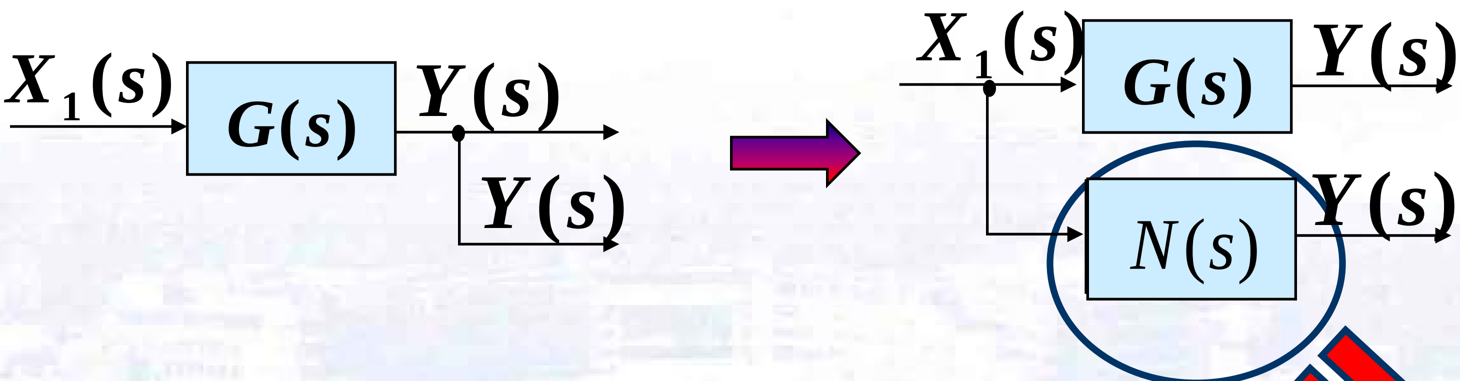
等效变换的原则：

1. 变换前后引出的信号不变。

2. 变换前后综合后的信号不变。

1. 引出点的移动：

- 引出点从环节的输出端移到输入端（前移）

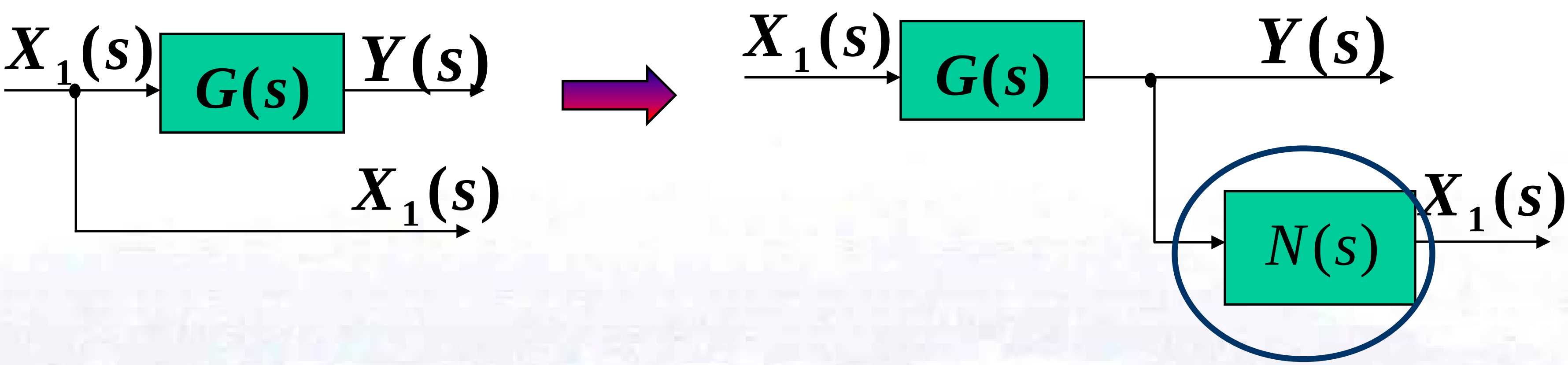


$$\because X_1(s)G(s) = Y(s), \quad X_1(s)N(s) = Y(s)$$

$G(s)$

$$\therefore N(s) = G(s)$$

引出点从环节的输入端移到输出端（后移）



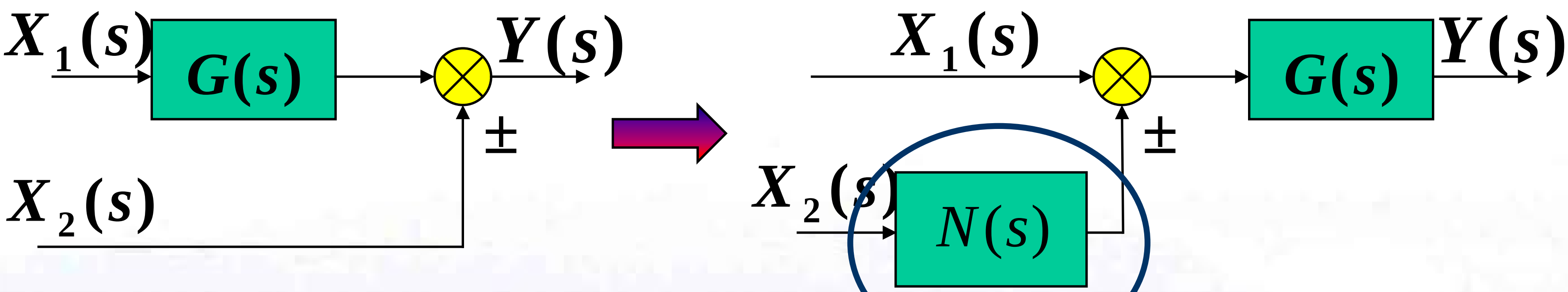
$$\because X_1(s)G(s)N(s) = X_1(s)$$

$$\therefore N(s) = \frac{1}{G(s)}$$

$$\frac{1}{G(s)}$$

2. 综合点的移动：

- 把综合点从环节的输出端移到输入端（前移）



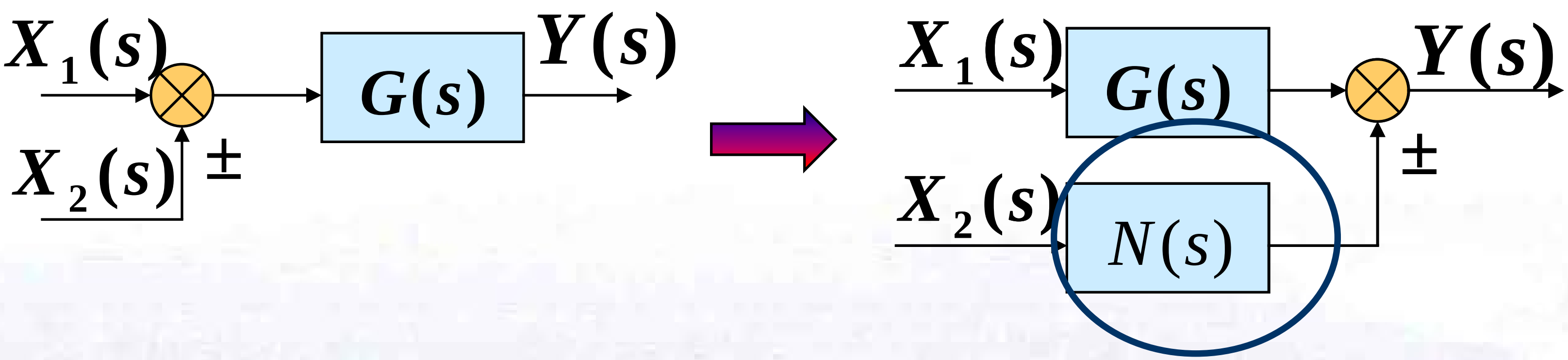
$$\because Y(s) = X_1(s)G(s) \pm X_2(s),$$

$$Y(s) = X_1(s)G(s) \pm X_2(s)N(s)G(s),$$

$$\therefore N(s) = \frac{1}{G(s)}$$

$$\frac{1}{G(s)}$$

把综合点从环节的输入端移到输出端（后移）



$$\because Y(s) = [X_1(s) \pm X_2(s)]G(s),$$

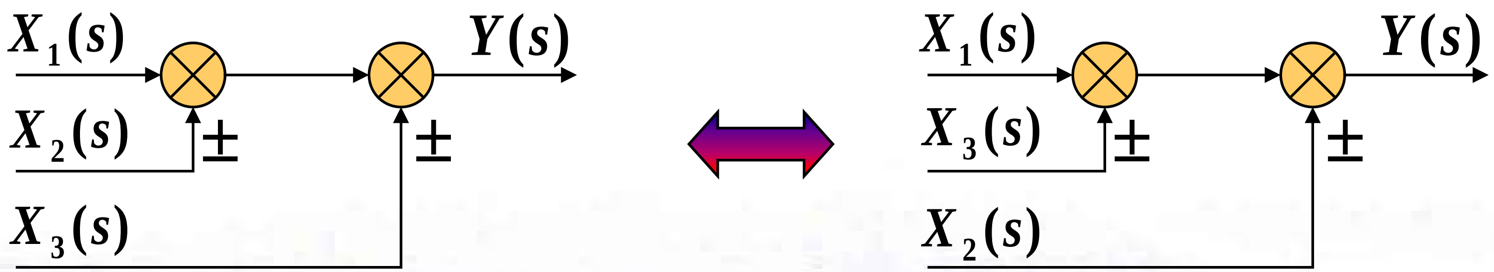
$$又: Y(s) = X_1(s)G(s) \pm X_2(s)N(s),$$

$$\therefore N(s) = G(s)$$

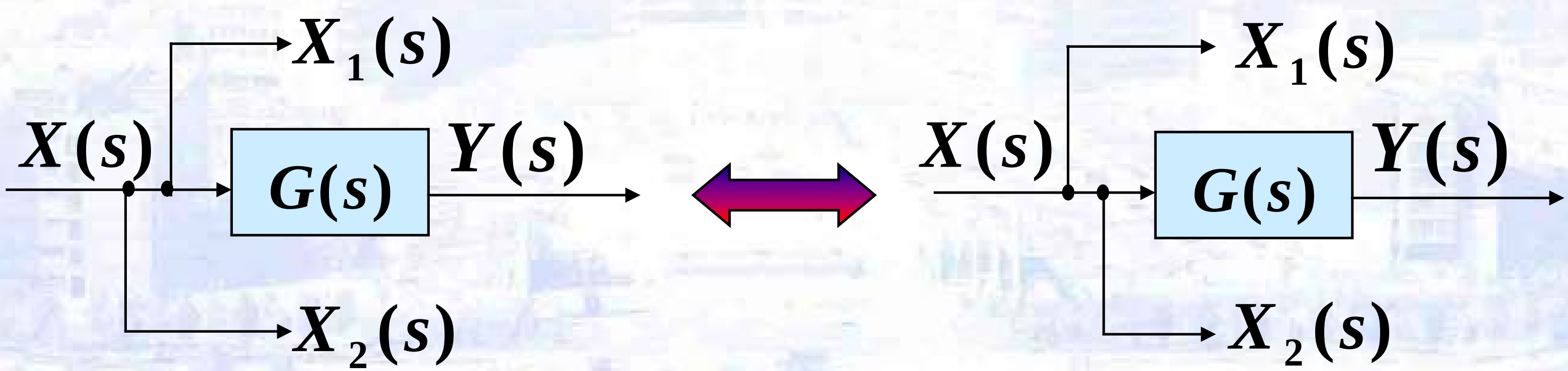
$G(s)$

[注意]：

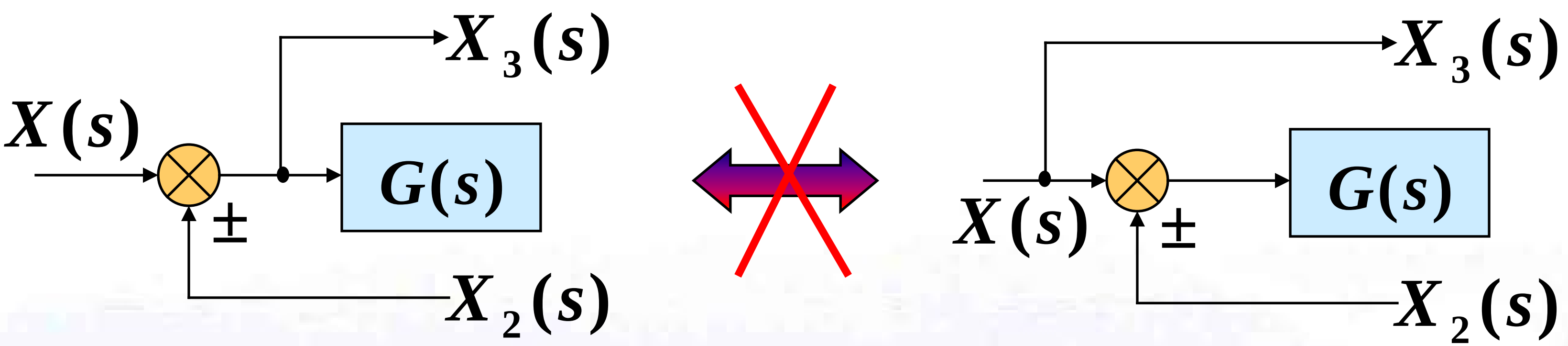
- 相邻的信号综合点位置可以互换



- 同一信号的引出点位置可以互换

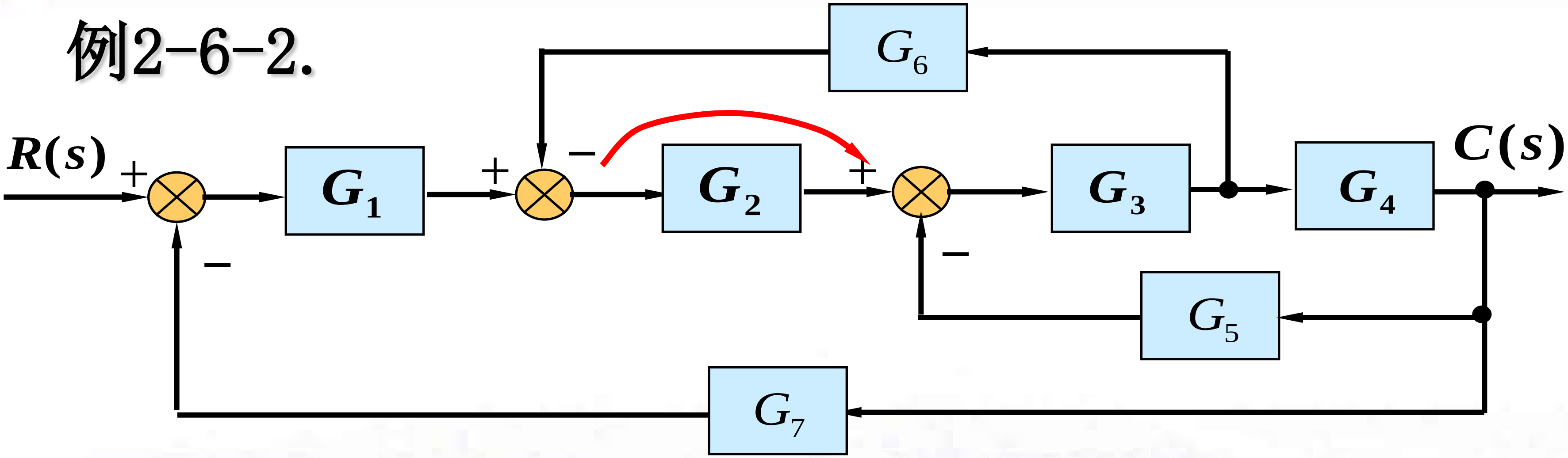


- 综合点和引出点在一般情况下，不能互换。

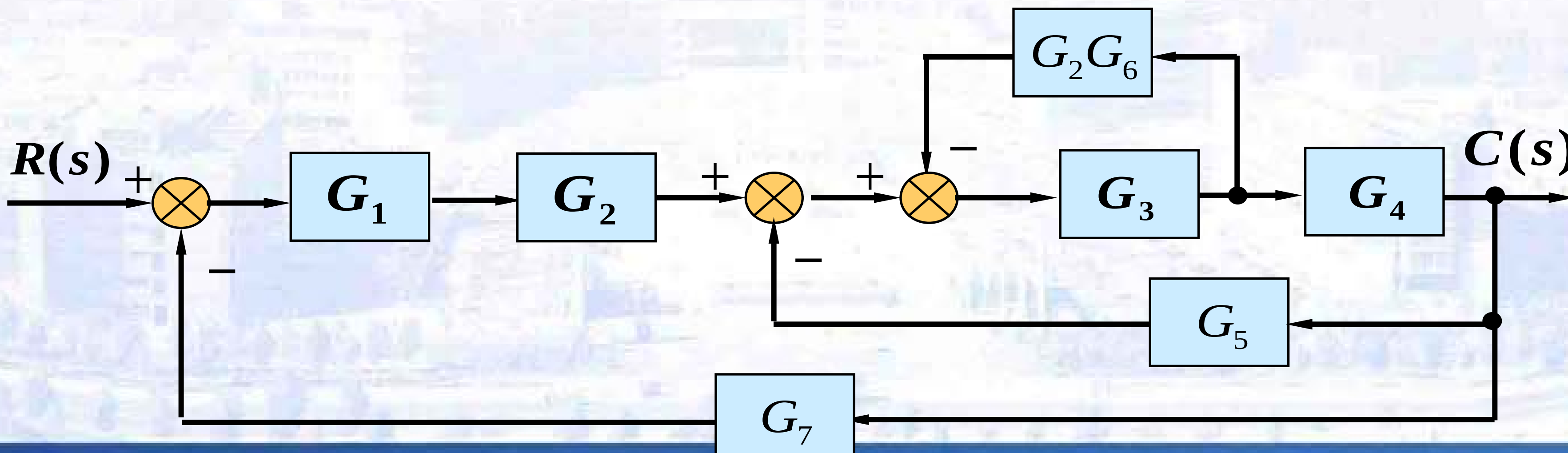


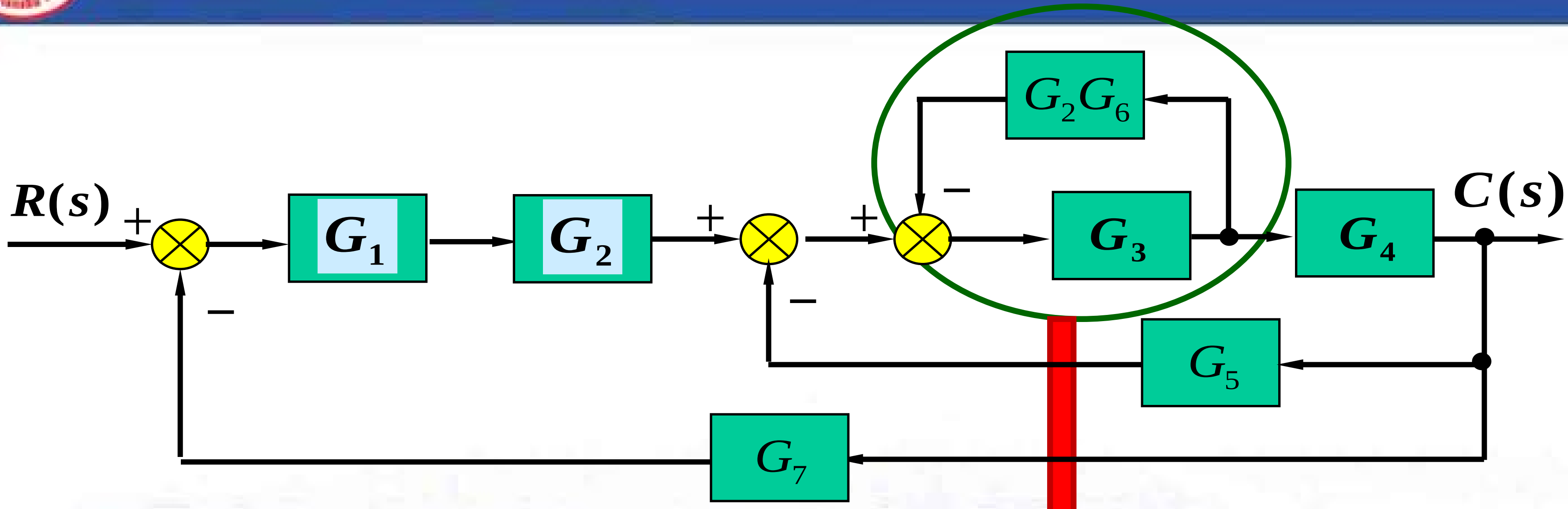
所以，一般情况下，综合点向综合点移动，引出点向引出点移动。

例2-6-2.

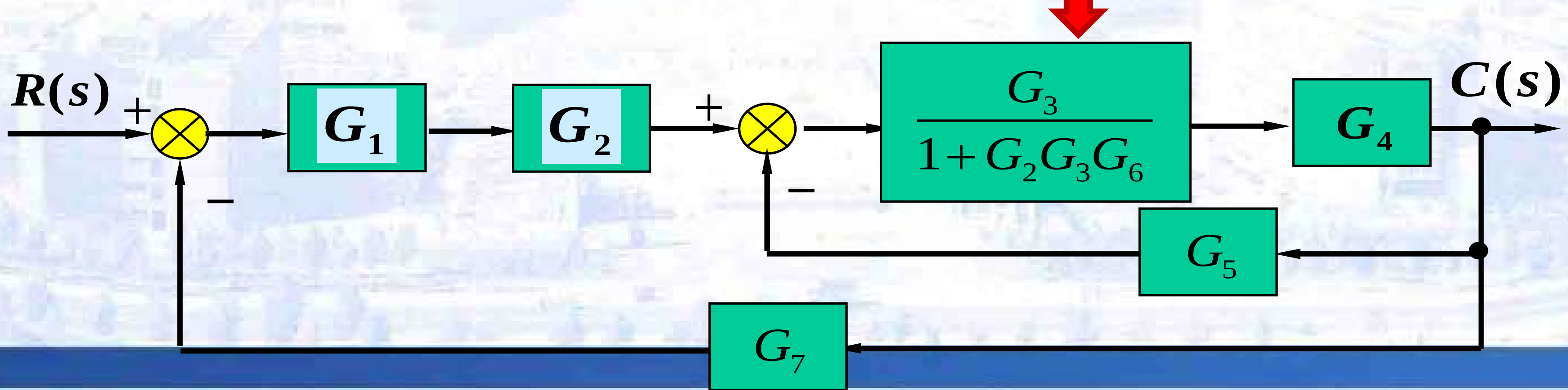


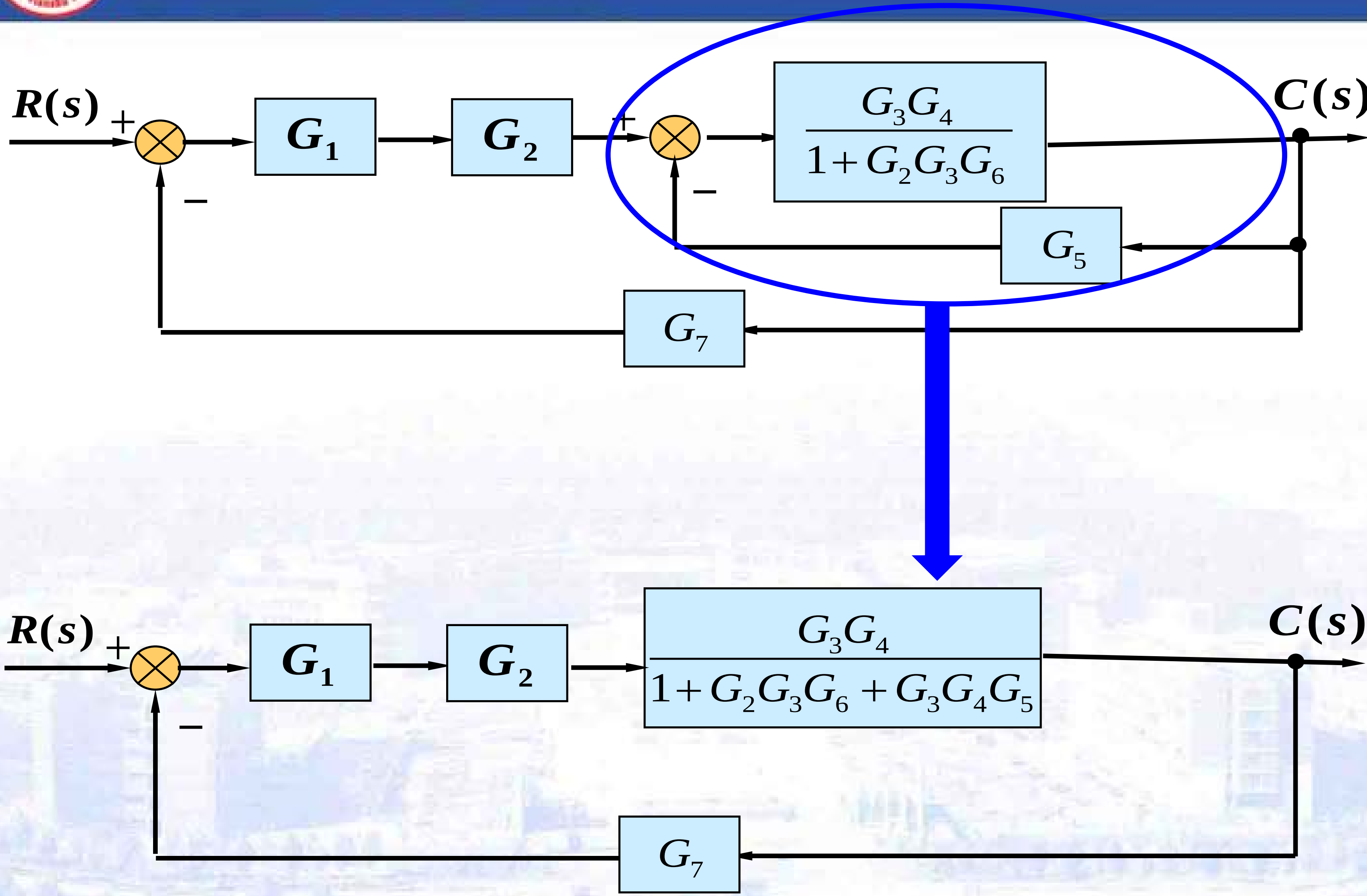
解：首先通过移动综合点消除交错。



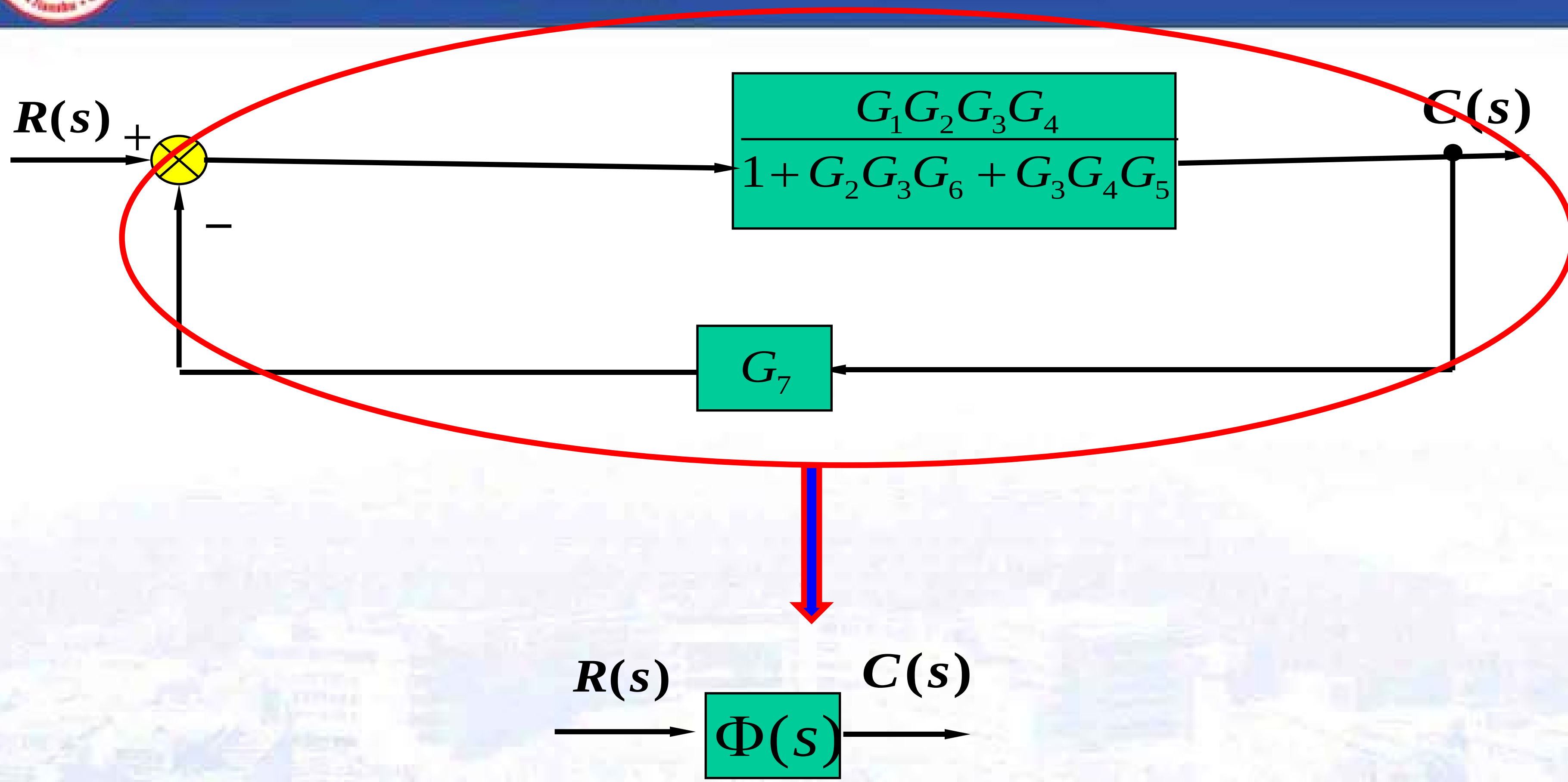


然后按反馈连接的法则从内层到外层依次求解，



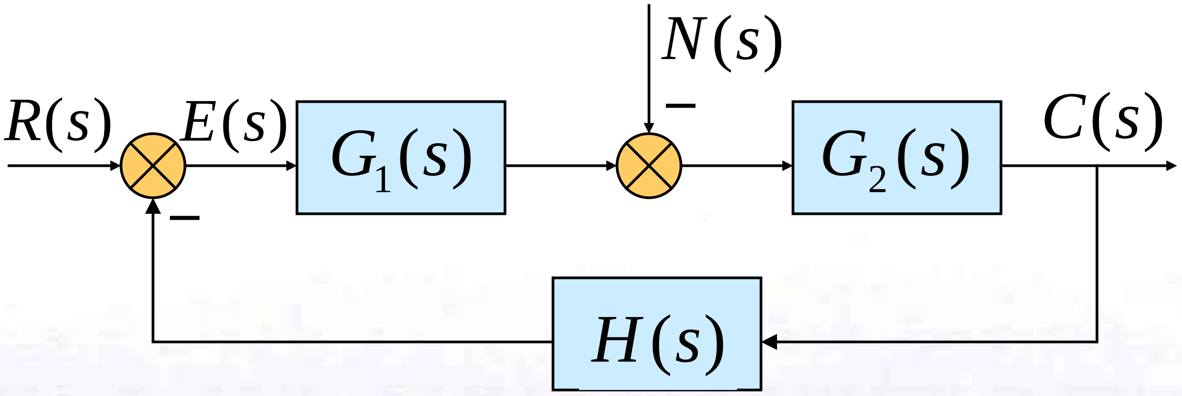


$R(s)$
+
G_1
G_2
+
$\frac{G_3G_4}{1+G_2G_3G_6}$
$C(s)$
−
−
G_5
G_7
$R(s)$
+
G_1
G_2
$\frac{G_3G_4}{1+G_2G_3G_6+G_3G_4G_5}$
$C(s)$
−
G_7



$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_2G_3G_6+G_3G_4G_5+G_1G_2G_3G_4G_7}$$

例2-6-3：闭环控制系统的典型结构图如下图所示，求系统的输出C(s)。

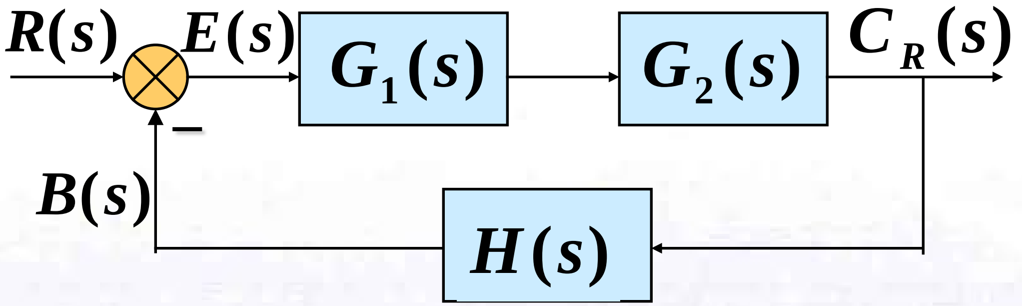


图中，$R(s)$ 为参考输入量，$N(s)$为扰动输入量，同时作用于系统，产生输出 $C(s)$ 。

由于线性系统满足叠加原理，因此我们可以先求出 $R(s)$ 和 $N(s)$分别作用时系统的输出，然后再进行叠加得出它们共同作用时的输出$C(s)$。

（1）给定输入单独作用下：

令 $N(s)=0$ ，则有：

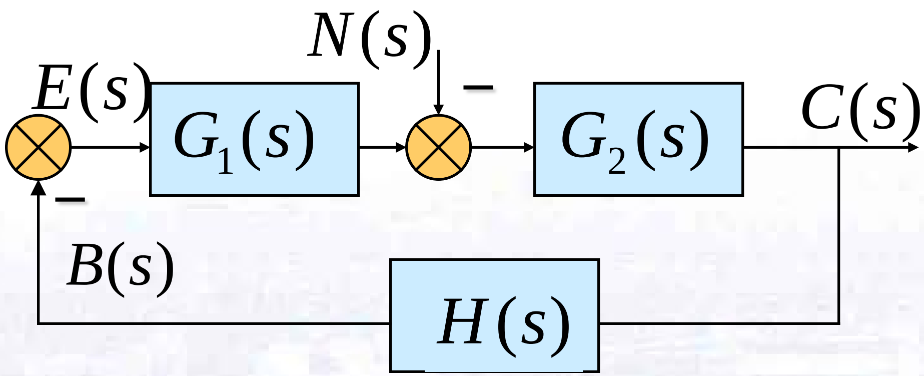


$$\Phi_R(s)=\frac{C_R(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}$$

输出量为： $$C_R(s)=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}R(s)$$

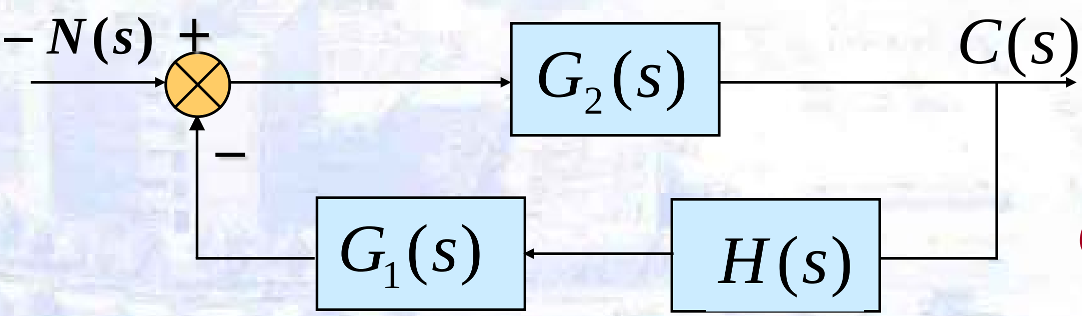
（2）扰动输入单独作用下：

令R(s)=0, 结构图如下：



输出对扰动的传递函数为：

$$\Phi_N(s)=\frac{C_N(s)}{N(s)}=-\frac{G_2(s)}{1+G_1G_2H}$$



输出为：

$$C_N(s)=-\frac{G_2}{1+G_1G_2H}N(s)$$

(3) 给定输入和扰动输入同时作用下

根据线性叠加原理：

输出： $C(s)=\Phi(s)R(s)+\Phi_N(s)N(s)$

$$\Phi(s)=\frac{C_R(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H} \qquad \Phi_N(s)=\frac{C_N(s)}{N(s)}=-\frac{G_2(s)}{1+G_1G_2H}$$

[提示]：各个传递函数 $\Phi(s),\Phi_N(s)$ 都具有相同的分母多项式，称为控制系统的特征多项式。

作　　业

2-7 信号流程图

信号流图和框图类似，都可用来表示系统结构和信号传送过程中的数学关系。因而信号流图也是数学模型一种表示。

框图及其等效变换虽然对分析系统很有效，但是对于比较复杂的系统，方框图的变换和化简过程往往显得繁琐、费时，并易于出错。如采用信号流图，则可利用梅逊公式，不需作变换而直接得出系统中任何两个变量之间的数学关系。

一、信号流图的组成要素及其术语

信号流图起源于梅逊（S. J. MASON）利用图示法来描述线性代数方程，是由节点和支路组成的一种信号传递网络。

节点

表示变量或信号，其值等于所有进入该节点的信号之和。

支路

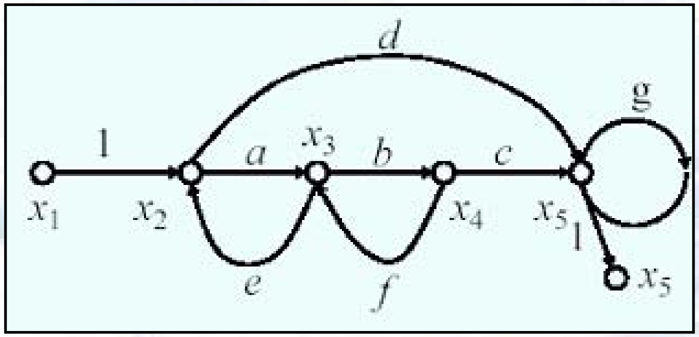
连接两个节点的定向线段，用支路增益（传递函数）表示方程式中两个变量的因果关系。支路相当于乘法器。信号在支路上沿箭头单向传递。

$$x_2 = x_1 + ex_3$$

$$x_3 = ax_2 + fx_4$$

$$x_4 = bx_3$$

$$x_5 = dx_2 + cx_4 + gx_5$$

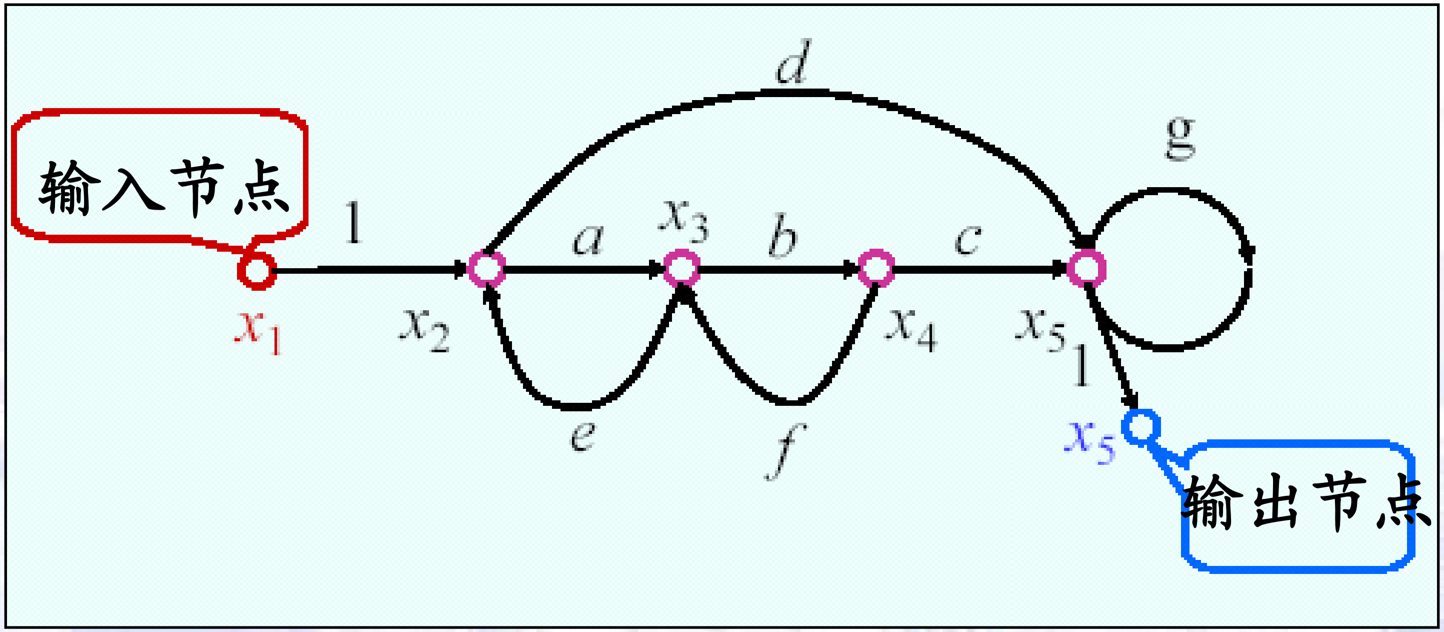


输入节点
源节点

只有输出的节点，代表系统的输入变量。

输出节点
阱点

只有输入的节点，代表系统的输出变量。



混合节点

既有输入又有输出的节点。若从混合节点引出一条具有单位增益的支路，引出信号为输出节点。

通道

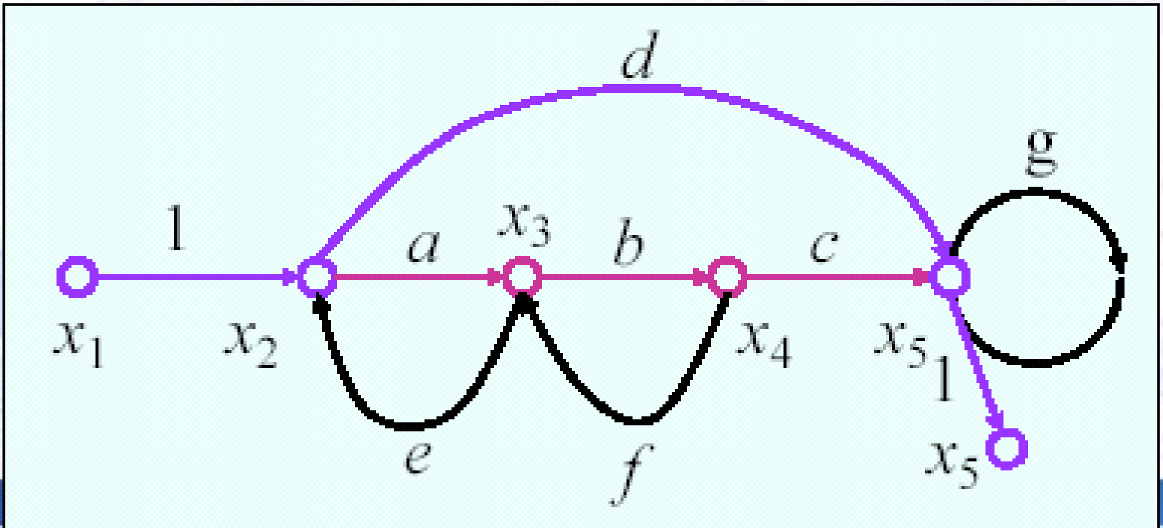
沿支路箭头所指方向经过多个节点的路径

前向通道

从输入节点到输出节点的通道上通过任何节点不多于一次的通道。前向通道上各支路增益之乘积，称前向通道总增益或前向通道传输

开通道

如果通道从某节点开始，终止在另一节点上，且通道中每个节点只经过一次，则该通道称为开通道。

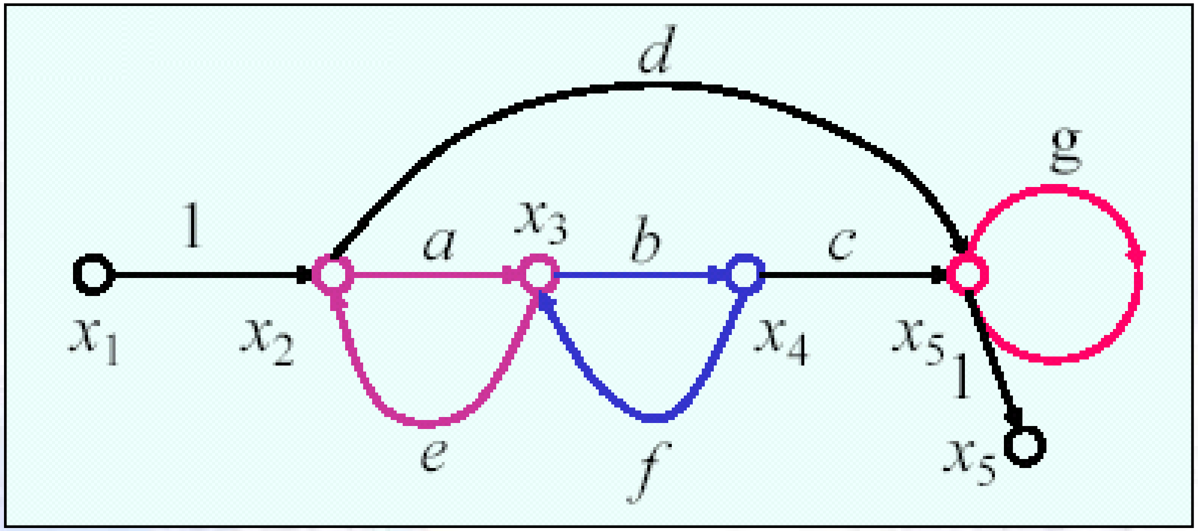


回路
闭通道

如果通道的终点就是通道的起点，而与任何其它节点相交次数不多于一次，则称为闭通道或回路、回环等。如果从一个节点开始，只经过一条支路又回到该节点的，称为自回环。

回路增益
回路传输

回路中所有支路增益之乘积称为回路增益、回路传输



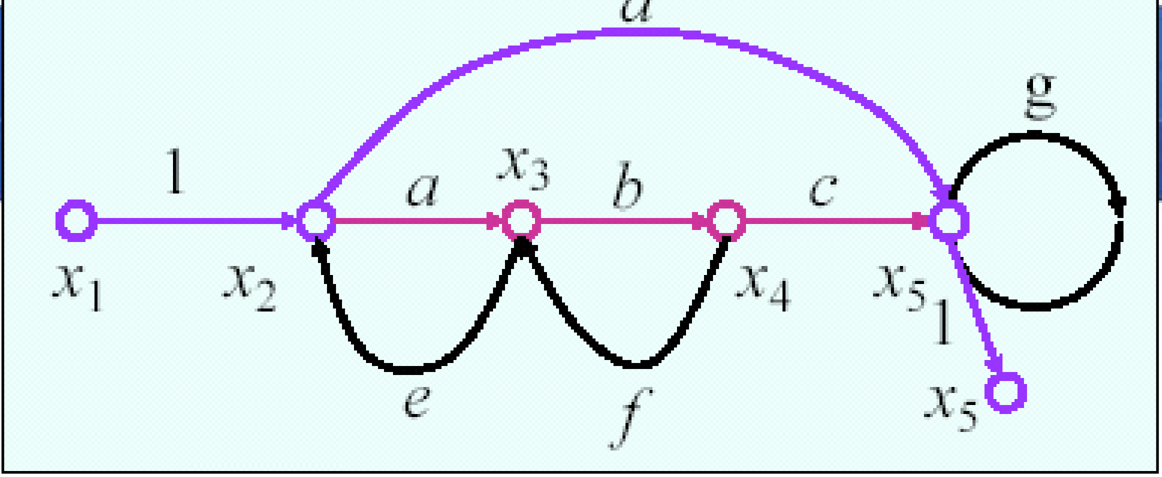
ae

bf

g

不接触回路

相互间没有任何公共节点的回路



前向通道

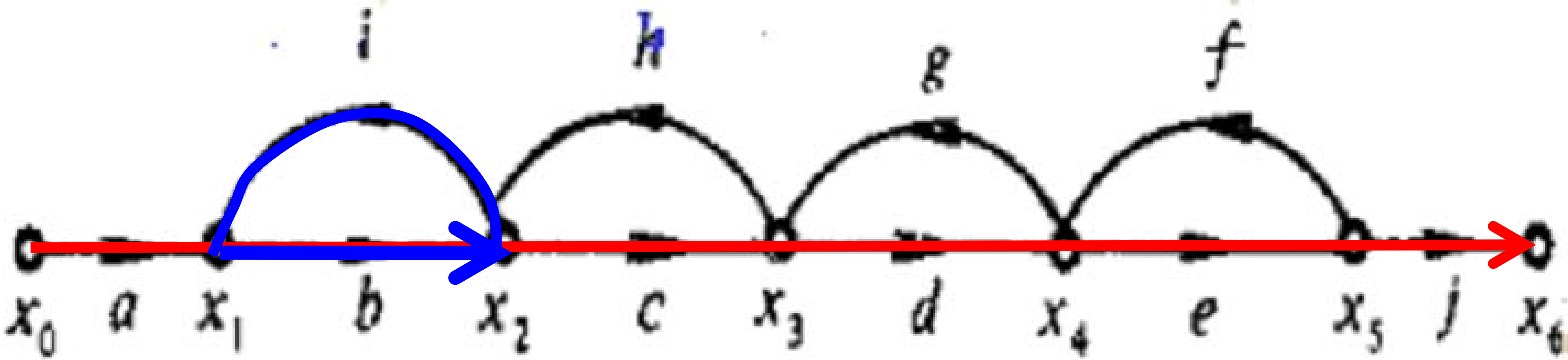
从输入节点到输出节点的通道上通过任何节点不多于一次的通道。前向通道上各支路增益之乘积，称前向通道总增益或前向通道传输

回路
闭通道

如果通道的终点就是通道的起点，而与任何其它节点相交次数不多于一次，则称为闭通道或回路、回环等。如果从一个节点开始，只经过一条支路又回到该节点的，称为自回环。

不接触回路

相互间没有任何公共节点的回路



- x_0为源节点，x_6为阱点。x_1、x_2、x_3、x_4和x_5为混合节点。
- *abcdej*是一条前向通道，而*abcde*和*fghi*是普通的通道，*ai*不是通道,因为两条支路的方向不一致。*abi*也不是通道，因为两次经过节点x_1 。
- *bi*是一个闭通道（回环），而*bchi*不是一个闭通道，因为有两次经过节点x_2。
- 图中共有四个回环，即*bi,ch,dg*和*ef*。两个互不接触的回环有三种组合，即*bi*、*ef,bi*、*dg*和*ch*、*ef*。本系统没有三个及三个以上互不接触的回环。

二. 信号流图的基本性质

1. 以节点代表变量，源点代表输入量，阱点代表输出量，用混合节点代表变量或信号的汇合。在混合节点处，出支路的信号等于各支路信号的叠加。

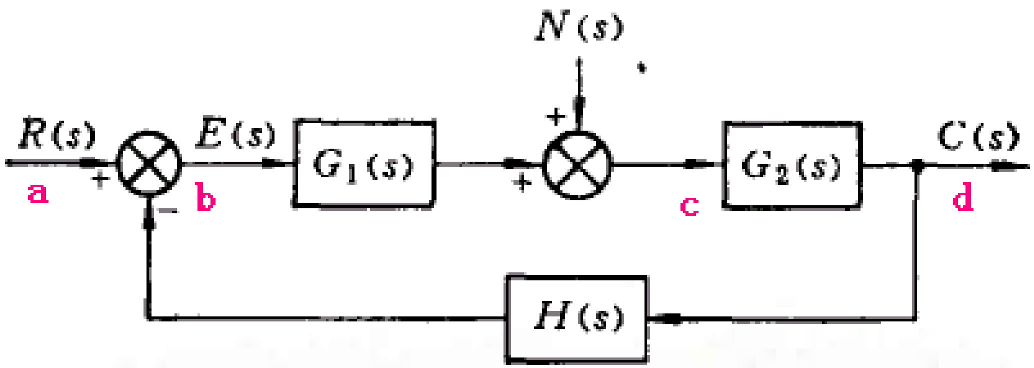
2. 以支路表示变量或信号的传输和变换过程，信号只能沿着支路的箭头方向传输。在信号流图中每经过一条支路，相当于在方框图中经过一个用方框表示的环节。

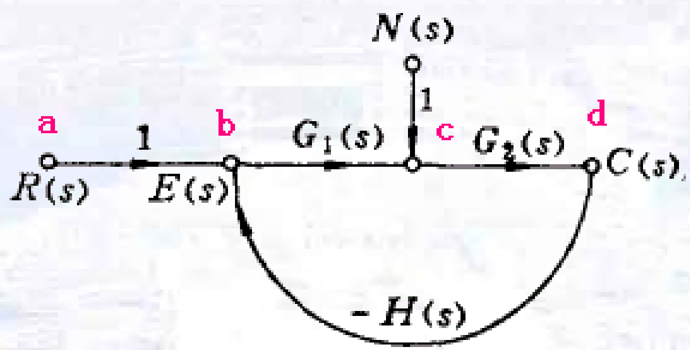
3. 增加一个具有单位传输的支路，可以把混合节点化为阱点。

4. 对于同一系统，信号流图的形式不是唯一的。信号流图和方框图是一一对应的，且可以互相转化。

三、信号流图与结构图的转换

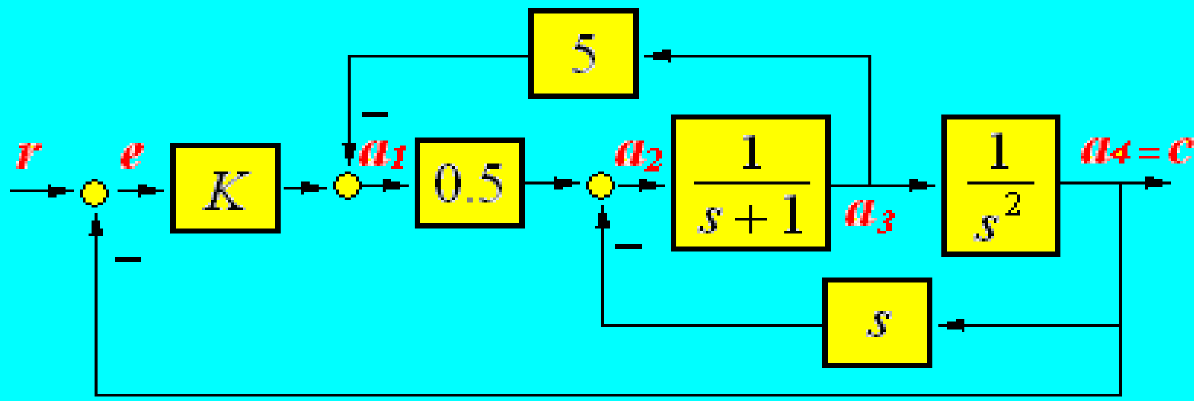
方块图转换为信号流图示例1

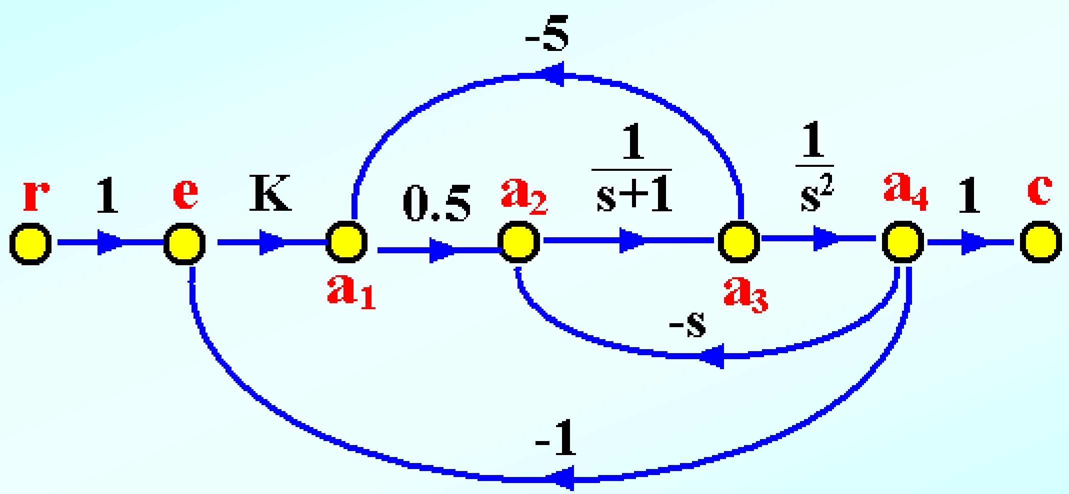




注意：框图中比较环节的正负号在信号流图中表现在支路传输的符号上。

方块图转换为信号流图示例2





注意：框图中比较环节的正负号在信号流图中表现在支路传输的符号上。

四、梅逊公式

G —系统总传递函数 $G(s)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k$

P_k—第k条前向通路的传递函数（通路增益）

Δ —流图特征式 $\Delta=1-\sum L_{(1)}+\sum L_{(2)}-\sum L_{(3)}+\ldots+(-1)^m\sum L_{(m)}$

$\sum L_{(1)}$—所有不同回路的传递函数之和

$\sum L_{(2)}$—每两个互不接触回路传递函数乘积之和

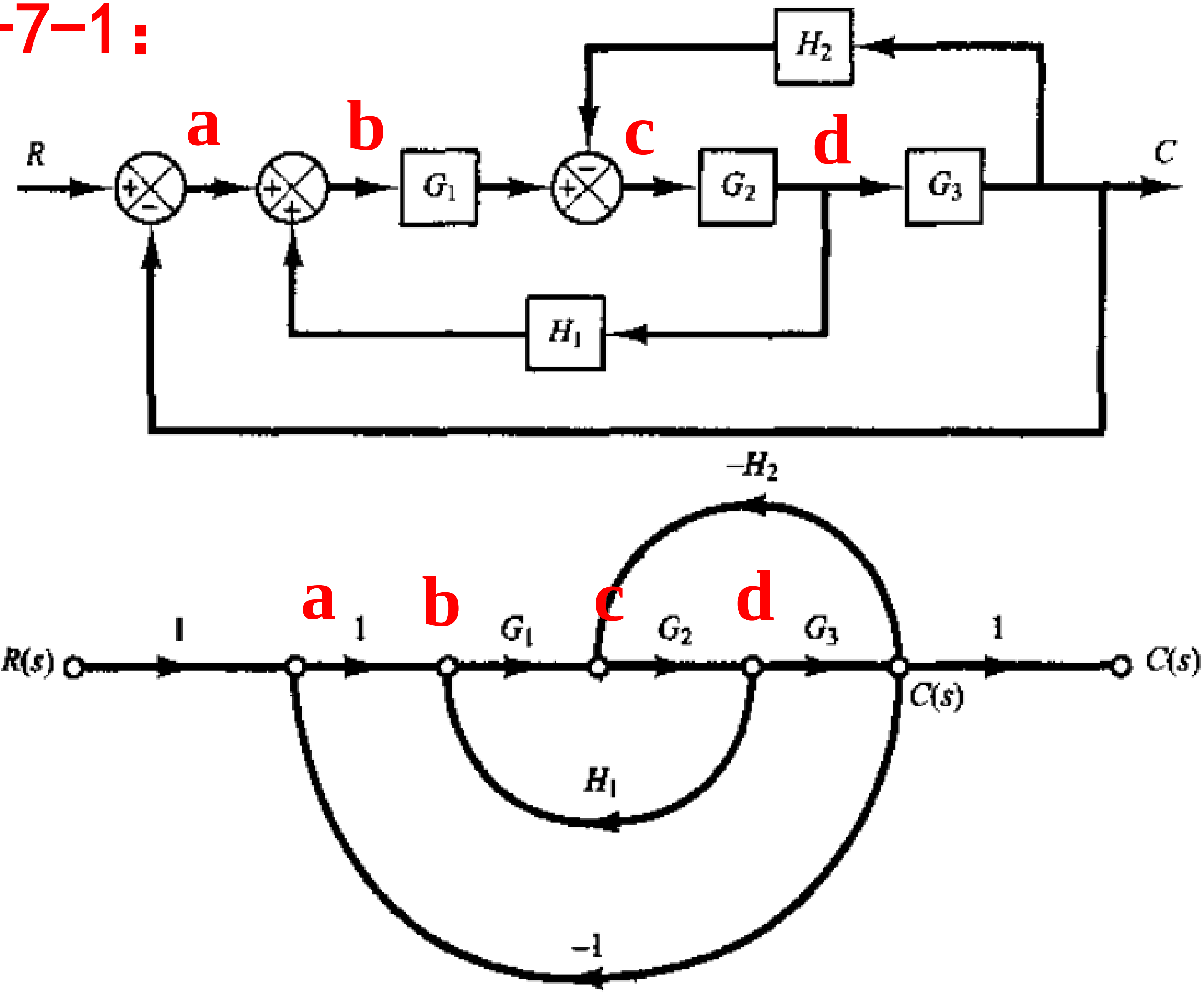
$\sum L_{(3)}$—每三个互不接触回路传递函数乘积之和

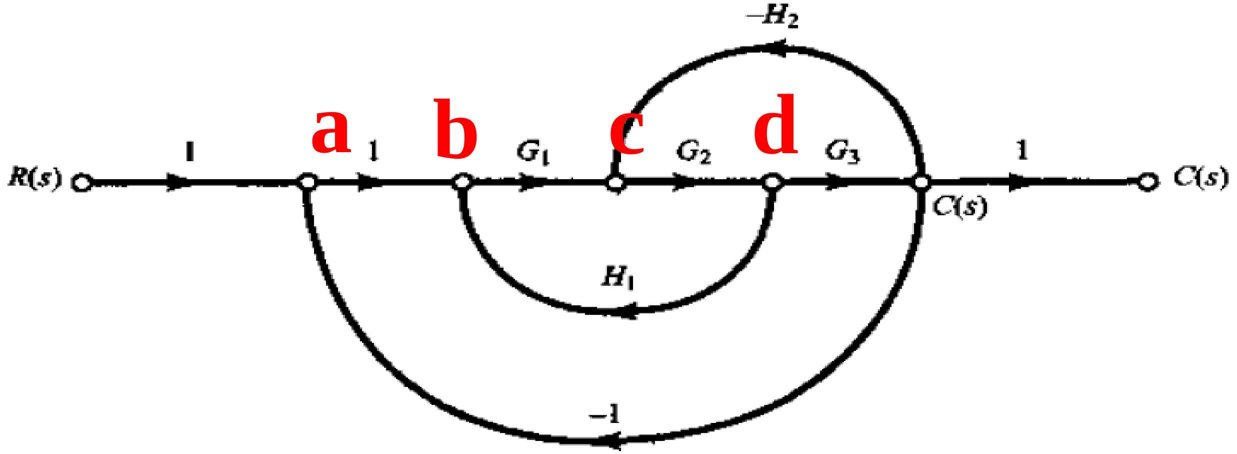
$\sum L_{(m)}$—任何m个互不接触回路传递函数乘积之和

Δ_k —第k条前向通路特征式的余因子，即对于流图的特征式Δ，将与第k 条前向通路相接触的回路传递函数代以零值，余下的Δ即为Δk。

一个前向通道的情况

例2-7-1：





输入量 $R(s)$ 与输出量 $C(s)$ 之间只有一条前向路径。前向路径的增益为

$$P_1 = G_1G_2G_3$$

有三个单独的回路，这些回路的增益为 $L_1 = G_1G_2H_1$ $L_2 = -G_2G_3H_2$

$$L_3 = -G_1G_2G_3$$

三个回路具有一条公共支路，所以这里没有不接触的回路。因此，特征式

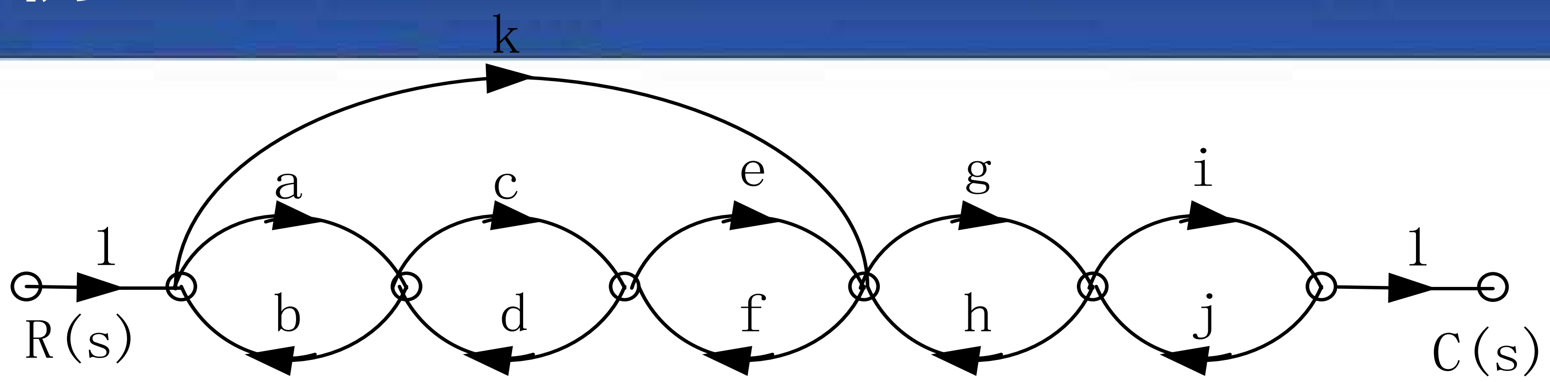
$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3) = 1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3$$

因为路径 P_1 与三个回路都接触，所以我们得到 $\Delta_1 = 1$

输入量 $R(s)$ 与输出量 $C(s)$ 之间的总增益，或闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}$$

例2-7-3



回环6个： $\sum L_{(1)}=ab+cd+ef+gh+ij+kfdb$

两个互不接触回环7个：

$\sum L_{(2)}=abef+abgh+abij+cdgh+cdij+efij+kfdbij$

三个互不接触回环1个： $\sum L_{(3)}=abefij$

$\Delta=1-\sum L_{(1)}+\sum L_{(2)}-\sum L_{(3)}$

前向通道（2条）：

$P_1=acegi \qquad \Delta_1=1$

$P_2=kgi \qquad \Delta_2=1-cd$

∑前向通道传函之积： $P_1\Delta_1+P_2\Delta_2=acegi+kgi(1-cd)$

应用梅逊公式时，容易出错的是：遗漏应该计算的回环和前向通道；错误判断回环与回环之间、回环与前向通道之间接触与否。应该特别注意。

应用梅逊公式，容易看出：对同一个系统来说，不管输入量、输出量如何选取，其传递函数的分母是一样的，均为Δ，不同的只是分子。所以传递函数的分母多项式称为系统的特征多项式。

作　　业