

## 摘 要

斜拉索是斜拉桥的主要受力构件之一，在风、雨、地震或车辆等荷载的作用下，桥面和桥塔的振动引起拉索的张拉力随桥塔和桥面的振动而发生改变，从而可能引起拉索产生大幅度振动，对斜拉桥的安全性带来很大的危害。因此，有必要深入研究拉索的振动特性，为斜拉索的振动控制打下理论基础。

本文首先简要介绍了国内外学者在斜拉桥拉索参数振动方面所做的工作。然后，根据简化后的力学模型，通过数值计算方法分析研究斜拉索参数振动的机理，分别分析了斜拉索在桥面端部位移激励作用下和拉索-桥面耦合作用下的参数振动特性。建立了桥塔-拉索-桥面耦合振动动力学微分方程组，研究了拉索和桥面、桥塔耦合振动的特性。计算结果表明，当桥面竖向振动频率和桥塔横向振动频率约为拉索横向振动固有频率的 2 倍时，桥面或桥塔的微小振动也能激发拉索的大幅横向振动。拉索的结构阻尼不能有效减小拉索振动初期的最大振幅，因此有必要对斜拉索施加外阻尼来控制拉索的大幅振动。

关键词：斜拉索；耦合作用；参数振动；数值分析

## Abstract

The stay cable is one of main force members of cable-stayed bridges. Under the loads of the wind, rain, earthquake, vehicles, the strain of the stay cable would be changed by the vibration of the bridge deck and the bridge tower, which could lead the great transverse vibration of cable. It is a great deal of harm to cable-stayed bridge safety. Therefore, it is necessary in-depth study of the vibration characteristics of cables, and it could lay a theoretical basis for vibration control of stay cable.

The paper briefly introduces the job done by the domestic and foreign scholars in the stay cable parameter vibration. Then, the mechanism of parameters vibration of the stay cable is studied under the simplified mechanical model by numerical analysis. The characteristics of parametric vibration of the stay cable are analyzed when the end displacement of the cable-stayed bridge is excited by the bridge decks and under cable-bridge coupled action. The vibration differential equations are set up under the tower-cable-bridge coupled vibration and the characteristics of the tower-cable-bridge coupled vibration is studied. The results are shown that the weak vibration on tower or bridge decks can lead the great transverse vibration of cable when the frequency of tower or bridge deck is twice as large as that of natural frequency vibration of cable. The structural damping of the stay cable can not effectively reduce the initial maximum amplitude, so it is necessary to impose extra damping on the stay cable to control the substantial vibration.

**Keywords:** stay cable, couple action, parameter vibration,  
numerical analysis

---

# 西南交通大学

## 学位论文版权使用授权书

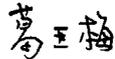
本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权西南交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存或汇编本学位论文。

本学位论文属于

1. 保密 ，在 年解密后适用本授权书；
2. 不保密 ，适用本授权书。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签：  
日期：2009.5.26

指导教师签名：  
日期：2009.6.2

## 西南交通大学学位论文创新性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立进行研究工作所得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中作了明确的说明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

本学位论文的主要创新点如下：

- 1、以实例斜拉桥分析斜拉桥拉索其在初始张力、倾角、频率比等因素改变情况下的参数振动。
- 2、建立塔-索-桥耦合动力学微分方程，数值分析得出拉索和桥面、桥塔的振动存在“拍”的现象，三者的振幅随时间变化而变化。能量在桥塔、拉索、桥面之间传递。在阻尼作用下总能量逐渐减小。

学位论文作者签名：李友

日期：2009.6.2

## 第 1 章 绪 论

### 1. 1 引言

现代斜拉桥的出现和发展至今不过五十多年的历史。世界上第一座现代斜拉桥于 1956 年在瑞典建成 Stromsund 桥(主跨 183m), 随后在德国建成了 TheoderHeuss 斜拉桥 (主跨 260m)。随着新材料、新工艺的出现和计算分析水平的提高, 解决了斜拉桥建设的技术问题; 加上斜拉桥本身具有的造型优美, 对地形、地质和通航要求的适用性较强等特点, 使得斜拉桥在全世界得到广泛的应用。目前, 斜拉桥已成为跨度在 200m 至 800m 之间大桥的主选桥型之一。1995 年建成的法国 Normandy 大桥(主跨 856m)和 1998 年建成的日本 Tataru 大桥(主跨 890m)是斜拉桥建设史上的一个新的里程碑。2008 年 6 月 30 日正式通车的苏通长江公路大桥其主孔跨度更是达到创记录的 1088m, 其最长的斜拉索长达 577m。

我国的斜拉桥建设发展迅速, 在短短的十几年里, 取得了举世瞩目的成就。1993 年建成了当时世界上跨度最大的上海杨浦大桥(主跨 602m), 此后又相继建成了南京长江二桥(主跨 628m)、南京长江三桥(主跨 648m)、武汉三桥(主跨 618m)、青州闽江桥(主跨 605m)、苏通长江公路大桥(主跨 1088m)等一批大跨度斜拉桥, 目前还有一批跨度超过 400m 的大桥正在建设中。21 世纪初, 我国公路建设将形成以高速公路为主的五纵七横国道干线网络, 需要建设多座跨越大江河与海湾的大跨度桥梁, 斜拉桥将在其中扮演重要的角色, 得到进一步发展。

随着斜拉桥跨度的增大, 其面临的动态问题也越来越突出。斜拉索是斜拉桥的主要受力构件, 由于其具有大柔度、小质量、小阻尼的特性, 其上下端分别与桥塔及桥面相连接, 在风、雨、地震或车辆等荷载的作用下, 由于桥面和桥塔的振动, 拉索的张拉力随着桥塔和桥面的振动发生着周期性或拟周期的改变, 从而可能引起拉索产生大幅度振动, 对斜拉桥的安全性会带来很大的危害。因此, 斜拉索的安全性必须予以高度的重视。在实际工程中, 通过对已建成的或在建的斜拉桥的观测表明, 在微风微雨的情况下, 个别拉索有时会发生十分剧烈的大幅横向振动。各种因素引起的拉索振动而导致设备破坏, 交通被迫中断的事例频繁发生。日本结构工程学会对日本多座斜拉

桥的拉索振动振幅进行了实地观测,发现拉索振幅可达到索径的 5~10 倍<sup>[2]</sup>。至今为止,已在多个国家的实桥中观测到了拉索的大幅振动:法国的 Brotonne 桥、泰国的 Rama IX 大桥、英国的 Second Severn 桥、丹麦的 Faro 桥拉索的振幅均出现过达到相邻拉索碰撞的现象<sup>[3]</sup>。1988 年 3 月,比利时 Ben-Ahin 桥的 9 根同侧拉索均发生大幅振动,振幅峰-峰值达 1m 以上,拉索振动发生在雨天。同年 10 月,Wander 桥也发生了类似现象,拉索振动发生在无雨天气;1993 年在日本的一座人行天桥中观测到主梁的侧弯振动引发拉索的大幅参数共振;上海南浦大桥、广州海印大桥也均出现过强烈的索振现象,2001 年,湖南洞庭湖大桥上的拉索发生风雨激振,振幅峰-峰值达 0.4m。

斜拉索经常性的振动一方面易引起斜拉索的疲劳破坏,另一方面易在索梁结合处产生疲劳裂纹,引起斜拉索保护套的损坏,加速斜拉索的腐蚀,严重的还会导致斜拉索丧失承载力。由于斜拉索的振动对整个桥梁的安全性、耐久性、经济性及行车舒适性均有较大的影响,因此对斜拉索振动机理的研究及控制成为近二十多年来的研究热点。

## 1. 2 斜拉索非线性振动概述

近年来斜拉索的非线性振动问题越来越引起研究者的重视。通过多年来的研究发现,斜拉索产生大幅振动的原因归纳起来主要有以下几类:涡激共振、尾流驰振、风雨激振、端部位移激励引起的振动等。这类振动的特点是,在风雨荷载或车辆荷载作用下,使桥面或桥塔产生振动,当其振动频率与拉索的单模态振动频率(单参数)或组合模态振动频率(组合参数)之比为 2、1、1/2 等时,拉索可能产生大幅横向振动。

### 1. 2. 1 涡激共振

拉索横断面一般为圆形,当风吹过拉索时,在其横断面尾流中将出现交替脱落的卡门漩涡。漩涡脱落的频率  $f_v$  由下式表示:

$$f_v = \frac{S_t U}{D}$$

式中, $U$  为风速; $D$  为拉索直径; $S_t$  为无量纲参数,称为斯脱罗哈(Strouhal)数。

每次漩涡脱落时对拉索产生的作用力激起拉索振动,如果激励频率正好等于拉索的某阶自振频率  $f_k$ ,则发生拉索涡激共振。涡激共振能在很低的风

速下发生, 并且对于高阶模态,其发生涡激共振的风速也越高。

在卡门涡激的作用下, 拉索的涡激共振应该以较高频率出现<sup>[4]</sup>。根据实际拉索的固有频率和 Strouhal 数来分析, 拉索的低频涡激共振的临界风速一般仅为 0.5~2m/s, 如此低的风速所产生的荷载难以提供激起拉索大幅振动的能量。拉索只有以较高模态出现时, 风速才能提供足够的能量激励。

### 1. 2. 2 尾流驰振

当两根拉索沿风向斜列时, 来流方向的下游拉索比上游拉索发生更强烈的风致振动, 称为尾流驰振 (Wake galloping)。上游拉索的尾流区中存在一个不稳定驰振区。如果下游拉索正好位于这一不稳定区中, 其振幅就会不断加大, 直至达到一个稳态大幅振动的极限环。这是由于尾流力中的升力成分总是使下游拉索向尾流的中心运动, 因此在尾流中的阻力和升力的共同作用下, 处于驰振不稳定区中的拉索就会产生回旋运动, 直到达到稳定的振幅。当两拉索距离超出尾流驰振不稳定区时, 就不会发生尾流驰振。

### 1. 2. 3 风雨激振

风雨激振是结构、风、雨三者的相互作用的结果, 风雨激振的机理非常复杂。自日本 1985 年在 Meiko.Nishi 桥上发现这一振动形式并公开报道后, 世界上许多大桥都观察到了这种现象。日本学者 Hjkami 和 MatsMmoto 以及一些西欧国家的学者等通过多年的实桥现场观测和风洞试验, 总结得到拉索风雨激振的一些发生条件及现象特点。在某一特定风速、一定的雨量强度和拉索的结构特性共同作用下, 拉索可能在横向发生大幅振动, 产生风雨激振。由于其复杂性, 目前对拉索风雨激振的产生机理尚在进一步的研究中。

### 1. 2. 4 端部位移激励引起的振动

斜拉桥在风、雨、地震、车辆等荷载的作用下, 桥面和桥塔会以一定的频率振动, 由于拉索的两端分别与桥塔和桥面相连, 因此主梁和桥塔的振动为拉索施加了运动的边界条件。当桥面和桥塔的振动频率与拉索某阶固有频率成倍数关系时, 可能会引发拉索产生大幅横向振动。

由于非线性项的影响, 桥面和桥塔的振动引起的拉索振动不是简单的强迫振动, 还包括参数振动。对于参数振动, 由于受非线性动力学的制约, 其振动机理还未完全掌握, 还有待进一步深入研究。

### 1.3 斜拉桥拉索参数振动研究现状简介

参数振动是除自由振动、受迫振动和自激振动以外的又一种振动形式,产生参数振动的系统称为参变系统。参数振动由外界的激励产生,但激励不是以外力形式施加于系统,而是通过系统内参数的周期性改变间接地实现。由于参数的时变性,参数振动系统为非自治系统。系统在参数激励下所产生的响应有时可能很微弱,但也可能出现剧烈的共振现象,这取决于参数振动系统的稳定性。描述参数振动的数学模型为周期变系数的常微分方程,因此对参数振动的研究归结于对变系数常微分方程组零解稳定性的研究。由于风、雨荷载或其它荷载的作用,斜拉桥桥面会发生垂直方向的振动,桥塔会发生横向的振动。而参数振动的研究表明,在斜拉桥桥面或桥塔的某一阶固有频率与拉索的固有频率的比值约为二倍时,桥面或桥塔的小幅振动将会激发拉索的大幅振动<sup>[11][58]</sup>。因此,研究拉索的这种振动是有一定意义的,并从中得到某些抑制拉索大幅振动的启示。

对于拉索在轴向激励下的参数振动的理论研究,按激励形式的不同,主要分为两大类:一类是假设拉索受到的轴向激励为理想激励,按照理想系统建立拉索的分析模型,在这种模型中,设定激励按照一定的函数形式周期变化,不考虑桥塔-拉索-桥面的相互作用,认为桥面和桥塔的质量远大于拉索,忽略拉索的振动对桥面和桥塔振动的影响;另一类是考虑拉索和桥面、桥塔之间的动力耦合作用,拉索所受激励的幅值和频率在响应过程中不断变化,按照非理想系统建立桥塔-拉索-桥面耦合振动分析模型。Tagata<sup>[6]</sup>研究了拉索的一阶参数振动,不计垂度影响,把拉索视为无重量的弦,导出了无量纲的 Mathieu 方程。Lilien<sup>[7]</sup>利用 Tagata 的方法导出标准弦方程,采用谐波平衡法,研究稳态振动时索的振动幅值、瞬态(达到稳态之前)振动时索张拉力的表达方程。Michel Virlogeux<sup>[8]</sup>将索-主体结构耦合振动分解为沿轴向的参数振动和垂直于索轴向的强迫振动,建立了索与主体结构相互作用的两质量模型。我国学者亢战和钟万颀<sup>[9]</sup>、汪至刚和孙炳楠<sup>[10]</sup>、陈水生和孙炳楠<sup>[11]</sup>等分别提出了索-桥耦合振动模型,分析了拉索在轴向激励下的参数振动。从文献【9】、【11】的研究表明,索的振动频率与斜拉索的垂度值有关,而引起参数振动的重要因素是频率的匹配关系,所以,考虑垂度的影响,准确的求出索的振动频率,是全面认识桥塔-拉索-桥面参数振动的基本保证。

## 1. 4 本文的主要工作

斜拉索的参数振动机理较为复杂，拉索和桥面、桥塔的很多物理参数都会影响斜拉索的横向振动幅值。本文在查阅相关文献后，主要完成了以下工作：

- 1、概述斜拉桥拉索参数振动的研究背景，简要介绍了国内外研究现状。
  - 2、简述斜拉索的横向振动理论，为其参数振动的研究打下基础。
  - 3、在非耦合端部激励下建立斜拉索的参数振动微分方程，采用数值分析的办法对其进行分析，从数值分析的角度进一步了解索的物理参数对其参数振动的影响。
  - 4、在拉索和桥面的耦合作用下建立拉索-桥面耦合振动动力学微分方程组。采用数值计算分析的办法分析此耦合振动系统的各物理参数对拉索横向大幅振动的影响。
  - 5、在拉索和桥面、桥塔的耦合作用下，推导出的桥塔-拉索-桥面耦合振动动力学微分方程组。采用数值分析的办法分析此耦合振动系统的各物理参数对拉索横向振动的影响。
-

## 第 2 章 斜拉索的结构动力特性

现代斜拉桥是不同于悬索桥的另一种缆索承载结构。由于斜拉桥具有可悬臂施工, 造价适宜和外形美观等特点, 因而在跨径 200m~800m 范围内获得了巨大的成功, 并正在向更大的跨径发展。

斜拉桥的动力特性具有两个部分内容: 首先是指桥梁结构总体的动力性能, 将斜拉索处理为一个受轴向拉力的杆单元(或索单元)。其次则指斜拉索的自身局部振动问题, 作为斜拉索支承点的结构的振动将会使斜拉索中的轴向拉力发生周期变化, 当结构的总体频率和某一斜拉索的横向局部振动频率成倍数关系时, 将会引发斜拉索的参数共振, 造成斜拉索大振幅的局部振动。

### 2.1 水平张紧索的横向振动

作为斜拉索局部振动分析的基础, 先讨论如图 2-1 所示的一根水平的张紧钢索。设拉索的弦长为  $l$ , 单位长度质量为  $m$ , 拉索中的水平拉力为  $T$ 。斜拉索弯曲刚度比较小, 可不计索的弯曲刚度的影响。

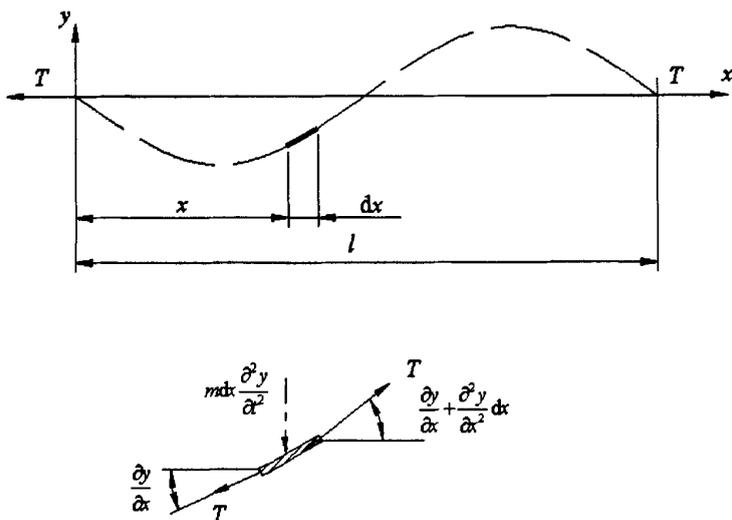


图2-1 水平张紧索的横向振动

根据动静法, 在自重作用下, 小变形时拉索的“平衡”方程为:

$$T\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx\right) - T \frac{\partial y}{\partial x} - m dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2-1)$$

令  $c = \sqrt{\frac{T}{m}}$  得:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (2-2)$$

式中  $t$  为时间。式 (2-2) 与一维波动方程相似, 线性微分方程中的变量是可分离的, 且振动是简谐的。因此, 方程式 (2-2) 的解可写成

$$y(x, t) = \varphi(x)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (2-3)$$

式 (2-3) 中  $\omega$  为固有振动圆频率;  $\varphi(x)$  为振型函数;  $A$  和  $B$  是由拉索边界条件确定的系数。

将式 (2-3) 代入方程 (2-2), 得振型方程为

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi(x) = 0$$

解为

$$\varphi(x) = C \cos \frac{\omega x}{c} + D \sin \frac{\omega x}{c} \quad (2-4)$$

若拉索的两端是固定不动的, 有

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

于是, 有  $C = 0$ ,  $D \sin \frac{\omega l}{c} = 0$ 。要  $D \neq 0$ , 则必须

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$$

即  $\frac{\omega l}{c} = n\pi \quad n = (1, 2, 3, \dots)$

由此可得, 拉索横向振动的固有频率

$$\omega_n = \frac{cn\pi}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad n = (1, 2, 3, \dots) \quad (2-5)$$

相应的振型为

$$\varphi_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = (1, 2, 3, \dots) \quad (2-6)$$

由式 (2-5), 拉索的拉力

$$T = \frac{ml^2}{\pi^2 n^2} \omega_n^2 = \frac{4ml^2}{n^2} f_n^2 \quad n=(1,2,3,\dots) \quad (2-7)$$

式中,  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ , 为各阶赫兹频率。

## 2. 2 斜拉索的横向固有振动

实际斜拉桥中的拉索具有一定的自重和刚度, 并且斜置成一定倾角, 如图 2-2 所示。在分析其横向固有振动前, 先研究其静力特性。

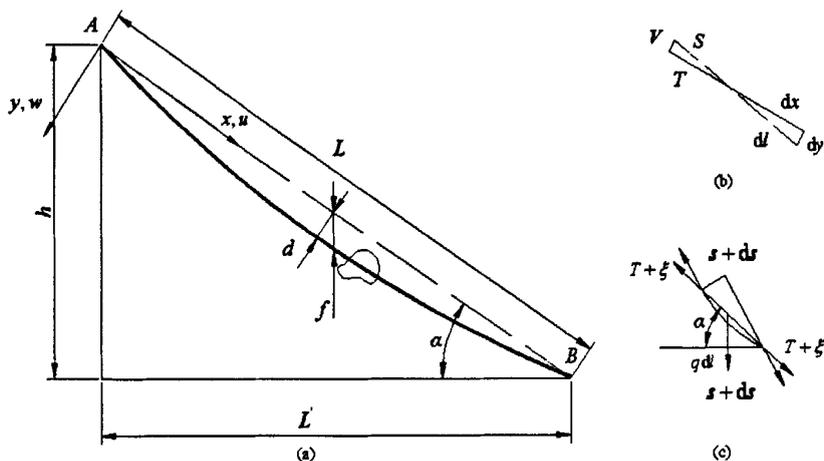


图2-2 斜拉索的横向振动

### (1) 斜拉索的静力特性分析

设斜拉索的弦长为  $L$ , 水平投影长度  $L' = L \cos \alpha$ , 斜拉索两端的高差  $h = L \sin \alpha$ 。由力三角形和几何三角形相似得:

$$\frac{V}{T} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{S}{T} = \frac{dl}{dx} \quad (2-8)$$

式中  $V$  为垂直拉索弦向的力,  $T$  为拉索的弦向拉力,  $S$  为拉索的切向拉力,  $dl$  为拉索切向增量。

由式 (2-8), 得:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{dV}{dx}, \quad dV = -q \cos \alpha dl$$

即

$$T \frac{d^2 y}{dx^2} + q \cos \alpha \frac{dl}{dx} = 0 \quad (2-9)$$

式中  $q$  是沿弧长均匀分布的单位自重。

因为假设拉索是沿弧长均匀分布的，因此有：

$$T \frac{d^2 y}{dx^2} + q \cos \alpha = 0 \quad (2-10)$$

代入边界条件（当  $x=0$  时， $y=0$ ；当  $x=L$  时， $y=0$ ）积分上式得斜拉索的抛物线方程：

$$y = \frac{4d}{L} \left( x - \frac{x^2}{L} \right) \quad (2-11)$$

式中， $d$  为斜拉索中点垂度（ $d = \frac{qL^2 \cos \alpha}{8T}$ ）。

## (2) 斜拉索的横向固有振动

使研究简化且能体现问题本质，故作以下假设：

- (a) 垂跨比  $f/L$  很小；
- (b) 只研究拉索在平面  $xy$  内振动，在  $x$  方向的运动很小。
- (c) 拉索的几何形状可用抛物线表示；
- (d) 拉索自重  $q$  在  $y$  方向上均匀分布。

如图 2-1 所示斜拉索及其坐标系。 $T$ 、 $\delta T$  分别为拉索的弦向张力及其增量； $S$ 、 $\delta S$  为索的切向张力及其振动时增量。根据平衡条件有：

$$S = T \frac{dl}{dx}, \delta S = \delta T \frac{dl}{dx}, T \frac{d^2 l}{dx^2} = -q \cos \alpha \quad (2-12)$$

对于沿拉索弦向作位移量为  $u$  时的振动方程为：

$$\begin{aligned} & (T + \delta T) \left( \frac{dx}{dl} + \frac{d^2 x}{dl^2} dl + \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} dl \right) - (T + \delta T) \left( \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial l} \right) \\ & = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dl + q dl \sin \alpha \end{aligned}$$

略去高阶微量，化简上式可得：

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ (T + \delta T) \left( \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial l} \right) \right] = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q \sin \alpha \quad (2-13)$$

同理得垂直拉索弦向作位移量为  $w$  时的振动方程为：

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ (T + \delta T) \left( \frac{dy}{dl} + \frac{\partial w}{\partial l} \right) \right] = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \cos \alpha \quad (2-14)$$

将 (2-10) 代入 (2-13)，(2-14) 式，并取  $dl = dx$ 。得索的面内振动微分方

程:

$$\begin{cases} T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{(a)} \\ (T + \delta T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & \text{(b)} \end{cases} \quad (2-15)$$

式(2-15)中(b)式即为斜拉索横向振动微分方程。

下面分别求出  $T$ ,  $\xi$ 。式(2-15)中  $\xi = EA\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_x$  为索的弦向动应变,  $E$  为斜拉索弹性模量,  $A$  为斜拉索等效截面面积。设静态时索的弧长微段为  $dl$ , 振动变形后索的弧长微段为  $dl'$ , 则有:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (2-16)$$

$$(dl')^2 = (dx + du)^2 + (dy + dw)^2 \quad (2-17)$$

由此可得动应变为:

$$\varepsilon = \frac{dl' - dl}{dl} \approx \frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial y}{\partial l} \frac{\partial w}{\partial l} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial l} \right)^2 \right] \quad (2-18)$$

取  $dl = dx$  得:

$$\varepsilon_x = y_x w_x + \frac{1}{2} w_x^2 \quad \text{则:}$$

$$\xi = EA \left( y_x w_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \quad (2-19)$$

因为  $y_x = \frac{4d}{L} \left( 1 - \frac{2x}{L} \right)$ , 令  $f = 1 - \frac{2x}{L}$  得:

$$(1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{8d^2 f^2}{L^2} \quad (2-20)$$

式中  $y_x$ 、 $w_x$  分别为  $y$ 、 $w$  对  $x$  的导数

若不考虑垂度, 则  $T = T_0 + q(L-x)\sin\alpha$ ; 若考虑垂度效应, 且考虑了拉索自重对拉索的弦向张力的影响, 则有:

$$T = [T_0 + q(L-x)\sin\alpha] (1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2-21)$$

式中  $T_0$  为斜拉索的弦向初始张拉力, 考虑到  $T_0 \gg q(L-x)\sin\alpha$ , 则  $T \approx T_0$ ,

取

$$d = \frac{qL^2 \cos \alpha}{8T_0}$$

将 (2-19)、(2-20)、(2-21) 代入 (2-15b) 得:

$$\begin{aligned} & \{ [T_0 + q(L-x) \sin \alpha] (1 + \frac{8d^2 f^2}{L^2}) + EA(y_x w_x + \frac{1}{2} w_x^2) \} w_{xx} \\ & - \frac{8dEA}{L} (y_x w_x + \frac{1}{2} w_x^2) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-22)$$

当斜拉桥索的垂跨比较小时, 可以近似取索的振动模态为标准弦的振动模态, 即:

$$w = \sum_{n=1}^N X_n(t) \sin(\frac{n\pi x}{L}) \quad (2-23)$$

把式 (2-23) 代入式 (2-22), 运用 Galerkin 方法进行离散。拉索振动的一阶模态非常重要, 并且是主要的振动形态, 因此在这里只取一阶模态, 则离散后的拉索横向振动微分方程为<sup>[11]</sup>:

$$\ddot{X} + a_1 \dot{X} + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 0 \quad (2-24)$$

其中:

$$\begin{aligned} a_1 &= \omega_0^2 (1 + \frac{8d^2}{3L^2} - \frac{16d^2}{\beta^2 L^4}) + (\frac{1}{2}L + \frac{8d^2}{L})g\beta^2 \sin \alpha + \frac{32d^2 EA}{mL^4} \\ &= \sigma^2 \\ a_2 &= \frac{112\beta dEA}{9mL^3} \\ a_3 &= \frac{\beta^4 EA}{8m} \\ \beta &= \frac{\pi}{L} \\ \omega_0 &= \pi \sqrt{\frac{T_0}{mL^2}} \end{aligned}$$

为了说明斜拉索的横向固有振动, 对索用, 选取某高速铁路大跨度斜拉桥的拉索为例作数值分析, 该索基本参数:  $m = 97.5546 \text{ kg/m}$ ,  $L = 187.9 \text{ m}$ ,  $A = 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $E = 1.95 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\alpha = 27.5^\circ$ ,  $T_0 = 1.078 \times 10^7 \text{ N}$ 。拉索的初始横向挠度设为  $0.001 \text{ m}$ 。

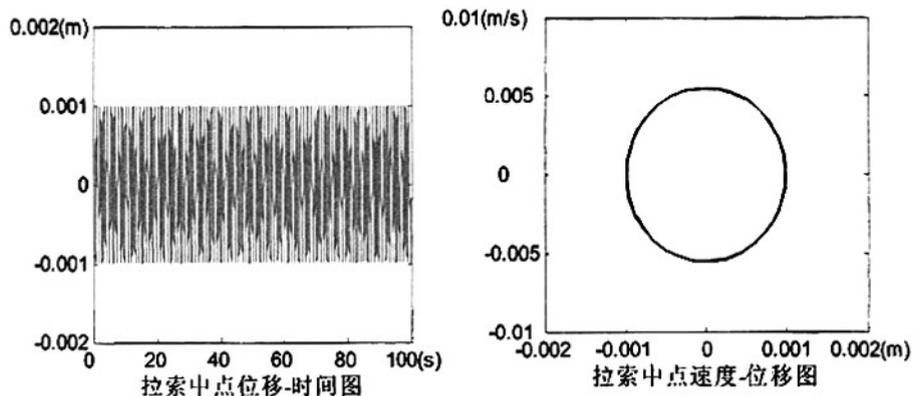


图2-3

从上图可以得出：拉索中点可被看成作振幅为 0.001m 的周期运动。

### 2.3 本章小结

本章主要介绍斜拉索的动力特性。分析了水平张紧弦的横向固有振动，并对斜拉索进行静力分析和横向固有振动分析。通过对斜拉索结构的分析，导出斜拉索在自重作用下的近似线形和斜拉索横向振动频率的计算方法。最后通过数值计算分析知道，斜拉索中点可被近似看成作振幅为固定值的周期运动。

### 第 3 章 端部位移激励作用下的斜拉索参数振动

#### 3. 1 引言

在本章中, 假设拉索与桥面连接端受到的竖向激励为理想激励, 按照理想系统建立拉索的分析模型, 不考虑索-桥相互作用, 忽略拉索的振动对桥面振动的影响。采用如图 3-1 所示单根拉索模型, 拉索悬挂于桥塔与桥面上, 端部位移激励简化为桥面端部的周期位移  $z = z_0 \sin \omega t$ ,  $z_0$  为振幅。根据第 2 章的推导, 得出端部位移激励作用下的斜拉索参数振动运动微分方程。采用龙格-库塔法分析其运动方程, 求得在一定初始位移激励下, 拉索的振幅随时间的变化历程。通过研究得出, 当  $\omega$  约为拉索横向振动固有频率的 2 倍时, 拉索产生横向大幅振动。

#### 3. 2 端部位移激励作用下的斜拉索参数振动

##### 3. 2. 1 运动微分方程的推导

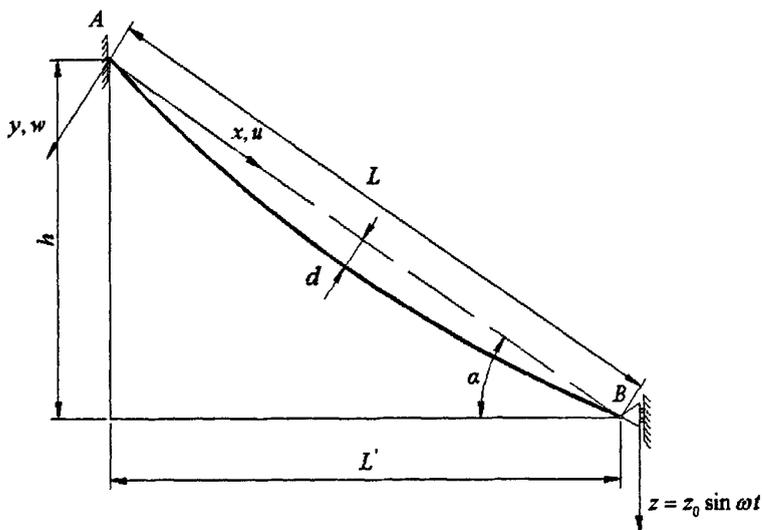


图 3-1

为了研究斜拉索的参数振动的机理, 把单根拉索振动问题简化为如图 3-1 所示的振动系统。斜拉索悬挂于桥塔和桥面之间, 并且考虑拉索的垂度效应。建立如图 3-1 所示的坐标系统。

为了简化计算，尽可能地体现问题的本质，作以下假定：

1. 不计索的抗弯刚度、抗扭刚度及抗剪刚度；
2. 认为索的重力垂度曲线是抛物线；
3. 索的变形本构关系服从胡克定律且各点受力均匀；
4. 垂跨比很小；
5. 拉索只在平面  $xy$  内振动；
6. 拉索质量在  $y$  向均匀分布。

按第2章式 (2-15b) 得斜拉索在桥面端部位移激励下的横向振动微分方程

$$(T + \xi) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (3-1)$$

式中：

$$\xi = EA\varepsilon$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_x = y_z w_z + \frac{1}{2} w_x^2$$

$$\varepsilon_z = \frac{z \sin \alpha}{L}$$

$$T = [T_0 + q(L-x) \sin \alpha] (1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}}$$

运用 Galerkin 方法进行离散。拉索振动的一阶模态是主要的振动形态<sup>[11]</sup>，因此在这里只取一阶模态，则离散后的拉索横向振动微分方程方程为：

$$\ddot{X} + (a_1 + bz)X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 z = 0 \quad (3-2)$$

式中：

$$a_1 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{8d^2}{3L^2} - \frac{16d^2}{\beta^2 L^4} \right) + \left( \frac{1}{2}L + \frac{8d^2}{L} \right) \beta^2 g \sin \alpha + \frac{32d^2 EA}{mL^4}$$

$$= \sigma^2$$

$$a_2 = \frac{112\beta dEA}{9mL^3}$$

$$a_3 = \frac{\beta^4 EA}{8m}$$

$$a_4 = \frac{32dEA \sin \alpha}{\beta mL^4}$$

$$b = \frac{\beta^2 EA \sin \alpha}{mL}$$

$$\beta = \frac{\pi}{L}$$

$$\omega_0 = \pi \sqrt{\frac{T_0}{mL^2}}$$

考虑索的阻尼，得到斜拉索振动的广义方程为<sup>[34]</sup>：

$$\ddot{X} + 2\tau \dot{X} + (\sigma^2 + bz_0 \sin \omega t)X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 z_0 \sin \omega t = 0 \quad (3-3)$$

式(3-3)中 $\tau$ 为衰减系数，式(3-3)是考虑斜拉索的垂度及几何非线性影响，在竖向激励作用下拉索的非线性振动微分方程，既有立方非线性项又有平方非线性项。从式(3-2)可以看出，非线性振动微分方程的多项系数都与倾角有关，也即与拉索的垂度有关。若拉索倾角为 $90^\circ$ ，则其垂度 $d=0$ 。式(3-3)简化为：

$$\ddot{X} + 2\tau \dot{X} + (\sigma^2 + bz_0 \sin \omega t)X + a_3 X^3 = 0 \quad (3-4)$$

式中：

$$\sigma^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{2}L\beta^2 g$$

$$a_3 = \frac{\beta^4 EA}{8m}$$

$$b = \frac{\beta^2 EA \sin \alpha}{mL}$$

$$\beta = \frac{\pi}{L}$$

$$\omega_0 = \pi \sqrt{\frac{T_0}{mL^2}}$$

### 3. 2. 2 动不稳定区间分析

求解激励参数的动不稳定域时，索的一阶振动是主振动，因此只考虑一阶振动。并且忽略拉索自重对拉索轴向拉应力的影响，只考虑 $\alpha=90^\circ$ 的情况，至于倾角对参数振动的影响在后面讨论，根据式(3-3)我们得到 $d=0$ ，得：

$$\ddot{X} + 2\tau \dot{X} + \sigma^2(1 + e \sin \omega t)X + a_3 X^3 = 0 \quad (3-5)$$

式中:

$$e = \frac{EA}{(T + \xi)L} z_0 \quad (3-6)$$

上式表示拉索的桥面端以频率  $\omega$  沿纵向运动时索的振动方程。方程解为<sup>[2]</sup>:

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \frac{n\omega t}{2} + B_n \cos \frac{n\omega t}{2})$$

考虑到振动的一阶模态是主要的振动形态<sup>[11]</sup>, 用谐波平衡法分析在只取一阶模态时的动不稳定区。

令  $X = A_1 \sin \frac{\omega t}{2} + B_1 \cos \frac{\omega t}{2}$ , 代入式(3-3)整理得:

$$\begin{aligned} & [(\sigma^2 - \frac{1}{4}\omega^2)A_1 + (\frac{1}{2}e\sigma^2 - \tau\omega)B_1 + \frac{3}{4}a_3(A_1^3 + A_1B_1^2)]\sin \frac{1}{2}\omega t \\ & + [(\frac{1}{2}e\sigma^2 + \tau\omega)A_1 + (\sigma^2 - \frac{1}{4}\omega^2)B_1 + \frac{3}{4}a_3(B_1^3 + A_1^2B_1)]\cos \frac{1}{2}\omega t = 0 \end{aligned} \quad (3-7)$$

略去高阶微量的影响, 要使上式成立, 则有:

$$\begin{cases} (\sigma^2 - \frac{1}{4}\omega^2)A_1 + (\frac{1}{2}e\sigma^2 - \tau\omega)B_1 = 0 \\ (\frac{1}{2}e\sigma^2 + \tau\omega)A_1 + (\sigma^2 - \frac{1}{4}\omega^2)B_1 = 0 \end{cases} \quad (3-8)$$

要使上式有非零解, 则上式方程组的系数的行列式为零

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 - \frac{1}{4}\omega^2 & \frac{1}{2}e\sigma^2 - \tau\omega \\ \frac{1}{2}e\sigma^2 + \tau\omega & \sigma^2 - \frac{1}{4}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3-9)$$

通过上式可得:

$$\omega^2 = 4\sigma^2 \pm 2\sqrt{e^2\sigma^4 - 16\tau^2\sigma^2} \quad (3-10)$$

即:

$$\lambda^2 = 4 \pm 2\sqrt{e^2 - 16\xi_1^2} \quad (3-11)$$

式中:

$$\lambda = \frac{\omega}{\sigma}, \quad \xi_1 = \frac{\tau}{\sigma}$$

给定不同的  $\xi_1$ ，就可得到基本不稳定区域在  $(\lambda, e)$  上的分布，如图(3-2)所示。

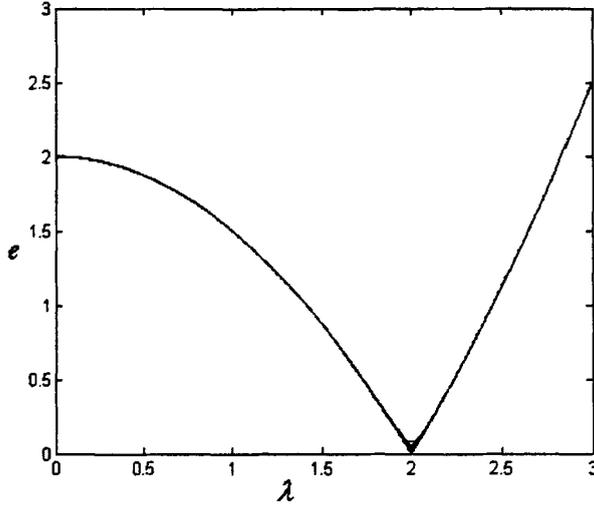


图3-2 拉索的基本动不稳定域

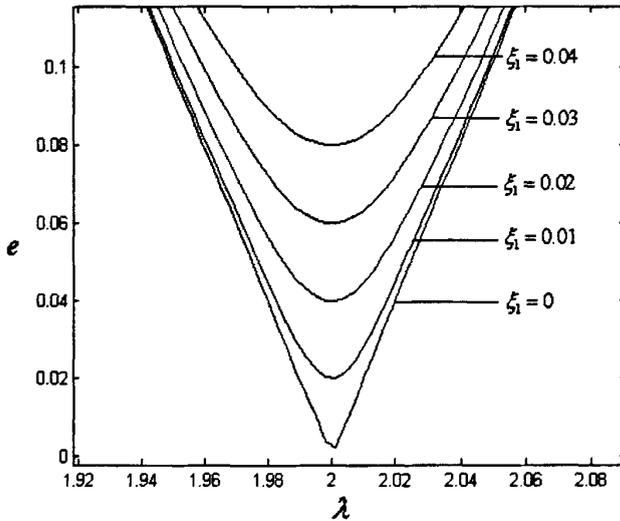


图3-3 拉索在  $\lambda = 2$  附近基本动不稳定域

由式(3-4)得出， $\sigma$ 略大于 $\omega_0$ 。当 $\xi_1 = 0$ 时， $\lambda = 2$ ， $e \rightarrow 0$ ，根据式(3-6)，此时拉索的弦向张力增量 $\xi \rightarrow \infty$ ，因此邻近 $\lambda = 2$ 区域为不稳定域，我们称之为基本不稳定区域，或主参数共振域。主要是因为，在 $\lambda = 2$ 时，在同样阻尼情

况下，其激励参数的界限值最低，最容易产生大振幅的参数共振。如图3-2所示，当索发生参数振动时，在不稳定区内，由于阻尼和非线性的影响，振动振幅不会无限增大。由于阻尼的存在，使所需的激励参数界限值随着阻尼增加而增加。阻尼虽然不能抑制参数共振响应的无限增长，但能缩小动不稳定区。并且，随着激励振幅的增大，拉索的非线性因素将起着越来越重要的作用，在不稳定区域最终由非线性项抑制振幅的无限增长。

### 3. 2. 3 端部位移激励作用下的斜拉索参数振动数值分析

为了说明斜拉索的横向固有振动，对拉索运动微分方程用数值分析的方法进行分析研究，本文均采用龙格-库塔数值积分法求解，用 Matlab 高级程序语言编程实现算法。在下面算例中不考虑阻尼的影响，即设  $\tau=0$ 。

选取某高速铁路大跨度斜拉桥作为分析实例，该斜拉桥跨度布置为 (180+400+180) m，主梁为钢桁架，桁式为华伦桁。桁高 14.5m，节间 10m，桁宽 20m。桥面采用钢筋混凝土板道渣桥面，桥面板与纵横梁桥面系的连接为非结合式。桥塔为钢筋混凝土门型塔，主塔截面为矩形或空心矩形，塔高 98.75m，塔高与主跨比约为 0.25。斜拉索布置为扇形双索面。索面中心与主桁立面共面。每根斜拉索为  $7\phi 5$  的镀锌钢绞线组成。斜拉索下端锚固于桁梁上弦杆大节点。图 3-4 所示为该斜拉桥的有限元分析整体模型图。

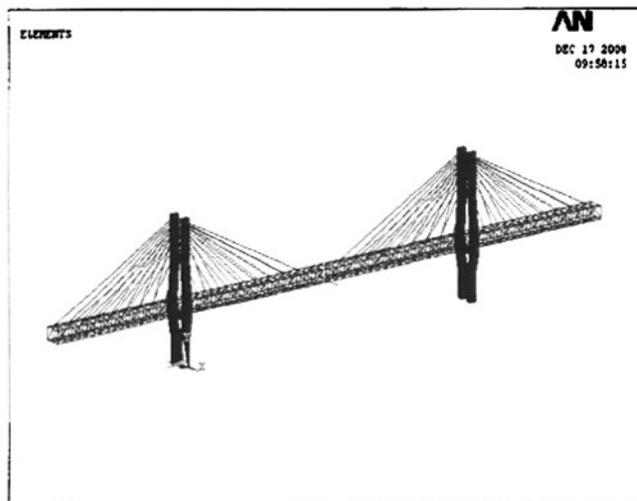


图 3-4

该斜拉桥的两根不同类型的拉索参数如下：

一号拉索参数： $m=97.5546\text{kg/m}$ ， $L=187.9\text{m}$ ， $A=1.25\times 10^{-2}\text{m}^2$ ，

$E=1.95 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\alpha=27.5^\circ$ ,  $T_0=1.078 \times 10^7 \text{ N}$ 。拉索的初始横向挠度设为  $0.0001 \text{ m}$ , 端部初始位移  $z_0=0.1 \text{ m}$ 。

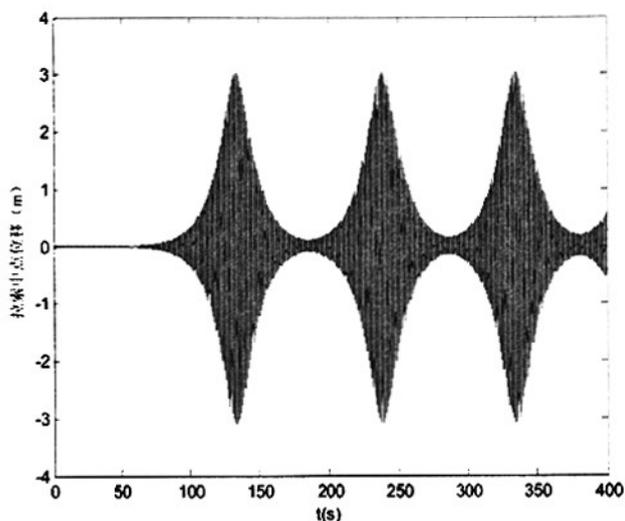


图 3-5 一号拉索振动时程曲线( $\omega=2\sigma$ )

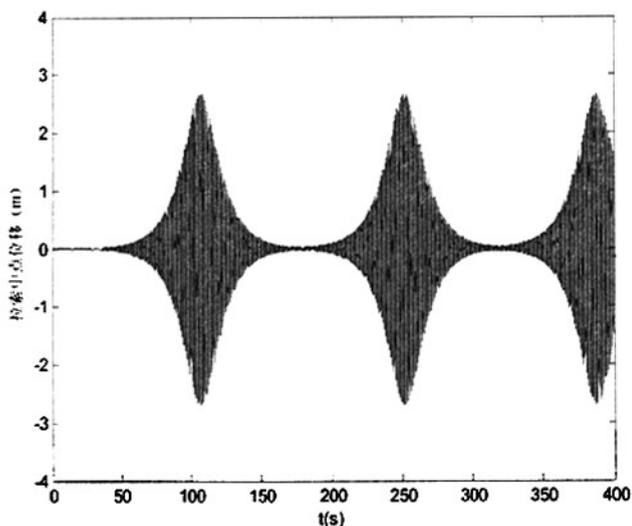
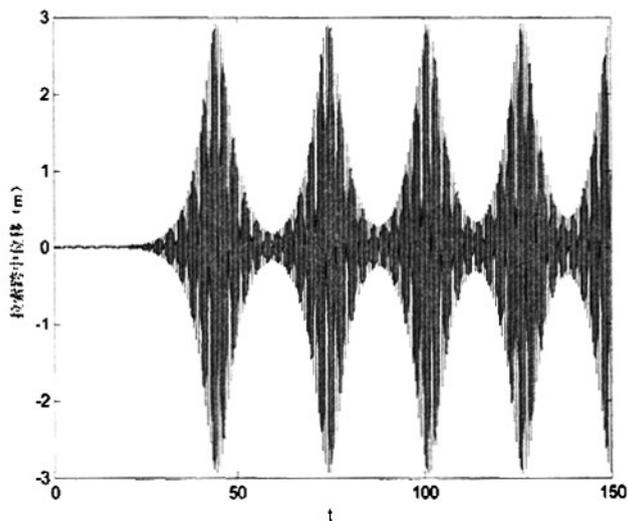
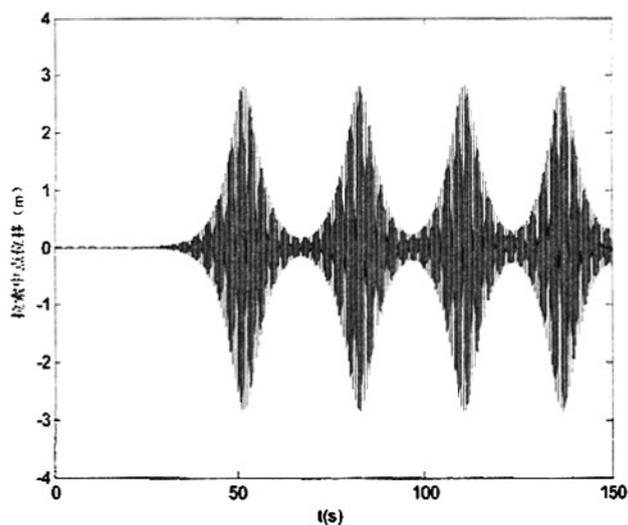


图 3-6 一号拉索振动时程曲线( $\omega=2\omega_0$ )

二号拉索参数： $m=65.4 \text{ kg/m}$ ,  $L=120.8 \text{ m}$ ,  $A=0.8384 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $E=1.95 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\alpha=27.5^\circ$ ,  $T_0=9.8 \times 10^6 \text{ N}$ 。拉索的初始横向挠度设为  $0.0001 \text{ m}$ , 端部初始位移  $z_0=0.1 \text{ m}$ 。

图 3-7 二号拉索振动时程曲线( $\omega = 2\sigma$ )图 3-8 二号拉索振动时程曲线( $\omega = 2\omega_0$ )

通过分析计算可以得到：当 $\omega = 2\sigma$ 时，一号拉索拉索中点的最大振幅为 3.03m；二号拉索拉索中点的最大振幅为 2.92m。当 $\omega = 2\omega_0$ 时，一号拉索拉索中点的最大振幅为 2.65m；二号拉索拉索中点的最大振幅为 2.83m。由此得出：当端部位移激励频率约为拉索固有频率的 2 倍时，拉索会产生参数共振，从而拉索在面内产生大幅振动。这也证明了 3.2.2 节的分析。本章后面的分析若不作特别强调均取 $\omega = 2\sigma$ 。

### 3. 2. 4 垂度对斜拉索参数振动的影响分析

为了更能体现垂度对斜拉索参数振动的影响，将端部激励方向改为沿弦向，取  $\omega=2\sigma$ ，其余条件不变。仍以上面高速铁路斜拉桥一、二号拉索为例作数值分析，计算结果如图 3-9、图 3-10 所示。

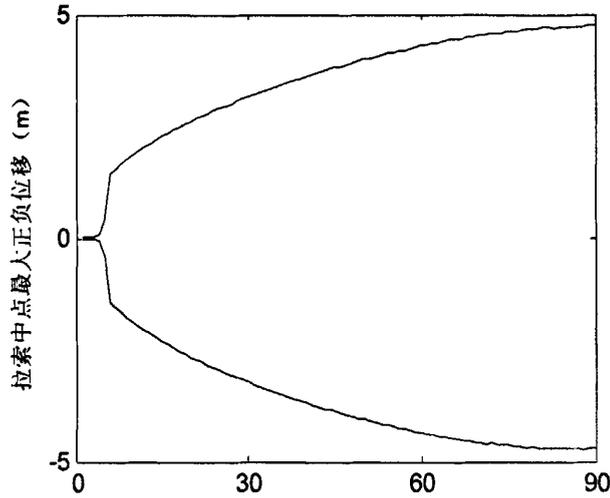


图 3-9 一号拉索倾角变化拉索中点振幅曲线

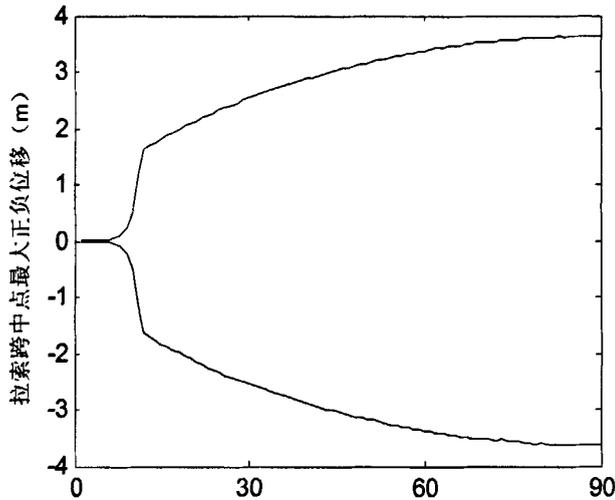


图 3-10 二号拉索倾角变化拉索中点振幅曲线

图3-9、图3-10中的两曲线，一条为拉索中点最大正向位移，另一条拉索中点最大负向位移。从图3-9、图3-10可得如下结论：随着拉索倾角的减小，

拉索的最大响应值相应减小。因此，对拉索进行动力学分析时，应该考虑拉索垂度对其振动的影响。

### 3. 2. 5 初始张力对斜拉索参数振动的影响分析

根据式(3-2)，我们可以看出，初始张力  $T_0$  对斜拉索参数振动有一定影响，仍以上面高速铁路斜拉桥为例作数值分析，考虑垂度的影响。图3-11、图3-12中的两曲线，一条为拉索中点最大正向位移，另一条拉索中点最大负向位移。初始张力对斜拉索参数振动的影响见图3-11、3-12。图中横坐标为拉索初始张力分别与  $1.078 \times 10^7 \text{N}$  和  $9.8 \times 10^6 \text{N}$  的比值。从图中可见，拉索的初始张力对参数振动的最大振幅有一定的影响。随着初始静拉力的增大，拉索中点最大正负位移趋于一个稳定值。

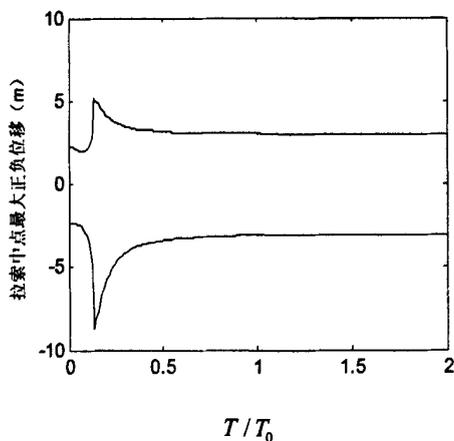


图3-11 一号拉索初始张力变化拉索中点振幅曲线

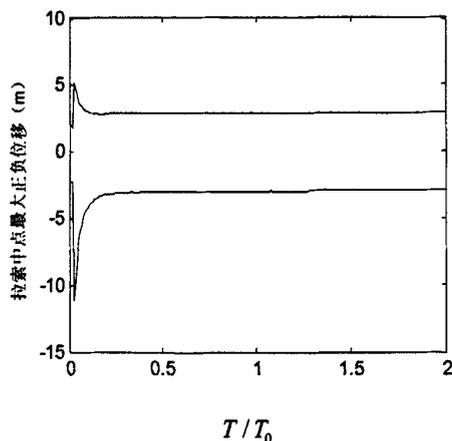


图 3-12 二号拉索初始张力变化拉索中点振幅曲线

### 3. 2. 6 位移激励频率与拉索频率之比对斜拉索参数振动的影响

图 3-3、图 3-14 中的两曲线，一条为拉索中点最大正向位移，另一条拉索中点最大负向位移。从图 3-13、图 3-14 可以发现，拉索出现亚谐波共振，但频率比为 2 时的拉索中点振幅比频率比为 0.5、1 的拉索中点振幅大的多。同时也再次证明了 3.2.2 节中推得的理论。以上分析都是在理想状态下的研究，斜拉桥存在阻尼，因此分析阻尼对索桥振动的影响是必不可少的，本文将在下一章中予以论述。

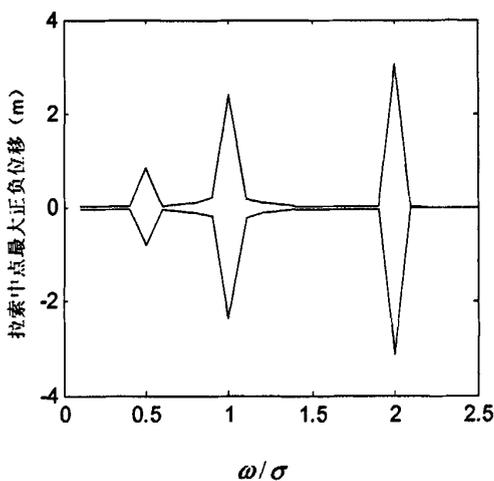


图 3-13 一号拉索与桥面频率比变化拉索中点振幅曲线

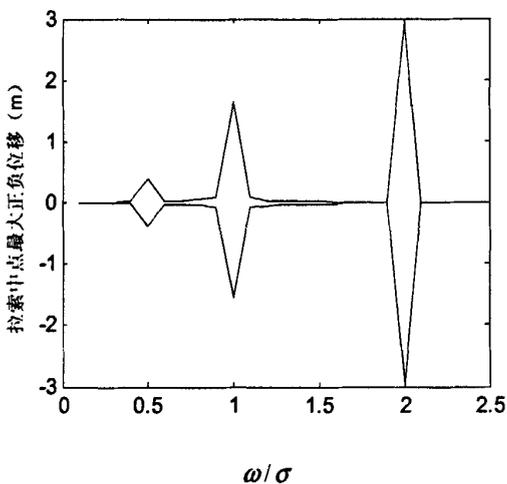


图 3-14 二号拉索与桥面频率比变化拉索中点振幅曲线

### 3. 2. 7 端部位移激励幅值对斜拉索参数振动的影响

图3-15、图3-16中的两曲线，一条为拉索中点最大正向位移，另一条拉索中点最大负向位移。位移激励的幅值对拉索的参数振动幅值的影响如图3-15、图3-16所示，位移激励的幅值从0.01m变化到0.5m，激励的幅值明显影响了拉索振动时的瞬态响应幅值和稳态响应的幅值。当 $\omega=2\sigma$ 时，即使在激励的幅值很小的情况下，也可以引起拉索较大的横向振动。随着激励幅值的不断增大，拉索的振幅也不断增大。

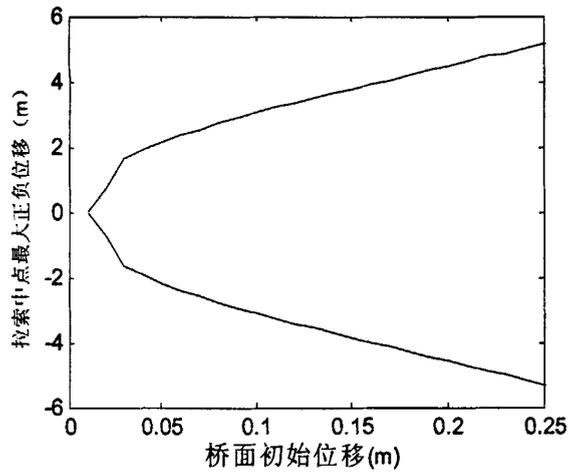


图3-15 一号拉索端部位移激励幅值变化

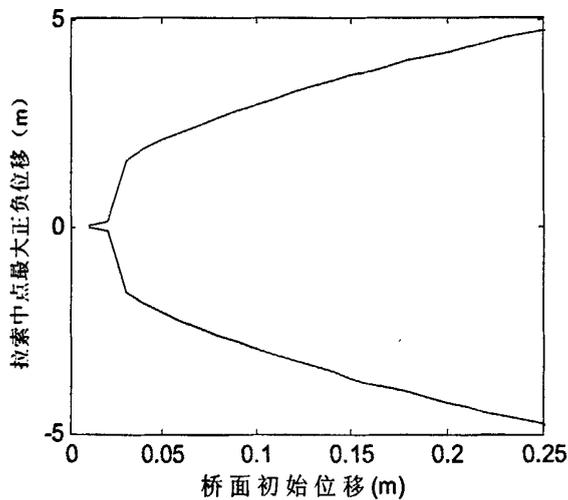


图3-16 二号拉索端部位移激励幅值变化

### 3.3 本章小结

本章通过把拉索的端部位移激励简化为等幅的简谐位移激励，建立了斜拉索参数振动微分方程，方程考虑了拉索的垂度和几何非线性因素等影响。通过分析得出斜拉索参数振动微分方程的动不稳定区间，当  $\omega = 2\sigma$  时，拉索作大幅振动。并以某高速铁路大跨度斜拉桥其中两根典型拉索为例验证了以上结论。本章还讨论了垂度变化、初始张拉力变化、端部位移激励与拉索频率之比变化、端部位移激励幅值变化对斜拉索参数振动的影响。得出以下结论：

(1) 随着拉索倾角的减小，拉索的最大响应值相应减小，说明拉索的垂度会使其参数振动幅值增大；

(2) 拉索的初始张拉力对参数振动的最大振幅有一定的影响。随着初始静拉力的增大，拉索中点最大正负位移趋于一个稳定值；

(3) 端部位移激励频率与拉索固有频率之比对斜拉索参数振动有较大影响，当频率比约为 0.5、1 时，拉索出现亚谐波共振，但频率比为 2 时的拉索中点振幅比发生亚谐波共振时的振幅大的多；

(4) 位移激励幅值明显影响了拉索振动时的瞬态响应幅值和稳态响应的幅值，随着激励幅值的不断增大，拉索的振幅也不断增大。

## 第 4 章 拉索-桥面耦合作用下的斜拉索参数振动

### 4. 1 引言

斜拉桥拉索的两端分别锚固于桥面和桥塔，在地震、风、车辆等荷载的作用下，桥面和桥塔会按照一定的频率振动，从而施加给拉索一定频率的位移激励，使拉索产生横向振动。当桥面和桥塔的频率与拉索某一阶固有频率满足一定的倍数关系时，拉索便会产生大幅横向振动。如果拉索发生大幅振动，也必然会对桥面的运动产生一定的影响。也就是说拉索和桥面的运动不是相互独立的，而是耦合的。本章主要研究考虑拉索-桥面面内耦合作用下斜拉索的参数振动。

### 4. 2 拉索-桥面耦合作用下的斜拉索参数振动

#### 4. 2. 1 运动微分方程的推导

为便于研究，可将桥面简化为一个质量块，梁的刚度用一个刚度为  $k_1$  的弹簧来模拟，拉索-桥面耦合的模型可以用图4-1来表示， $M_1$ 、 $k_1$ 、 $c_1$  分别为简化的桥面模拟质量、模拟结构弹簧刚度、模拟结构阻尼。

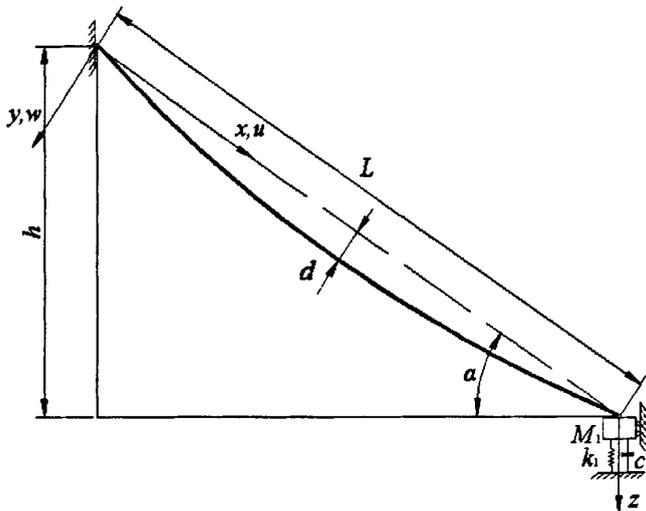


图 4-1 拉索-桥面耦合振动模型

根据上章 3.2 节式 (3-3) 的推导得斜拉索横向振动微分方程:

$$\ddot{X} + 2\sigma\zeta\dot{X} + (a_1 + bz)X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4z = 0 \quad (4-1)$$

式中:  $\zeta$  为相对阻尼系数

$$a_1 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{8d^2}{3L^2} - \frac{16d^2}{\beta^2 L^4}\right) + \left(\frac{1}{2}L + \frac{8d^2}{L}\right)\beta^2 g \sin \alpha + \frac{32d^2 EA}{mL^4}$$

$$= \sigma^2$$

$$a_2 = \frac{112\beta d EA}{9mL^3}$$

$$a_3 = \frac{\beta^4 EA}{8m}$$

$$a_4 = \frac{32d EA \sin \alpha}{\beta mL^4}$$

$$b = \frac{\beta^2 EA \sin \alpha}{mL}$$

$$\beta = \frac{\pi}{L}$$

$$\omega_0 = \pi \sqrt{\frac{T_0}{mL^2}}$$

桥面简化质量的运动微分方程为:

$$M_1 \ddot{z} + c_1 \dot{z} + k_1 z + \frac{EA}{L} \sin \alpha \int_0^L \varepsilon dx = 0 \quad (4-2)$$

整理得:

$$\ddot{z} + 2\omega_1 \zeta_1 \dot{z} + \omega_1^2 z + a_5 X + a_6 X^2 = 0 \quad (4-3)$$

其中:

$$\zeta_1 = \frac{c_1}{2M_1 \omega_1}$$

$$a_5 = \frac{2EA m g \sin \alpha \cos \alpha}{\pi M_1 T}$$

$$a_6 = \frac{\pi^2 EA m g \sin \alpha}{4M_1 L^2}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{M_1} + \frac{EA}{\pi L} \sin^2 \alpha$$

在线性情况下，且不考虑耦合和阻尼，根据振动力学理论有：

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}} \Rightarrow M_1 = \frac{k_1}{\omega_1^2} \quad (4-4)$$

在建立的例桥 ANSYS 有限元模型中，通过在桥面加载单位力计算桥的变形，根据胡克定理可近似求得  $k_1$ ，在确定  $\omega_1$  情况下通过式 (4-4) 可近似求得  $M_1$ 。

令：  $X = x_1$ ，  $\dot{X} = x_2$ ，  $z = x_3$ ，  $\dot{z} = x_4$ ，得拉索-桥面耦合作用的振动微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\sigma\zeta x_2 - (\sigma^2 + bx_3)x_1 - a_2x_1^2 - a_3x_3^2 - a_4x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2\omega_1\zeta_1x_4 - \omega_1^2x_3 - a_5x_1 - a_6x_1^2 \end{cases} \quad (4-5)$$

从式 (4-5) 可以看出拉索、桥面的振动相互耦合，虽然系统中并没有显含时间  $t$ ，但是由于桥面质量块  $M_1$  的振动将引起拉索的索力产生周期性的变化，而索力的周期变化将使得拉索的刚度也发生周期性的变化，因此，拉索相当于受到参数激励。根据二阶非线性系统的内共振特性可知，当  $\omega_1$  接近于  $\sigma$  的 2 倍时，质量块  $M_1$  的竖向振动将可能激发拉索横向的大幅振动。

#### 4. 2. 2 拉索-桥面耦合作用下的斜拉索参数振动数值分析

为了研究拉索垂度、拉索张力、桥面与拉索频率之比、桥面初始位移、相对阻尼比等因素对拉索-桥面系统耦合作用下参数振动的影响，仍以前述高速铁路大跨度斜拉桥的一号、二号拉索为例，采用龙格-库塔数值计算分析的方法对该系统加以研究。本章后面的分析若不作特别强调均取  $\omega_1 = 2\sigma$ 。

##### 一、拉索-桥面耦合作用下的斜拉索参数振动数值分析

本小节不考虑拉索、桥面振动阻尼的影响，即  $\zeta = \zeta_1 = 0$ 。一号拉索初始条件：  $x_1(0) = 0.0001$ ，  $x_2(0) = 0$ ，  $x_3(0) = 0.1$ ，  $x_4(0) = 0$ ；二号拉索初始条件：

$x_1(0) = 0.0001$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.1$ ,  $x_4(0) = 0$ 。

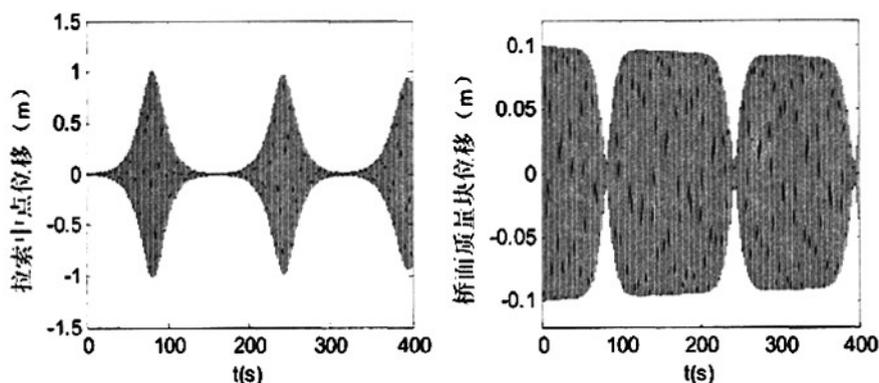


图 4-2 一号拉索振动时程曲线( $\omega_1 = 2\sigma$ )

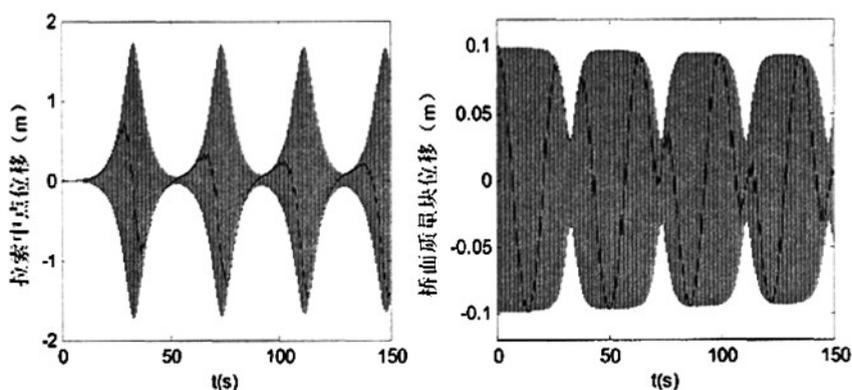


图 4-3 二号拉索振动时程曲线( $\omega_1 = 2\sigma$ )

图 4-2 为一号拉索的索桥耦合振动时程曲线图，拉索中点最大位移为 1.02m；图 4-3 为一号拉索的索桥耦合振动时程曲线图，拉索中点最大位移为 1.73m。从拉索-桥面耦合分析的结果可以得出，当桥面在外加荷载作用下，其竖向振动频率约为拉索横向振动固有频率的 2 倍时，即使桥面振幅很小，也可能激发拉索产生大幅横向振动。而桥面质量块的振动幅值虽有所变化，但其最大振动幅值与其初始扰动值基本保持一致。从上图可以看出，桥面的竖向振动和拉索的横向振动之间存在着强烈的耦合作用。拉索和桥面的振动存在明显“拍”的现象，两者的振幅随时间变化而变化，所不同的是拉索的最大振幅处正是桥面出现最小振幅的时刻，这表明体系的能量在拉索与桥面之间转移。正因为拉索能量只部分传递给桥面，桥面反过来再激振拉索时，拉索的振幅将会有微量减小，但拉索的总能量增加。因此最终绝大部分能量将传递给索，拉索的振动越来越强烈，而桥面振动越来越小。

两根拉索的拉索中点最大位移均小于 3.2.2 节端部位移激励作用下拉索中点最大位移, 从以上结果及分析可以知道: 在 3.2.2 节端部位移激励作用下, 拉索因自身索内力等因素的作用抑制了拉索振幅的无限增大。而在本节条件下, 拉索不仅自身索内力等因素的作用抑制了拉索振幅, 同时, 由于桥面能量只部分传递给拉索, 这也就等于限制了拉索获得的能量的量, 从而抑制了拉索振幅。

## 二、垂度等因素对斜拉索参数振动的影响分析

根据拉索-桥面耦合作用下的振动微分方程组式 (4-4) 可以看出, 拉索的垂度、初始张力、桥面与拉索的频率比等因素对拉索参数共振响应有一定的影响。以下对前述两拉索所作的数值分析结果如图 4-4~图 4-7 所示。

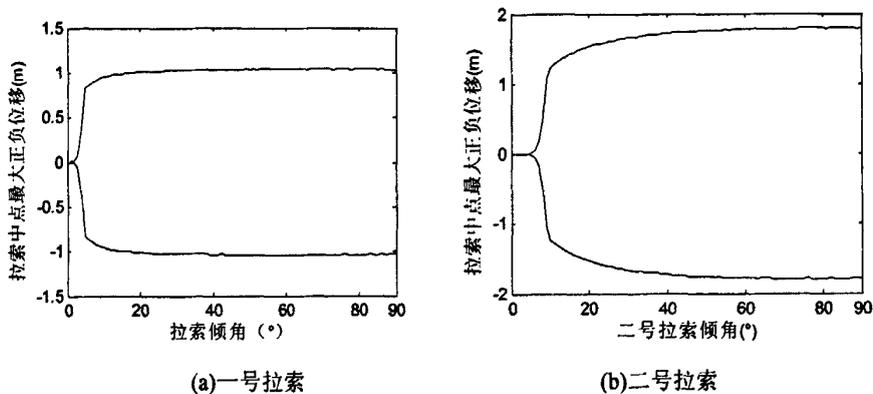


图 4-4 拉索垂度对斜拉索参数振动的影响

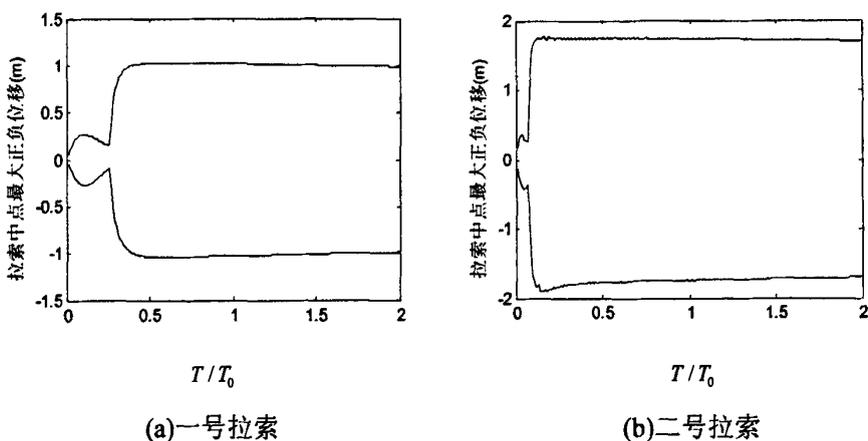


图 4-5 拉索初始张力对斜拉索参数振动的影响

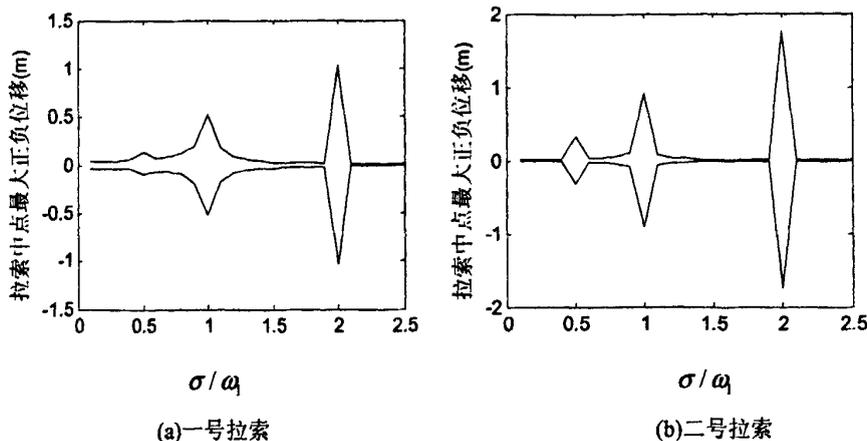


图 4-6 桥面与拉索频率之比对斜拉索参数振动的影响

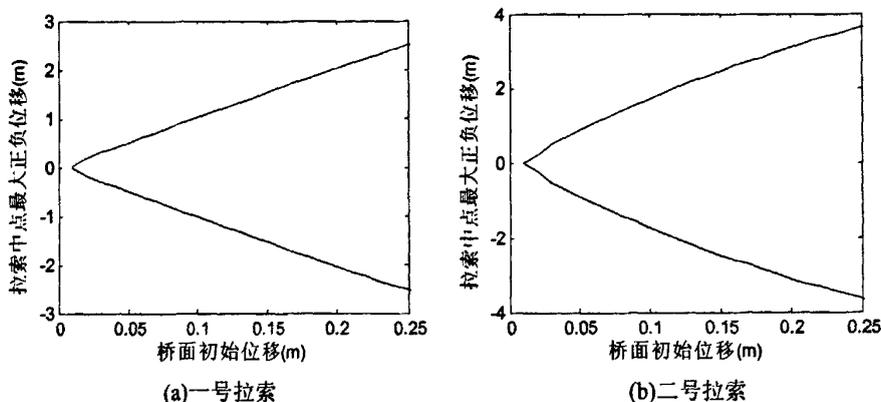


图 4-7 桥面初始位移对斜拉索参数振动的影响

图 4-4~图 4-7 中的两曲线，一条为拉索中点最大正向位移，另一条拉索中点最大负向位移。通过图 4-4~图 4-7 分析可以得出拉索的振动有以下几个特点：

- a、拉索的倾角,即拉索的垂度变化对索的振幅有较大的影响,随着拉索倾角的增大,拉索参数共振时振幅会增大,如图 4-4 所示。
- b、拉索的振动与拉索的初始张力有较大的关系,对于同一根索随着张力的变化,拉索的中点最大振幅也会随着变化,如图 4-5 所示。
- c、从图 4-6 发现,拉索出现亚谐波共振,但频率比为 2 时的拉索中点振幅比频率比为 0.5、1 的拉索中点振幅大的多。
- d、桥面初始位移对拉索的参数振动幅值的影响如图 4-7 所示,当  $\omega = 2\sigma$  时,即使在桥面初始位移的幅值很小的情况下,也可以引起拉索较大的横向振动。并且随着桥面初始位移的不断增大,拉索的振幅也不

断增大。

e、拉索-桥面耦合作用下，当 $\omega_1 = 2\sigma$ 时，拉索发生发生大幅振动。但振幅相应均小于第三章条件下的拉索振幅。这主要是因为耦合条件下，拉索不仅自身因素的作用抑制了拉索振幅，同时，由于桥面能量只部分传递给拉索，这也就等于限制了拉索获得的能量的量，从而抑制了拉索振幅。

### 三、振动阻尼对斜拉索参数振动的影响分析

前面章节均没有考虑结构阻尼对斜拉索参数振动的影响，实际斜拉索结构都有一定的阻尼，下面通过改变 $\zeta_1$ 来考察阻尼对拉索-桥面体系振动的影响。数值计算分析结果如下。

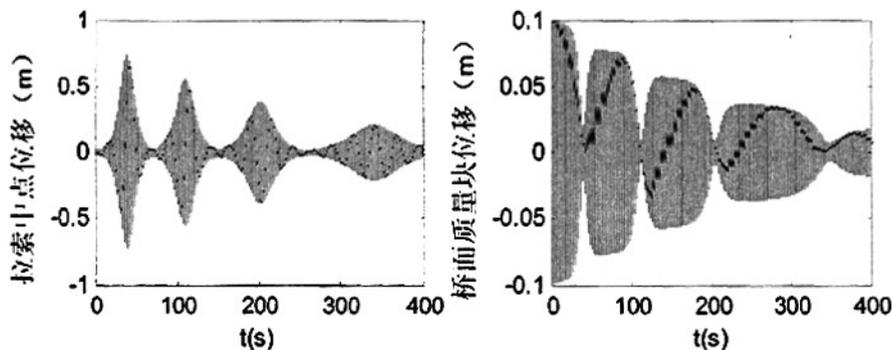


图 4-8 (一号拉索  $\zeta_1 = 0.1/100$ )

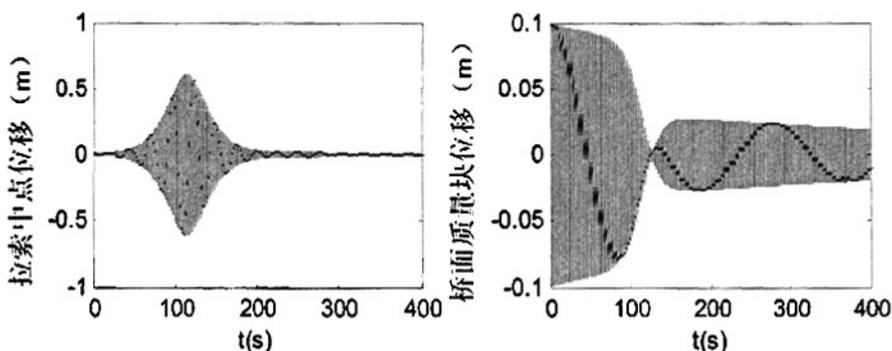
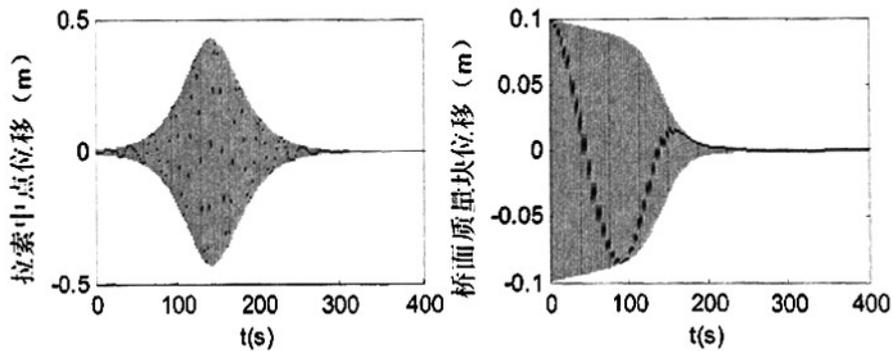
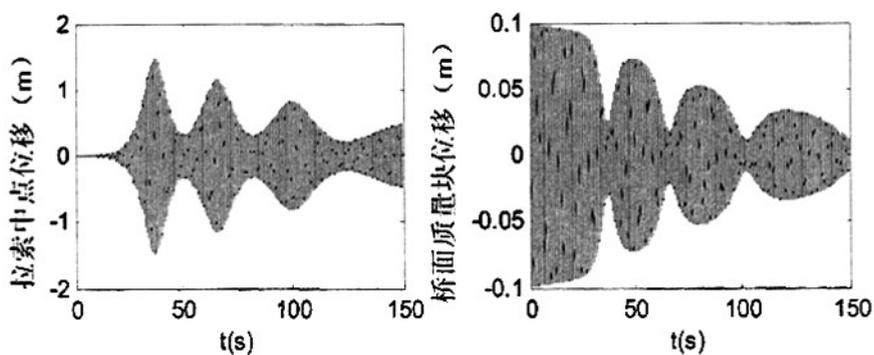
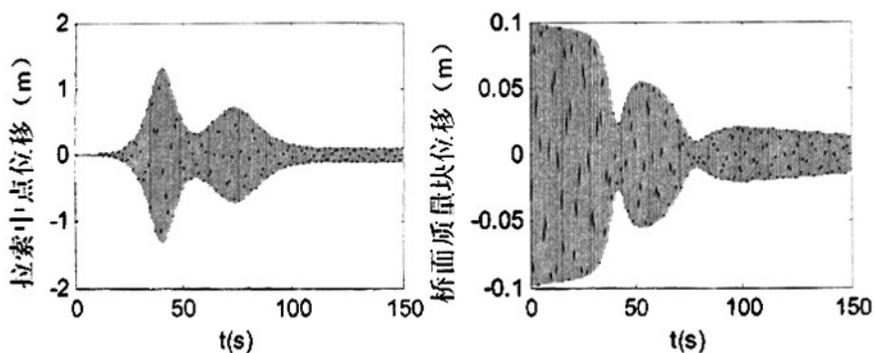
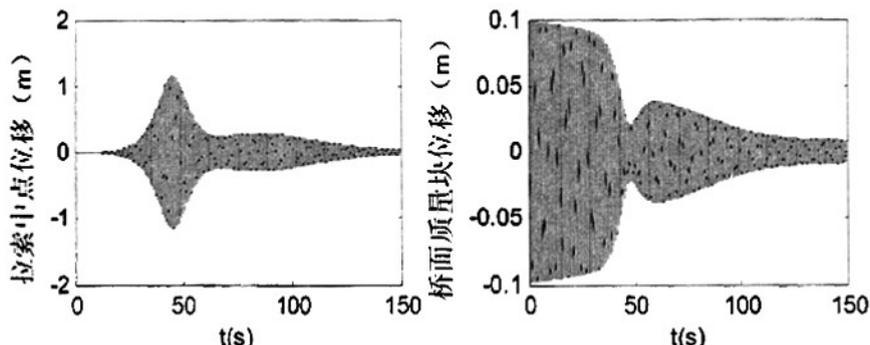


图 4-9 (一号拉索  $\zeta_1 = 0.2/100$ )

图 4-9 (一号拉索  $\zeta_1 = 0.3/100$ )图 4-10 (二号拉索  $\zeta_1 = 0.1/100$ )图 4-11 (二号拉索  $\zeta_1 = 0.2/100$ )

图 4-12 (二号拉索  $\zeta_1 = 0.3/100$ )

分析上面计算结果,可以看出,在阻尼的作用下,拉索的横向振动和桥面的竖向振动都呈现逐渐减小的趋势。拉索和桥面之间存在耦合性,拉索最大振幅处为桥面最小振幅处。如果参数振动时间足够长的话,结构阻尼能够抑制拉索的大幅振动。但是从图上也可以看出,在拉索振动发生后较短的时间内,其最大振动振幅依然很大,也就是说,阻尼不能有效减小拉索振动初期的最大振幅,因此有必要对斜拉索施加适当的外加阻尼来控制拉索的最大振动幅值。

### 4.3 本章小结

本章在第 3 章的基础上考虑了桥面振动对拉索参数振动的影响,导出拉索—桥面耦合作用下的振动微分方程组,所建立的模型较第 3 章的模型更加接近实际情况。通过对拉索—桥面耦合体系的数值分析和参数讨论,得到了一些基本结论:

(1)当桥面在外加荷载作用下,其竖向振动固有频率约为拉索横向振动固有频率的 2 倍时,即使桥面振幅很小,也可能激发拉索产生大幅横向振动。

(2)拉索的横向振动和桥面的竖向振动具有耦合性,两者的振动具有“拍”的现象。

(3)拉索在作横向振动时,除了可能作主参数共振外,也可能作亚谐波共振,但频率比为 2 时的拉索中点振幅比频率比为 0.5、1 的拉索中点振幅大的多。

(4)当  $\omega_1 = 2\sigma$  时,耦合作用下的拉索中点振幅小于相应非耦合条件下拉索中点振幅。

(5)拉索自身振动阻尼不能有效减小其振动初期的最大振幅,因此有必要对斜拉索施加适当的外加阻尼来控制拉索的最大振动幅值。

## 第 5 章 拉索-桥塔耦合作用下的斜拉索参数振动

### 5.1 引言

在前面的论述中，我们假设桥塔是不动的。实际上，桥塔结构特点一般是高耸直立的，具有一定的柔性，在地震、风等荷载的作用下，桥塔会按照一定的频率振动，从而施加给拉索一定频率的位移激励，使拉索产生横向振动。当桥塔沿桥横向振动频率与拉索某一阶固有频率满足一定的倍数关系时，拉索便会产生大幅横向振动。本章主要研究考虑拉索-桥塔面内耦合作用下斜拉索的参数振动。

### 5.2 拉索-桥塔耦合作用下的斜拉索参数振动

#### 5.2.1 运动微分方程的推导

为便于研究，将桥塔简化为一个质量块，梁的刚度用一个刚度为  $k_2$  的弹簧来模拟，拉索-桥塔耦合的模型如图 5-1 所示。 $M_2$ 、 $k_2$ 、 $c_2$  分别为简化的桥塔模拟质量、模拟结构弹簧刚度、模拟结构阻尼。

通过式 (4-4)，在已知  $k_2$ 、 $\omega_2$  的情况下，可近似求得  $M_2$ 。

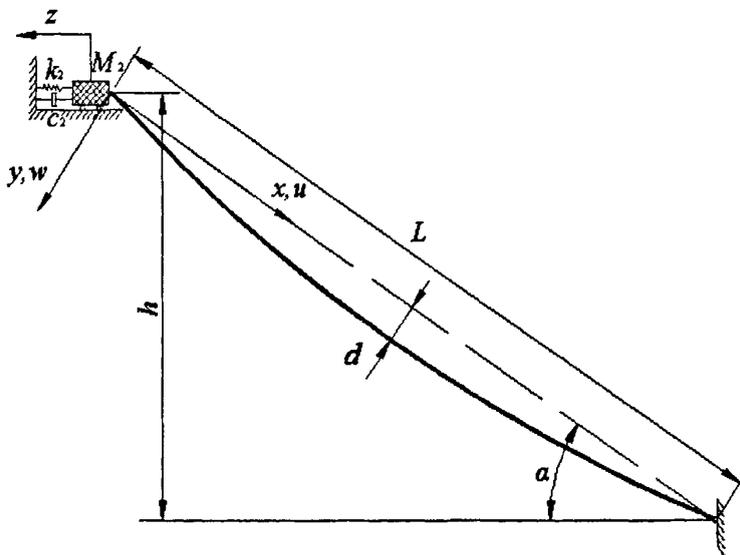


图 5-1 拉索-桥塔耦合振动模型

根据 3.2 节的推导得斜拉索横向振动微分方程:

$$\ddot{X} + 2\sigma\zeta \dot{X} + (a_1 + bz)X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4z = 0 \quad (5-1)$$

其中:

$$a_1 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{8d^2}{3L^2} - \frac{16d^2}{\beta^2 L^4}\right) + \left(\frac{1}{2}L + \frac{8d^2}{L}\right)\beta^2 g \sin \alpha + \frac{32d^2 EA}{mL^4}$$

$$= \sigma^2$$

$$a_2 = \frac{112\beta d EA}{9mL^3}$$

$$a_3 = \frac{\beta^4 EA}{8m}$$

$$a_4 = \frac{32d EA \sin \alpha}{\beta mL^4}$$

$$b = \frac{\beta^2 EA \sin \alpha}{mL}$$

$$\beta = \frac{\pi}{L}$$

$$\omega_0 = \pi \sqrt{\frac{T_0}{mL^2}}$$

桥塔简化质量的运动微分方程为:

$$M_2 \ddot{z} + c_2 \dot{z} + k_2 z + \frac{EA}{L} \cos \alpha \int_0^L \varepsilon dx = 0 \quad (5-2)$$

整理得:

$$\ddot{z} + 2\omega_2 \zeta_2 \dot{z} + \omega_2^2 z + a_5 X + a_6 X^2 = 0 \quad (5-3)$$

其中:

$$\zeta_2 = \frac{c_2}{2M_2 \omega_2}$$

$$a_5 = \frac{2EA m g \cos^2 \alpha}{\pi M_2 T}$$

$$a_6 = \frac{\pi^2 EA m g \cos \alpha}{4M_2 L^2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{M_2} + \frac{EA}{\pi L} \sin \alpha \cos \alpha$$

令:  $X = x_1$ ,  $\dot{X} = x_2$ ,  $z = x_3$ ,  $\dot{z} = x_4$ , 得拉索-桥塔耦合作用下的振动微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\sigma\zeta x_2 - [\sigma^2 + bx_3]x_1 - a_2x_1^2 - a_3x_1^3 - a_4x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2\omega_2\zeta_2x_2 - \omega_2^2x_3 - a_5x_1 - a_6x_1^2 \end{cases} \quad (5-4)$$

从式(5-4)可以看出拉索与桥塔的振动相互耦合, 由于桥塔质量块  $M_2$  的振动将引起拉索的索力产生周期性的变化, 而索力的周期变化将使得拉索的刚度也发生周期性的变化, 因此, 拉索相当于受到参数激励。根据二阶非线性系统的内共振特性可知, 当  $\sigma$  接近于  $\omega_2$  的一半时, 质量块  $M_2$  的横向振动将可能激发拉索横向的大幅振动。

### 5. 2. 2 拉索-桥塔耦合作用下的斜拉索参数振动数值分析

如同第 4 章, 通过改变拉索垂度、拉索张力、桥塔与拉索频率之比、桥塔初始位移、相对阻尼比等因素来研究拉索-桥塔系统耦合作用下参数振动的特性。以前述高速铁路大跨度斜拉桥的一号、二号拉索为例, 采用龙格-库塔数值计算分析的方法对该系统加以研究。

#### 一、拉索-桥塔耦合作用下的斜拉索参数振动数值分析

本小节仍然不考虑拉索、桥塔振动阻尼的影响, 即  $\zeta = \zeta_2 = 0$ 。一号拉索初始条件:  $x_1(0) = 0.0001$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.1$ ,  $x_4(0) = 0$ ; 二号拉索初始条件:  $x_1(0) = 0.0001$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.1$ ,  $x_4(0) = 0$ 。

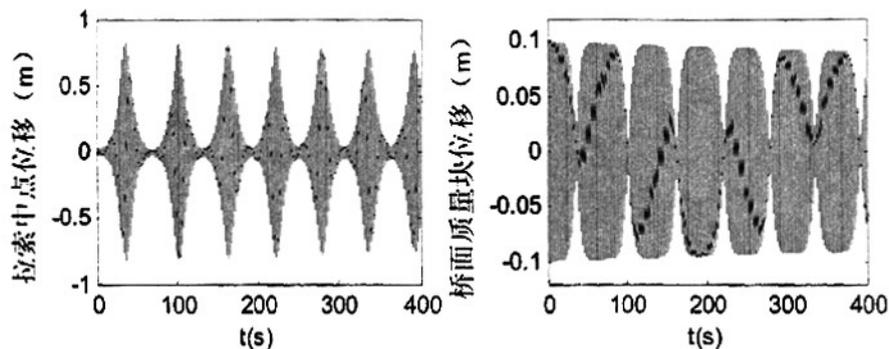
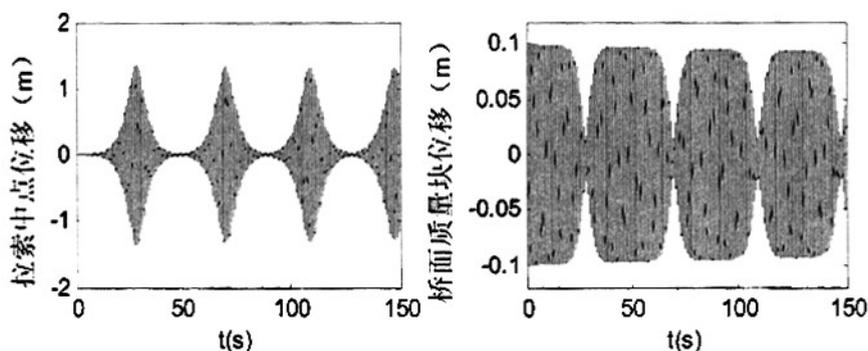
图 5-2 一号拉索振动时程曲线( $\omega_1 = 2\sigma$ )图 5-3 二号拉索振动时程曲线( $\omega_1 = 2\sigma$ )

图 5-2 为一号拉索的拉索-桥塔耦合振动时程曲线图，拉索中点最大位移为 0.83m；图 5-3 为一号拉索的拉索-桥塔耦合振动时程曲线图，拉索中点最大位移为 1.37m。从拉索-桥塔耦合分析的结果可以得出，当桥塔在外加荷载作用下，其横向振动频率约为拉索横向振动固有频率的 2 倍时，即使桥塔振幅很小，也可能激发拉索产生大幅横向振动。而桥塔质量块的振动幅值虽有所变化，但其最大振动幅值与其初始扰动值基本保持一致。从图 5-2、图 5-3 可以看出，桥塔和拉索的振动之间存在明显“拍”的现象，两者的振幅随时间变化而变化，所不同的是拉索的最大振幅处正是桥塔出现最小振幅的时刻，这表明体系的能量在拉索与桥塔之间转移，在不考虑阻尼的情况下，系统为保守系统，其总能量保持不变。正因为拉索能量只部分传递给桥面，桥塔反过来再激振拉索时，拉索的振幅将会有微量减小，但拉索的总能量增加。因此最终绝大部分能量将传递给索，拉索的振动越来越强烈，而桥塔振动越来越小。

两根拉索的拉索中点最大位移均小于 3.2.2 节端部位移激励作用下拉索中点最大位移, 从以上结果及分析可以知道: 在 3.2.2 节端部位移激励作用下, 拉索因自身索内力等因素的作用抑制了拉索振幅的无限增大。而在本节条件下, 拉索不仅自身索内力等因素的作用抑制了拉索振幅, 同时, 由于桥塔能量只部分传递给拉索, 这也就等于限制了拉索获得的能量的量, 从而抑制了拉索振幅。

以上结论与拉索-桥面耦合振动相类似。

## 二、垂度等因素对斜拉索参数振动的影响分析

根据拉索-桥塔耦合作用下的振动微分方程组式 (5-4) 可以看出, 拉索的垂度、初试张力、桥面与拉索的频率比等因素对拉索参数共振响应有一定的影响。以下对前述两拉索所作的数值分析结果如图 5-4~图 5-7 所示。

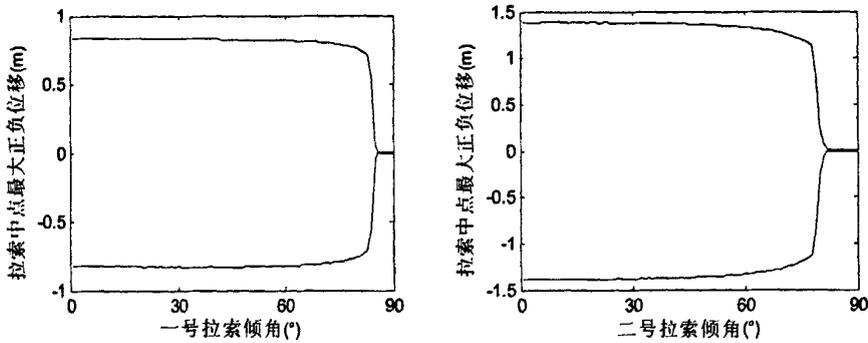


图 5-4 垂度对斜拉索参数振动的影响

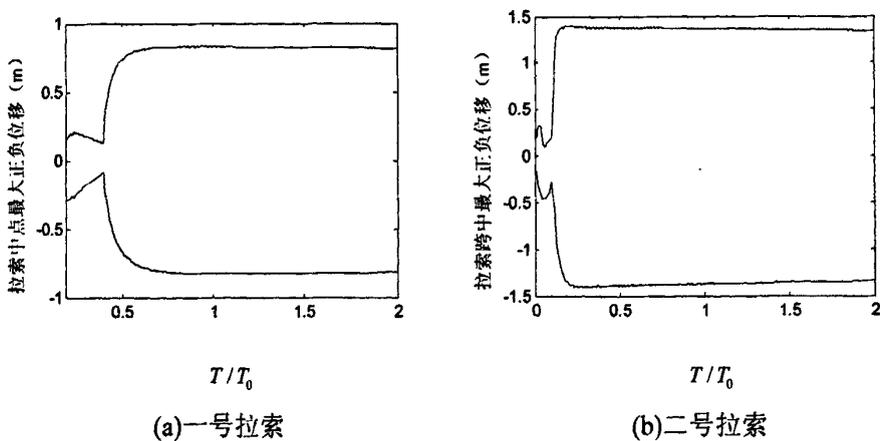


图 5-5 初始张力对斜拉索参数振动的影响

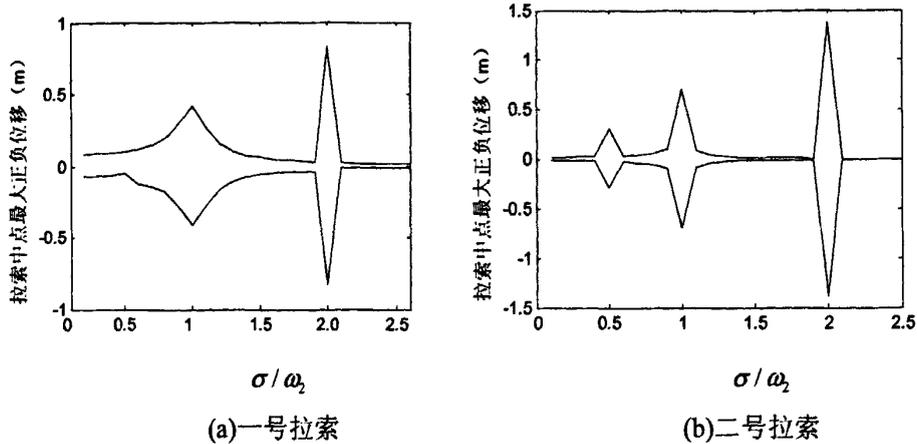


图 5-6 桥面与拉索频率之比对斜拉索参数振动的影响

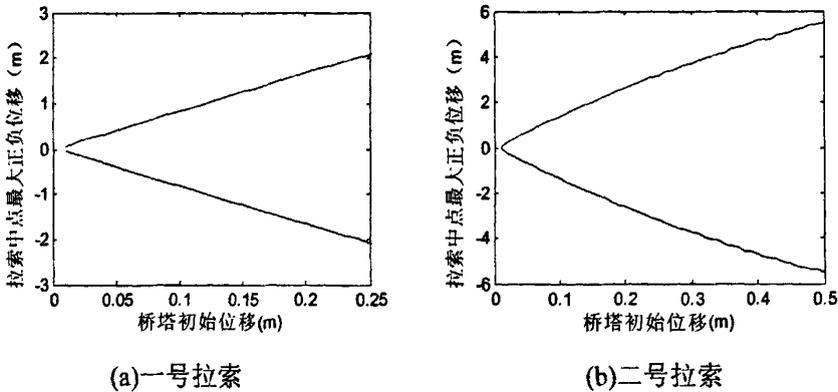


图 5-7 桥塔初始位移对斜拉索参数振动的影响

图 5-4~图 5-7 中的两曲线，一条为拉索中点最大正向位移，另一条拉索中点最大负向位移。通过图 5-4~图 5-7 分析可以得出拉索的振动有以下几个特点：

- a、拉索的倾角,即拉索的垂度变化对索的振幅有较大的影响,随着拉索倾角的增大,拉帮索参数共振时振幅会增大。
- b、拉索的振动与拉索的初始张力有较大的关系,对于同一根索随着张拉力的变化,索的中点最大振幅也会随着变化。
- c、从图 5-6 发现,拉索出现亚谐波共振,但频率比为 2 时的拉索中点振幅比频率比为 0.5、1 的拉索中点振幅大的多。同时也再次证明,当  $\omega_2 = 2\sigma$  时,拉索发生发生大幅振动。

d、当  $\omega_2 = 2\sigma$  时，即使桥塔初始位移的幅值很小，也可以引起拉索较大的横向振动。并且随着桥面初始位移的不断增大，拉索的振幅也不断增大。

### 三、振动阻尼对斜拉索参数振动的影响分析

前面没有考虑振动阻尼对斜拉索参数振动的影响，实际斜拉索结构都有一定的阻尼，对于长索前几阶频率在 0.2~0.3Hz 时，模态阻尼比约 0.1%<sup>[59]</sup>。下面通过改变  $\zeta_2$  来考察阻尼对拉索—桥面体系振动的影响。数值计算分析结果如图 5-8~图 5-13 所示。

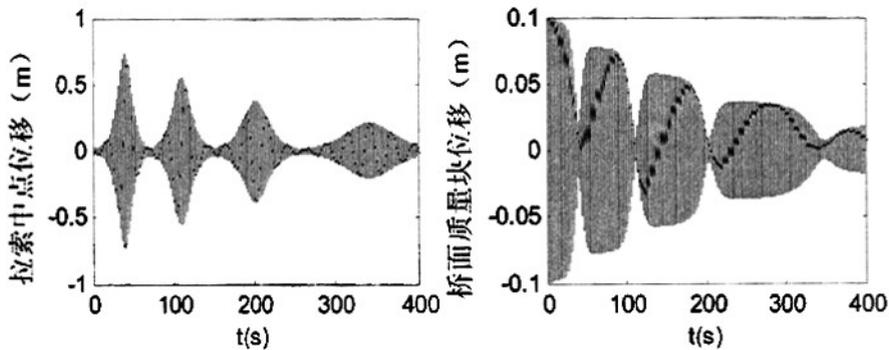


图 5-8 (一号拉索  $\zeta_2 = 0.1/100$ )

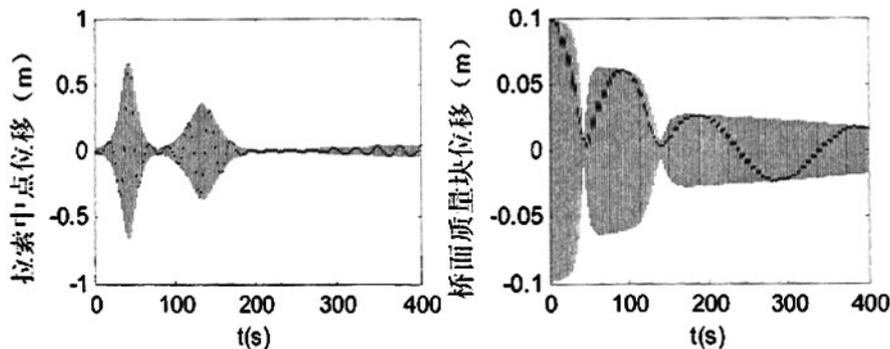
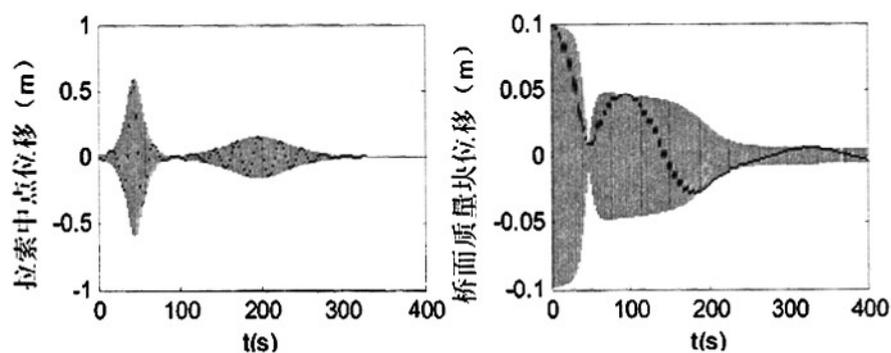
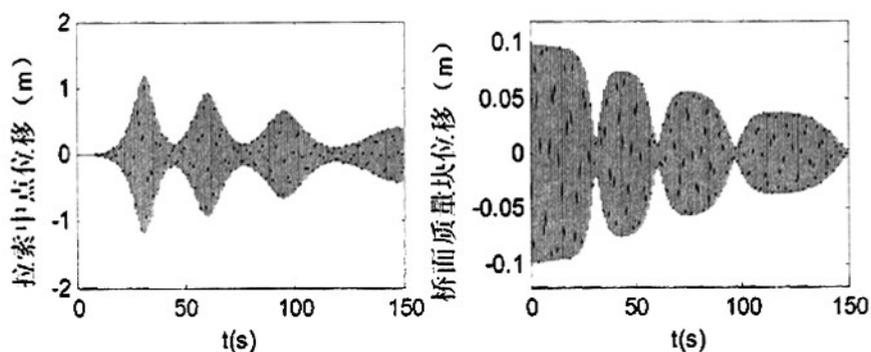
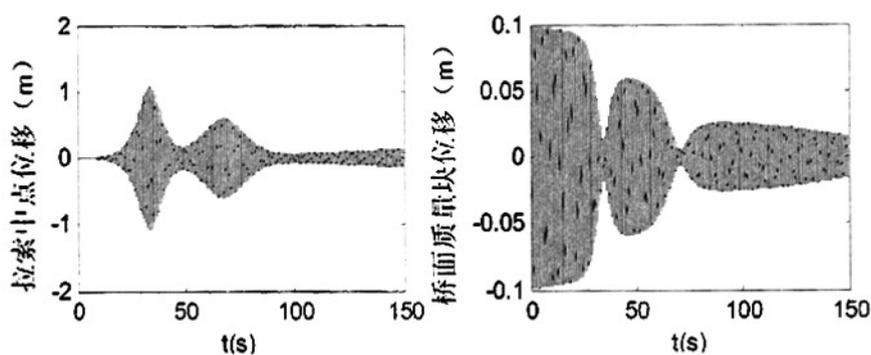
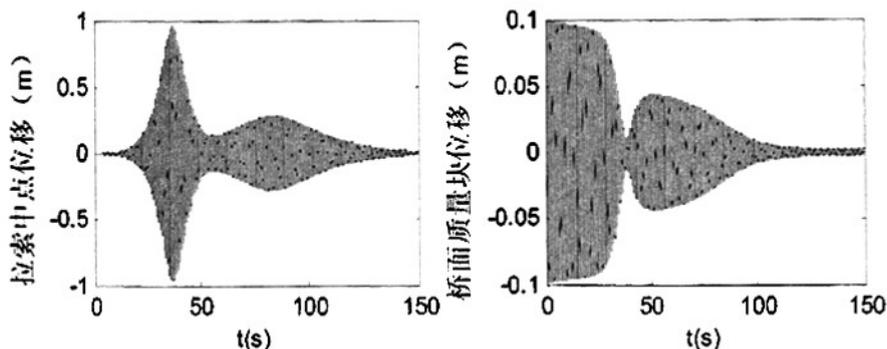


图 5-9 (一号拉索  $\zeta_2 = 0.2/100$ )

图 5-10 (一号拉索  $\zeta_2 = 0.3/100$ )图 5-11 (二号拉索  $\zeta_2 = 0.1/100$ )图 5-12 (二号拉索  $\zeta_2 = 0.2/100$ )

图 5-13 (二号拉索  $\zeta_2 = 0.3/100$ )

分析上面计算结果,可以看出,在阻尼的作用下,拉索的横向振动和桥面的竖向振动都呈现逐渐减小的趋势,但是拉索和桥面之间仍然存在耦合性,即拉索最大振幅处为桥面最小振幅处。如果参数振动时间足够长的话,结构阻尼能够抑制拉索的大幅振动。但是从图上也可以看出,在拉索振动发生后较短的时间内,其最大振动振幅依然很大,也就是说,阻尼不能有效减小拉索振动初期的最大振幅,因此有必要对斜拉索施加适当的外加阻尼来控制拉索的最大振动幅值。

### 5.3 本章小结

本章考虑了桥塔振动对拉索参数振动的影响,导出拉索—桥塔耦合作用下的振动微分方程组。通过对拉索—桥塔耦合体系的数值分析和参数讨论,得到了一些基本结论:

- (1) 当桥塔在外加荷载作用下,其横向振动频率为拉索横向振动频率的 2 倍时,即使桥塔振幅很小,也可能激发拉索产生大幅横向振动。
- (2) 拉索的横向振动和桥塔的横向振动具有耦合性,两者的振动具有“拍”的现象。
- (3) 拉索在作横向振动时,除了可能作主参数共振外,也可能作亚谐波共振,但频率比为 2 时的拉索中点振幅比频率比为 0.5、1 的拉索中点振幅大。
- (4) 拉索自身振动阻尼不能有效减小其振动初期的最大振幅。

## 第 6 章 桥塔-拉索-桥面耦合作用下的

### 斜拉索参数振动

#### 6.1 引言

对于斜拉桥拉索-桥面耦合参数振动,国内外学者在这方面做了大量的研究工作。对于拉索在端部位移激励下的参数振动的理论研究按激励形式的不同,主要分为两大类:一类是假设拉索受到的轴向激励为理想激励,按照理想系统建立拉索的分析模型,在这种模型中不考虑索-桥-塔相互作用,认为桥面和桥塔的质量远大于拉索;另一类是考虑拉索和桥面、桥塔之间的动力耦合作用,拉索所受激励的幅值和频率在响应过程中不断变化,按照非理想系统建立桥塔-拉索-桥面耦合振动分析模型。

现有的研究多侧重在拉索-桥面耦合振动分析模型方面。Michel Virlogeux 将索-主体结构耦合振动分解为沿轴向的参数振动和垂直于索轴向的强迫振动<sup>[6]</sup>,建立了索与主体结构相互作用的两质量模型。我国学者亢战和钟万颢、汪至刚和孙炳楠<sup>[10]</sup>、陈水生和孙炳楠<sup>[11]</sup>等分别提出了索-桥耦合振动模型,分析了拉索在轴向激励下的参数振动。但桥塔实际有一定的柔度,在风、雨等荷载下也会产生面内振动,王波<sup>[58]</sup>对桥塔-拉索耦合振动作了详细论述。如同上章论述,当桥塔或桥面振动频率约等于斜拉索横向振动固有频率的2倍时,拉索会产生参数共振,从而拉索在面内产生大幅振动。因此,考虑垂度的影响及桥面-拉索-桥塔耦合作用,准确地求出拉索的振动频率,是全面认识斜拉索参数振动行为的根本保证。

#### 6.2 桥塔-拉索-桥面耦合作用下的斜拉索参数振动

为了在桥塔-拉索-桥面耦合作用下研究斜拉索的参数振动的机理,把单根拉索振动问题简化为如图 6-1 所示的非线性振动系统,将桥塔、桥面简化为集中质量块。斜拉索悬挂于桥塔和桥面之间,并且考虑拉索的垂度效应。坐标系统如图 6-1 所示。

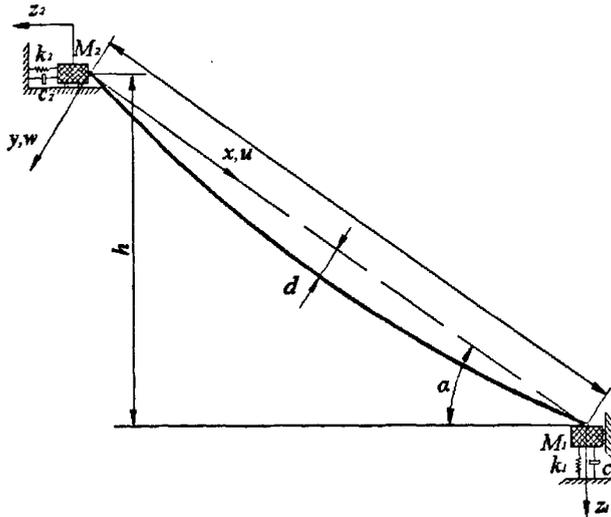


图 6-1 桥塔-拉索-桥面耦合振动模型

### 6. 2. 1 运动微分方程的推导

根据 3.2.1 节的推导得斜拉索横向振动微分方程:

$$\ddot{X} + 2\sigma\zeta \dot{X} + [a_1 + b(z_1 \sin \alpha + z_2 \cos \alpha)]X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4(z_1 \sin \alpha + z_2 \cos \alpha) = 0 \quad (6-1)$$

其中:

$$a_1 = \alpha_0^2 \left(1 + \frac{8d^2}{3L^2} - \frac{16d^2}{\beta^2 L^4}\right) + \left(\frac{1}{2}L + \frac{8d^2}{L}\right)\beta^2 g \sin \alpha + \frac{32d^2 EA}{mL^4}$$

$$= \sigma^2$$

$$a_2 = \frac{112\beta d EA}{9mL^3}$$

$$a_3 = \frac{\beta^4 EA}{8m}$$

$$a_4 = \frac{32d EA \sin \alpha}{\beta mL^4}$$

$$b = \frac{\beta^2 EA \sin \alpha}{mL}$$

$$\beta = \frac{\pi}{L}$$

$$\omega_0 = \pi \sqrt{\frac{T_0}{mL^2}}$$

建立桥面简化质量的运动微分方程为：

$$M_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 + k_1 z_1 + \frac{EA}{L} \sin \alpha \int_0^L \varepsilon dx = 0 \quad (6-2)$$

整理得：

$$\ddot{z}_1 + 2\omega_1 \zeta_1 \dot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 + a_5 X + a_6 X^2 = 0 \quad (6-3)$$

其中：

$$\zeta_1 = \frac{c_1}{2M_1}$$

$$a_5 = \frac{2EA mg \sin \alpha \cos \alpha}{\pi M_1 T}$$

$$a_6 = \frac{\pi^2 EA mg \sin \alpha}{4M_1 L^2}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{M_1} + \frac{EA}{\pi L} \sin^2 \alpha$$

建立桥塔简化质量的运动微分方程为：

$$M_2 \ddot{z}_2 + c_2 \dot{z}_2 + k_2 z_2 + \frac{EA}{L} \cos \alpha \int_0^L \varepsilon dx = 0 \quad (6-4)$$

整理得：

$$\ddot{z}_2 + 2\omega_2 \zeta_2 \dot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 + a_7 X + a_8 X^2 = 0 \quad (6-5)$$

其中：

$$\zeta_2 = \frac{c_2}{2M_2}$$

$$a_7 = \frac{2EA mg \cos^2 \alpha}{\pi M_2 T}$$

$$a_8 = \frac{\pi^2 EA mg \cos \alpha}{4M_2 L^2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{M_2} + \frac{EA}{\pi L} \sin \alpha \cos \alpha$$

令:  $X = x_1$ ,  $\dot{X} = x_2$ ,  $z_1 = x_3$ ,  $\dot{z}_1 = x_4$ ,  $z_2 = x_5$ ,  $\dot{z}_2 = x_6$ , 得桥塔-拉索-桥面耦合作用的动力学微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\sigma\zeta x_2 - [\sigma^2 + b(x_3 \sin \alpha + x_5 \cos \alpha)]x_1 \\ \quad - a_2 x_1^2 - a_3 x_1^3 - a_4 [x_3 \sin \alpha + x_5 \cos \alpha] \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2\omega_1 \zeta_1 x_4 - \omega_1^2 x_3 - a_5 x_1 - a_6 x_1^2 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -2\omega_2 \zeta_2 x_6 - \omega_2^2 x_5 - a_7 x_1 - a_8 x_1^2 \end{cases} \quad (6-6)$$

从式 (6-6) 可以看出桥塔、拉索、桥面的振动相互耦合, 由于桥面质量块  $M_1$  和桥塔质量块  $M_2$  的振动将引起拉索的索力产生周期性的变化。根据二阶非线性系统的内共振特性可知, 当索的固有振动频率  $\sigma$  接近于  $\omega_1$  或  $\omega_2$  的一半时, 桥面质量块  $M_1$  的竖向或桥塔质量块  $M_2$  横向振动将可能激发拉索横向的大幅振动。

### 6. 2. 2 桥塔-拉索-桥面耦合作用下的斜拉索参数振动数值分析

本小节不考虑桥塔、拉索、桥面振动阻尼的影响, 即  $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = 0$ 。  
一号拉索初始条件:  $x_1(0) = 0.0001$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.1$ ,  $x_4(0) = 0$ ,  
 $x_5(0) = 0.1$ ,  $x_6(0) = 0$ 。二号拉索初始条件:  $x_1(0) = 0.0001$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  
 $x_3(0) = 0.1$ ,  $x_4(0) = 0$ ,  $x_5(0) = 0.1$ ,  $x_6(0) = 0$ 。

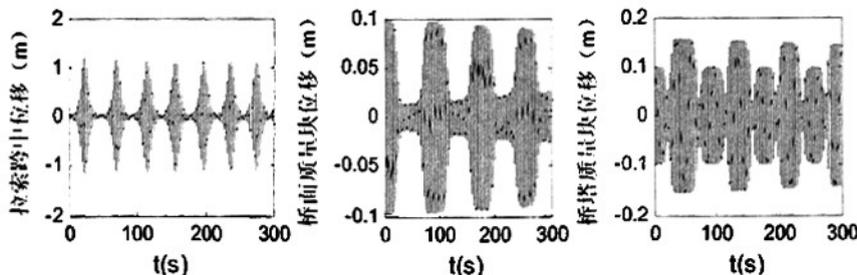
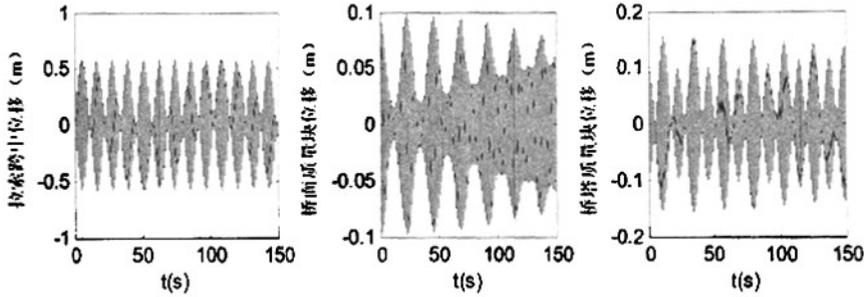
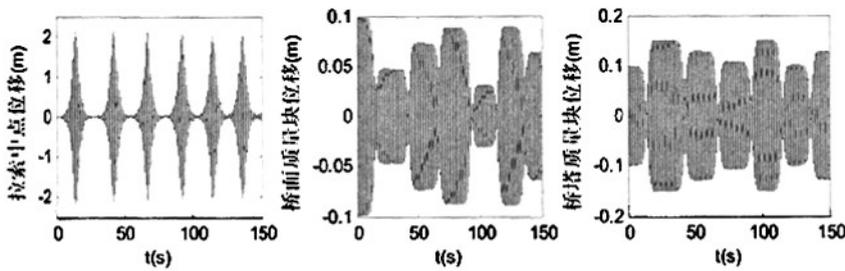
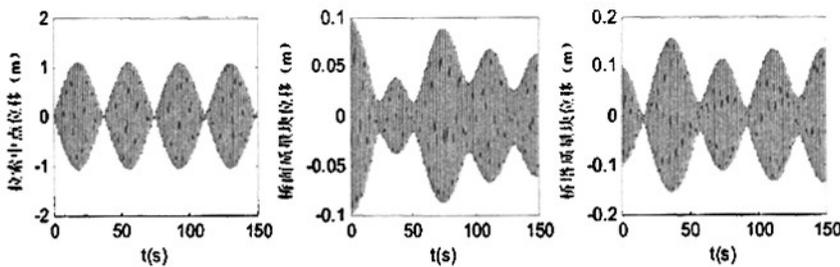


图 6-2 一号拉索 ( $\omega_1 = \omega_2 = 2\sigma$ )

图 6-3 一号拉索 ( $\omega_1 = \omega_2 = \sigma$ )图 6-4 二号拉索 ( $\omega_1 = \omega_2 = 2\sigma$ )图 6-5 二号拉索 ( $\omega_1 = \omega_2 = \sigma$ )

计算分析得：当  $\omega_1 = \omega_2 = 2\sigma$  时，一号拉索中点最大位移为 1.16m，二号拉索中点最大位移为 2.14m；当  $\omega_1 = \omega_2 = \sigma$  时，一号拉索中点最大位移为 0.59m，二号拉索中点最大位移为 1.10m；从上图可以看出，桥面的竖向振动和拉索的横向振动之间存在着强烈的耦合作用。拉索和桥面、桥塔的振动存在明显“拍”的现象，三者的振幅随时间变化而变化。三者能量总量不变，桥塔由于“吸取”了部分能量而振动。这样一来，就出现拉索中点最大位移均小于桥面-拉索耦合振动时拉索中点最大位移的情况。假设其余条件不变， $x_4(0)$  为变量，得两拉索中点最大位移如表 6-1 所示。

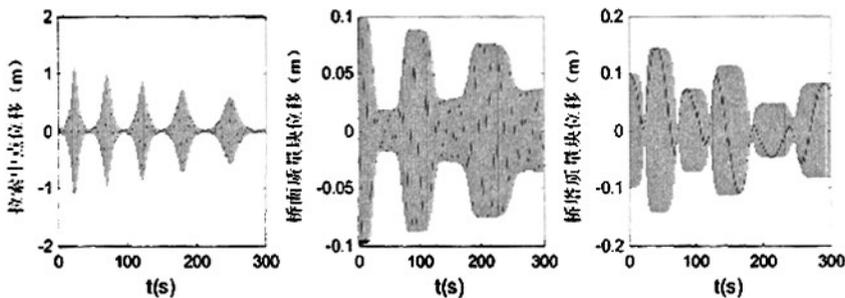
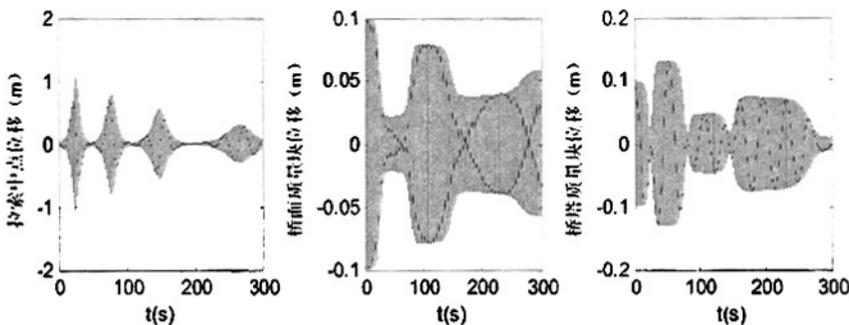
表 6-1 拉索中点最大位移

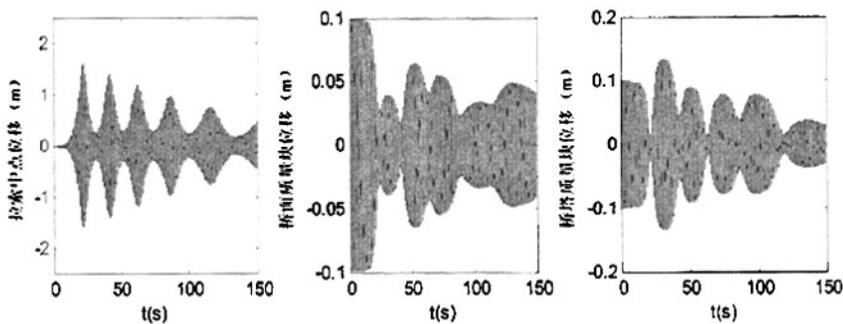
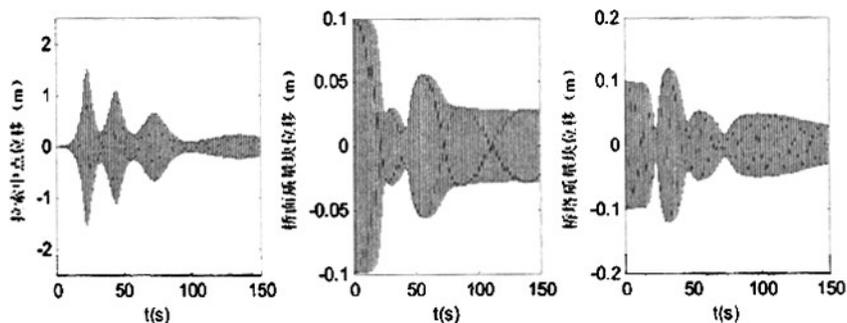
$x_4(0)$ (m)	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2
一号索(m)	0.55	0.71	0.86	1.01	1.16	1.33	1.48	1.63	1.78	1.93
二号索(m)	1.25	1.48	1.71	1.91	2.14	2.33	2.56	2.77	2.98	3.18

随着  $x_4(0)$  的增加, 拉索中点最大位移也随之增加。说明随着  $x_4(0)$  的增加, 当一号拉索  $x_4(0) \geq 0.08\text{m}$ , 二号拉索  $x_4(0) \geq 0.06\text{m}$  时, 桥塔由“吸取”能量到“贡献”能量, 使的拉索中点最大位移随之不断增加。

### 6. 2. 3 振动阻尼对斜拉索参数振动的影响分析

根据以上分析, 在理想情况下, 当  $\omega_1 = \omega_2 = 2\sigma$ , 桥塔初始位移大于一定值时, 拉索发生参数共振, 作横向的大幅振动。实际斜拉索结构都有一定的阻尼, 因此在作斜拉索振动分析时, 必须考虑结构振动阻尼的影响。如同 4.2.2 节, 设  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ , 对两拉索振动作数值计算分析如图 6-6~图 6-9 所示。

图 6-6 一号拉索( $\zeta = 0.1/100$ )图 6-7 一号拉索( $\zeta = 0.2/100$ )

图 6-8 二号拉索( $\zeta = 0.1/100$ )图 6-9 二号拉索( $\zeta = 0.2/100$ )图 6-3

从图 6-6~图 6-9, 可以看出, 在阻尼的作用下, 拉索的横向振动和桥塔横向、桥面竖向的振动都呈现逐渐减小的趋势。如果参数振动时间足够长的话, 结构阻尼能够抑制拉索的大幅振动。但是从上图也可以看出, 阻尼不能有效减小拉索振动初期的最大振幅, 因此有必要对斜拉索施加适当的外加阻尼来控制拉索的最大振动幅值。

### 6.3 斜拉桥拉索振动控制简介

从第 4 章、第 5 章可知, 在拉索振动发生后的初始阶段其振动最大振幅依然很大, 这说明结构自身固有振动阻尼不能有效减小拉索振动初期的最大振幅, 因此有必要对斜拉索施加适当的外加阻尼来控制拉索的最大振动幅值。

斜拉桥振动控制分被动控制、主动控制、半主动控制、混合控制四种,

#### 1. 斜拉索的被动控制

斜拉索被动减振措施主要有气动减振法、辅助索法和阻尼器法。

气动减振法主要从斜拉索在风雨天气里产生大幅振动的机理出发, 在拉索套管上增加突起、开设凹孔或凹槽、缠绕螺旋缀条等措施改变斜拉索的表

面形状,起到干扰水流、阻止连续水线形成的目的,从而保证斜拉索的气动稳定性,抑制风雨共振。日本的 Higachi-Kobe 桥、TataN 桥、Normandie 桥、南京长江二桥等采用了气动减振措施。但气动措施增加了风阻力,不易控制涡激共振、参数共振。

辅助索法就是通过单索互相连接组成有较高频率的索网,提高单根拉索的刚度,从而改变拉索的动力特性。

阻尼器法就是最常用的减振措施,通过在斜拉索锚固端附近安装阻尼器,使拉索系统的等效阻尼比得到提高,从而减少了索的振动能量。常用阻尼器有橡胶阻尼器、油阻尼器等,它们各有优缺点,橡胶阻尼器可提供的阻尼有限,需要和其他阻尼器共同使用;油阻尼器机械构造复杂,安装调节麻烦,且易发生漏油和渗油现象,维修费用较高。

南京长江二桥、日本 Tsurumi Tsubasa 桥等采用了油阻尼器。广东南海九江大桥、上海南浦大桥则采用了橡胶阻尼器。

## 2. 斜拉索主动控制

斜拉桥的主动控制有两种:模态控制和波控制。波控制可以避免模态控制中由于模态截断而存在信号溢出的问题。然而,波控制法的控制力要在索展向作用横向控制力,在力作用点会产生局部弯曲应力,这将导致拉索的疲劳问题,对这个问题的有效解决方法是对索支撑做主动控制。

## 3. 斜拉索半主动控制

由于斜拉索振动的被动控制和主动控制所存在的弱点,随着半主动 ER / MR 阻尼器的发展和其在土木工程中的应用,人们开始对斜拉索振动的半主动控制方法进行了研究。Spencer 等提出了采用 ER / MR 阻尼器进行斜拉索振动控制研究的设想和相应的面向速度剪切的半主动 LQR 算法,通过数值计算,证明在靠近斜拉索锚固端处安装阻尼器,并采用半主动控制算法能够获得远高于被动教性阻尼器的模态阻尼比。Lou 等给出了采用 MR 阻尼器做半主动控制的方法。Ni 等不但提出了斜拉索半主动控制 LQG 算法,还引入了神经网络的控制方法。

## 6. 4 本章小结

本章在前面章节的基础上考虑了桥塔、桥面振动对拉索参数振动的影响,导出桥塔-拉索-桥面耦合作用下的振动微分方程组,所导出的模型较前面章节的模型更接近实际情况,更具有工程实际价值。并且对斜拉索振动控制作

---

了简介。通过对桥塔-拉索-桥面耦合体系的数值分析和参数讨论，得到了一些基本结论：

(1) 当桥塔、桥面在外加荷载作用下，桥塔横向振动频率和桥面竖向振动频率约为拉索横向振动固有频率的 2 倍时，即使桥塔、桥面振幅很小，也可能激发拉索产生大幅横向振动。

(2) 拉索和桥面、桥塔的振动存在“拍”的现象，三者的振幅随时间变化而变化

(3) 拉索自身振动阻尼不能有效减小其振动初期的最大振幅，有必要对斜拉索施加适当的外加阻尼来控制拉索的最大振动幅值。

---

## 结 论

斜拉桥是一种桥面体系受压，支承体系受拉的桥梁，斜拉索是斜拉桥的主要受力构件。由于桥面和桥塔的振动，拉索的张拉力随着桥塔和桥面的振动发生周期性的改变，从而引起拉索产生横向振动。本文主要研究斜拉索的参数振动，讨论各种因素对拉索参数振动的影响。拉索的参数振动微分方程为非线性动力学方程，难以求解析解，本文采用龙格-库塔数值分析的方法，用 Matlab 高级程序语言编程计算来加以研究。得到以下结论：

1、在拉索端部施加竖向周期位移激励，当位移激励的频率与拉索横向自振频率之比约为 2 倍时，拉索发生参数共振，横向出现大幅振动。

2、拉索倾角减小，其最大响应值相应减小。斜拉索的垂度会使其参数振动幅值增大。

3、拉索的初始张拉力对参数振动的最大振幅有一定的影响。随着初始静拉力的增大，拉索中点最大正负位移趋于一个稳定值。

4、端部位移激励与拉索频率之比对斜拉索参数振动有较大影响，当频率比为 0.5、1 时，拉索出现亚谐波共振，但频率比为 2 时的拉索中点振幅比发生亚谐波共振时振幅大得多。

5、位移激励幅值明显影响了拉索振动时的瞬态响应幅值和稳态响应的幅值，随着激励幅值的不断增大，拉索的振幅也不断增大。

6、拉索的结构阻尼对其参数振动幅值有一定的抑制作用，其作用取决于阻尼的大小。当阻尼比较小时，阻尼只能略微减小拉索最大瞬态振幅，并不能有效抑制参数振动的发生。有必要对拉索施加适当的外加阻尼来控制拉索的最大振动幅值。

7、拉索和桥面、桥塔的振动存在“拍”的现象，三者的振幅随时间变化而变化。能量在桥塔、拉索、桥面之间传递。在阻尼作用下总能量逐渐减小。

进一步的工作：

1、本论文只考虑了几何非线性下的斜拉索参数振动，进一步研究可考虑材料非线性等其它非线性情况下的斜拉索参数振动。

2、考虑端部随机激励下的斜拉索参数振动。

3、风、雨荷载条件下的斜拉索参数振动研究。

4、地震条件下的斜拉索参数振动研究。

## 致 谢

首先要感谢导师葛玉梅教授在生活和学习上的关心。在论文的撰写过程得到葛玉梅教授的悉心指导。在论文的写作方面，葛老师给予了许多的指导，并且提供了非常好的学习条件，在生活上也关怀备至。在此，向葛老师致以由衷的感谢！

非常感谢土木工程学院的王福俊同学在资料收集及研究方法方面的宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

感谢力学与工程学院提供良好的学习环境，使我得以完成论文。最后特别感谢支持和帮助我的家人及朋友，正是由于她们的支持和鼓励，才有我今天的成绩。

---

## 参考文献

- [1] 王伯惠.斜拉桥结构发展和中国经验(上册).人民交通出版社.2003.9
- [2] MatSUMoto M, Shiraishi N, Shirato H.Rain-wind induced vibration of cable-stayed bridge[J]. J.wind Eng. and Ind. Aerody.1992, 41(44): 2011—2022
- [3] 李国豪.桥梁结构稳定与振动(修订版).中国铁道出版社.2003
- [4] 任淑琰.斜拉桥拉索参数振动研究.同济大学博士学位论文, 2007.
- [5] 李国平.斜拉索非线性分析的状态修正法.同济大学学报, 2000, 28(1):14
- [6] Tagata G.Harmonically forced,finite amplitude vibration of a string[J]. Journal of Sound and Vibration, 1977,51(4):483~492.
- [7] Lilien J L,A Pinto Da Costa.Vibration amplitudes caused by parametric excitation of cable stayed structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994,174(2):69~90.
- [8] Michel Virlogeux. Cable vibration in cable-stayed bridges[J]. Bridge Dynamics, 1998,127(3):213~233.
- [9] 亢战, 钟万勰.斜拉索参数共振问题的数值研究[[J].土木工程学报, 1998, 31(8):1422
- [10] 汪至刚.孙炳楠.斜拉桥参数振动引起的拉索大幅振动[[J].工程力学, 2001, (1):103 — 109
- [11] 陈水生, 孙炳楠, 胡隽.斜拉索受轴向激励引起的面内参数振动分析, 振动工程学报, 2002, 15(2):144-150
- [12] 陈水生.大跨度斜拉桥的振动及被动、半主动控制.浙江大学博士学位论文, 2002.
- [13] 陈勇, 孙炳楠, 楼文娟等.采用 ER 阻尼器作斜拉索半主动控制的试验研究[J].土木工程学报.2004, 37 (1): 50~55
- [14] Ko J M, Zheng G, et al.Experimental study on vibration mitigation of a stay cable using nonlinear hysteretic dampers[J].Advances in Structural Dynamics,Elsevier Science Ltd,Oxford,UK,2000, 2:1325~1332
- [15] 刘延柱, 陈立群.非线性振动.高等教育出版社.2001.8
- [16] 林元培.斜拉桥.人民交通出版社.2004.5

- 
- [17] 胡人礼.桥梁力学.中国铁道出版社.1999.7
- [18] 陈水生, 孙炳楠.斜拉桥索-桥耦合非线性参数振动数值研究.土木工程学报.2003, 36 (4): 70~75
- [19] R.A.Ibrah W .K.Chang. Stochastic excitation of suspended cables involving three simultaneous internal resonances using Monte Carlo simulation. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1999,168:285-304.
- [20] E.Caetano, A.Cunha, C.A.Taylor. Investigation of dynamic cable-deck interaction in a physical model of a cable-stayed bridge. Part 11: seismic response. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2000, 29: 499-521.
- [23] 宋一凡.公路桥梁动力学.人民交通出版社.1999
- [24] 汪至刚.孙炳楠.斜拉索的参数振动 [J]. 土木工程学报.2002, 35(5):28~33
- [25] 杨素哲, 陈艾荣.超常斜拉索的参数振动.同济大学学报[J].2005, 33(10): 1303~1308
- [26] 李忠献, 陈海泉, 李延涛.斜拉桥参数振动有限元分析与半主动控制.工程力学.[J].2004,21(1):131~135
- [27] 周岱, 柳杰, 郭军慧, 黄剑伟, 李华锋.轴向激励下斜拉索大幅振动分析.工程力学.[J].2007, 24 (3): 34~41
- [28] 魏建东, 杨佑发.辅助索制振效果的有限元分析.中国公路学报. [J].2000, 13 (4): 66~69
- [29] S.铁摩辛柯, D.H.杨, W.小韦孚著.胡人礼译.工程中的振动问题.人民铁道出版社.1978
- [30] 单圣尧, 李飞运, 陈洁余, 朱祖楞.悬索曲线理论及其应用.湖南科学技术出版社.1983.7
- [31] 倪振华.振动力学.西安交通大学出版社.1988
- [32] 曾庆元, 郭向荣.列车桥梁时变系统振动分析理论与应用.中国铁道出版社.1999.8
- [33] 高淑英, 沈火明.线性振动教程.中国铁道出版社.2003.9
- [34] 谭长建.斜拉索参数振动及斜拉桥有限元分析.西南交通大学硕士学位论文.2006
-

- 
- [35] 项海帆.现代桥梁抗风理论与实践.人民交通出版社.2005.11
- [31] 赵经文, 王宏钰.结构有限元分析(第二版).科学出版社.2005.6
- [36] 李强兴.斜拉索静力解.桥梁建设, 1986, (3):21 — 24
- [37] 沈之容, 马星等.多层纤绳桅杆结构的纤绳工作研究.特种结构, 2002, 19(3):51 — 53
- [38] 魏建东, 车惠民.斜拉索静力解及其应用.西南交通大学学报, 1998, 33(5):593 — 543
- [39] 赵跃宇.大跨径斜拉非线性动力学的模型与理论研究.湖南大学博士学位论文, 2000.10
- [40] 周纪卿, 主因远.非线性振动.西安交通大学出版社, 1998.
- [41] 刘金秋.斜拉桥施工过程中索力的确定及其影响因素.大连理工大学硕士学位论文, 2004.6
- [42] 孙利民等, 苏通长江公路大桥超长拉索的振动和减振研究, 同济大学桥梁工程系.
- [43] 刘士林, 梁智涛, 侯金龙, 孟凡超.斜拉桥.人民交通出版社, 2001
- [44] 梁鹏.超大跨度斜拉桥几何非线性及随机模拟分析.同济大学博士学位论文, 2004.7
- [45] 李寿英.斜拉桥拉索风雨激振机理及其控制理论研究.同济大学博士学位论文, 2005.6
- [46] 李树逊, 王雄民.桅杆结构中纤绳的参数振动.同济大学学报, 2000.6, 28(3):262 — 266
- [47] 马星, 李泽, 蒋涛, 谢寅龙.考虑纤绳振动桅杆结构的随机风振分析.同济大学学报, 1998.12, 26(6).631-635
- [48] 赵跃宇.大跨径斜拉非线性动力学的模型与理论研究.湖南大学博士学位论文, 2000.10
- [49] 章关永, 史家钧.杨浦大桥主桥自振特性测试与研究.汕头, 第十一届全国桥梁学术会议, 1994.577-582
- [50] 瞿伟廉.高层建筑结构的风振控制设计.武汉测绘科技大学出版社, 1991
- [51] 方同, 薛璞.振动理论及应用.西安:西北工业大学出版社, 1998
- [52] 黄安基.非线性振动.西南交通大学出版社.1993
- [53] 李富文, 伏魁先, 刘学信.钢桥.中国铁道出版社.2002
- [54] 高品贤.振动、冲击及噪声测试技术.西南交通大学出版社.1992
- [56] 邬华, 陈勇.磁流变阻尼器对斜拉索的振动控制.科学出版社.2007
-

- 
- [57] 王福俊. 斜拉索参数振动及计算机仿真分析. 西南交通大学硕士学位论文.2007
- [58] 王波.斜拉桥索塔参数共振的数值研究.暨南大学硕士学位论文.2006
- [59] Yamaguchi H, Fujino Y.Stayed cable dynamics and its vibration control.In: Larsen A, Eisdahl S, editors.Bridge aerodynamics, Rotterdam:Balkema; 1998: 235-53.
-

## 攻读学位期间发表论文及参与的科研工作

### 1、攻读学位期间发表论文

[1]李东, 葛玉梅。塔-索-桥耦合下的斜拉索参数振动研究。西南交通大学学报(增刊)

### 2、攻读学位期间参与的科研工作

[1]斜拉桥拉索参数振动研究。2008.1~2008.10

---