

## 胡寿松自动控制原理课后习题答案

1 请解释下列名字术语：自动控制系统、受控对象、扰动、给定值、参考输入、反馈。

解：自动控制系统：能够实现自动控制任务的系统，由控制装置与被控对象组成；

受控对象：要求实现自动控制的机器、设备或生产过程

扰动：扰动是一种对系统的输出产生不利影响的信号。如果扰动产生在系统内部称为内扰；扰动产生在系统外部，则称为外扰。外扰是系统的输入量。

给定值：受控对象的物理量在控制系统中应保持的期望值

参考输入即为给定值。

反馈：将系统的输出量馈送到参考输入端，并与参考输入进行比较的过程。

2 请说明自动控制系统的基本组成部分。

解：作为一个完整的控制系统，应该由如下几个部分组成：

- ① 被控对象： 所谓被控对象就是整个控制系统的控制对象；
- ② 执行部件： 根据所接收到的相关信号，使得被控对象产生相应的动作；常用的执行元件有阀、电动机、液压马达等。
- ③ 给定元件： 给定元件的职能就是给出与期望的被控量相对应的系统输入量（即参考量）；
- ④ 比较元件： 把测量元件检测到的被控量的实际值与给定元件给出的参考值进行比较，求出它们之间的偏差。常用的比较元件有差动放大器、机械差动装置和电桥等。
- ⑤ 测量反馈元件： 该元部件的职能就是测量被控制的物理量，如果这个物理量

是非电量，一般需要将其转换为电量。常用的测量元部件有测速发电机、热电偶、各种传感器等；

⑥ 放大元件： 将比较元件给出的偏差进行放大，用来推动执行元件去控制被控对象。如电压偏差信号，可用电子管、晶体管、集成电路、晶闸管等组成的电压放大器和功率放大级加以放大。

⑦ 校正元件： 亦称补偿元件，它是结构或参数便于调整的元件，用串联或反馈的方式连接在系统中，用以改善系统的性能。常用的校正元件有电阻、电容组成的无源或有源网络，它们与原系统串联或与原系统构成一个内反馈系统。

3 请说出什么是反馈控制系统，开环控制系统和闭环控制系统各有什么优缺点？

解：反馈控制系统即闭环控制系统，在一个控制系统，将系统的输出量通过某测量机构对其进行实时测量，并将该测量值与输入量进行比较，形成一个反馈通道，从而形成一个封闭的控制系统；

开环系统优点：结构简单，缺点：控制的精度较差；

闭环控制系统优点：控制精度高，缺点：结构复杂、设计分析麻烦，制造成本高。

4 请说明自动控制系统的基本性能要求。

解：（1）稳定性：对恒值系统而言，要求当系统受到扰动后，经过一定时间的调整能够回到原来的期望值。而对随动系统而言，被控制量始终跟踪参考量的变化。稳定性通常由系统的结构决定的，与外界因素无关，系统的稳定性是对系统的基本要求，不稳定的系统不能实现预定任务。

(2) 准确性：控制系统的准确性一般用稳态误差来表示。即系统在参考输入信号作用下，系统的输出达到稳态后的输出与参考输入所要求的期望输出之差叫做给定稳态误差。显然，这种误差越小，表示系统的输出跟随参考输入的精度越高。

(3) 快速性：对过渡过程的形式和快慢的要求，一般称为控制系统的动态性能。系统的快速性主要反映系统对输入信号的变化而作出相应的快慢程度，如稳定高射炮射角随动系统，虽然炮身最终能跟踪目标，但如果目标变动迅速，而炮身行动迟缓，仍然抓不住目标。

2-1 设质量-弹簧-摩擦系统如图 2-1 所示，图中  $f$  为黏性摩擦系数， $k$  为弹簧系数，系统的输入量为力  $p(t)$ ，系统的输出量为质量  $m$  的位移  $x(t)$ 。试列出系统的

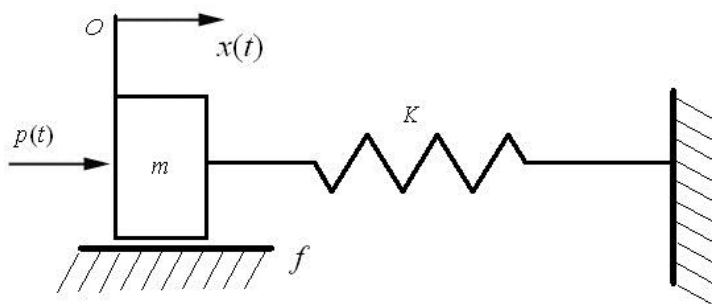


图 2-1 习题 2-1 质量-弹簧-摩擦系统示意图

输入输出微分方程。

解：显然，系统的摩擦力为  $f \frac{dx(t)}{dt}$ ，弹簧力为  $kx(t)$ ，根据牛顿第二运动定律有

$$p(t) - f \frac{dx(t)}{dt} - kx(t) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

移项整理，得系统的微分方程为

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = p(t)$$

2-2 试列写图 2-2 所示机械系统的运动微分方程。

解：由牛顿第二运动定律，不计重力时，得

$$k_2[y_2(t) - y_1(t)] + M_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = k_1 y_1 - f \frac{dy_1}{dt} + F$$

整理得

$$M_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + f \frac{dy_1}{dt} - (k_1 + k_2)y_1(t) = F - k_2 y_2(t)$$

2-3 求下列函数的拉氏变换。

(1)  $f(t) = 3(1 - \sin t)$

(2)  $f(t) = te^{at}$

(3)  $f(t) = \cos(3t - \frac{\pi}{4})$

解：(1)  $L[f(t)] = L[3(1 - \sin t)]$

$$\begin{aligned} &= 3(L[1] - L[\sin t]) \\ &= 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 + 1}\right) \\ &= \frac{3(s^2 - s + 1)}{s(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

(2)  $f(t) = te^{at}$

$$L[t] = \frac{1}{s^2}$$

$$L[f(t)] = L[te^{at}] = \frac{1}{(s - a)^2}$$

(3)  $f(t) = \cos(3t - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\sin(3t) + \cos(3t)]$

$$L[f(t)] = \frac{\sqrt{2}}{2}[\sin(3t) + \cos(3t)]$$

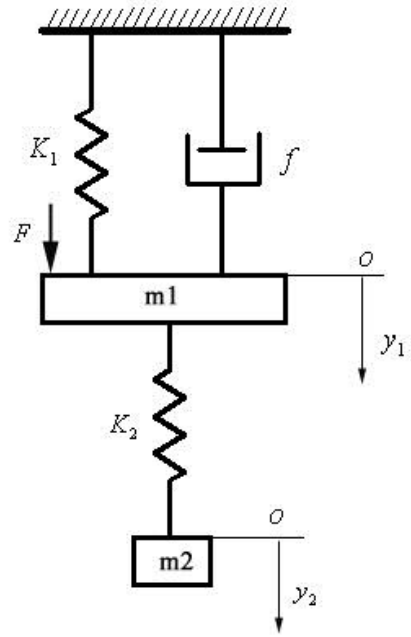


图 2-2 习题 2-2 机械系统示意图

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2} (L[\sin(3t)] + L[\cos(3t)]) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{3}{s^2+9} + \frac{s}{s^2+9} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{s+3}{s^2+9}
\end{aligned}$$

2-4 求下列函数的拉氏反变换

$$(1) F(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+5)}$$

$$(2) F(s) = \frac{s-6}{s^2(s+3)}$$

$$(3) F(s) = \frac{2s^2-5s+1}{s(s^2+1)}$$

解: (1)  $F(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+5)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+5}$

$$\begin{aligned}
L^{-1}[F(s)] &= L^{-1}\left[\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+5}\right] \\
&= -L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{2}{s+5}\right] \\
&= -e^{-2t} + 2e^{-5t}
\end{aligned}$$

$$(2) F(s) = \frac{s-6}{s^2(s+3)} = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+3}$$

$$\begin{aligned}
L^{-1}[F(s)] &= L^{-1}\left[\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+3}\right] \\
&= 2L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] \\
&= 2t + 1 - e^{-3t}
\end{aligned}$$

$$(3) F(s) = \frac{2s^2-5s+1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{s-5}{s^2+1}$$

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{s-5}{s^2+1}\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{s-5}{s^2+1}\right] \\
 &= 1 + \cos t - 5 \sin t
 \end{aligned}$$

2-5 试分别列写图 2-3 中各无源网络的微分方程（设电容  $C$  上的电压为  $u_c(t)$ ，电容  $C_1$  上的电压为  $u_{c1}(t)$ ，以此类推）。

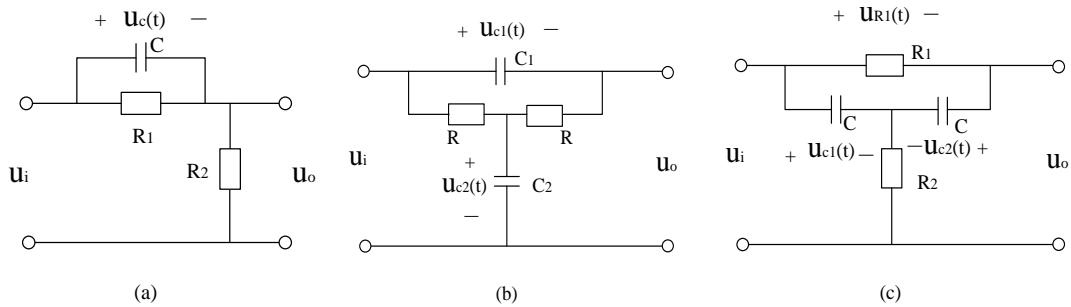


图 2-3 习题 2-5 无源网络示意图

解：(a) 设电容  $C$  上电压为  $u_c(t)$ ，由基尔霍夫定律可写出回路方程为

$$\begin{aligned}
 u_c(t) &= u_i(t) - u_o(t) \\
 C \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{R_1} &= \frac{u_o(t)}{R_2}
 \end{aligned}$$

整理得输入输出关系的微分方程为

$$C \frac{du_o(t)}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_o(t) = C \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{u_i(t)}{R_1}$$

(b) 设电容  $C_1$ 、 $C_2$  上电压为  $u_{c1}(t)$ 、 $u_{c2}(t)$ ，由基尔霍夫定律可写出回路方程

为

$$\begin{aligned}
 u_{c1}(t) &= u_i(t) - u_o(t) \\
 \frac{u_i(t) - u_{c2}(t)}{R} + \frac{u_o(t) - u_{c2}(t)}{R} &= C_2 \frac{du_{c2}(t)}{dt} \\
 u_o(t) - u_{c2}(t) &= RC_1 \frac{du_{c1}(t)}{dt}
 \end{aligned}$$

整理得输入输出关系的微分方程为

$$RC_1C_2 \frac{d^2u_o(t)}{dt^2} + (2C_1 + C_2) \frac{du_o(t)}{dt} + \frac{u_o(t)}{R} = RC_1C_2 \frac{d^2u_i(t)}{dt^2} + 2C_1 \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{u_i(t)}{R}$$

(c) 设电阻  $R_2$  上电压为  $u_{R2}(t)$ ，两电容上电压为  $u_{c1}(t), u_{c2}(t)$ ，由基尔霍夫定律可写出回路方程为

$$u_{c1}(t) = u_i(t) - u_{R2}(t) \quad (1)$$

$$u_{c2}(t) = u_o(t) - u_{R2}(t) \quad (2)$$

$$C \frac{du_{c1}(t)}{dt} + C \frac{du_{c2}(t)}{dt} = \frac{u_{R2}(t)}{R_2} \quad (3)$$

$$\frac{u_i(t) - u_o(t)}{R_1} = C \frac{du_{c2}(t)}{dt} \quad (4)$$

(2) 代入 (4) 并整理得

$$\frac{du_{R2}(t)}{dt} = \frac{du_o(t)}{dt} - \frac{u_i(t) - u_o(t)}{R_1 C} \quad (5)$$

(1)、(2) 代入 (3) 并整理得

$$C \frac{du_i(t)}{dt} + C \frac{du_o(t)}{dt} - 2C \frac{du_{R2}(t)}{dt} = \frac{u_{R2}(t)}{R_2}$$

两端取微分，并将 (5) 代入，整理得输入输出关系的微分方程为

$$R_2 C \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1 C} + 1 \right) \frac{du_o(t)}{dt} + \frac{u_o(t)}{R_1 C} = R_2 C \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_1 C} \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{u_i(t)}{R_1 C}$$

2-6 求图 2-4 中各无源网络的传递函数。

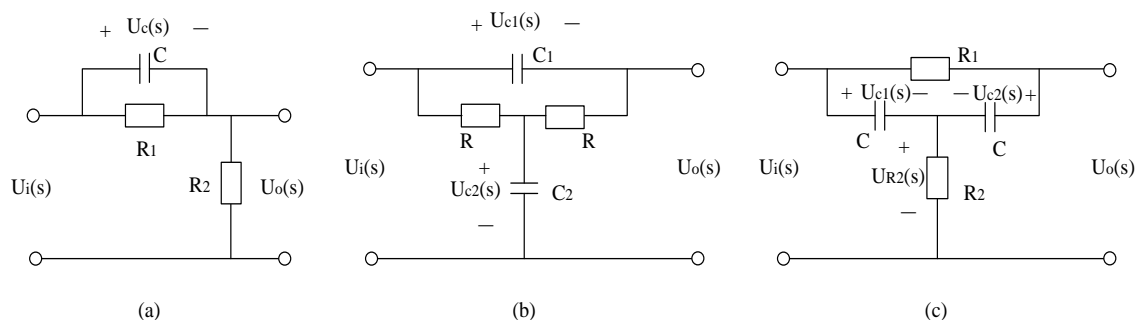


图 2-4 习题 2-6 示意图

解：(a) 由图得

$$CsU_c(s) + \frac{U_c(s)}{R_1} = \frac{U_o(s)}{R_2} \quad (1)$$

$$U_c(s) = U_i(s) - U_o(s) \quad (2)$$

(2) 代入 (1)，整理得传递函数为

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Cs + \frac{1}{R_1}}{Cs + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2Cs + R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

(b) 由图得

$$U_{C1}(s) = U_i(s) - U_o(s) \quad (1)$$

$$\frac{U_i(s) - U_{C2}(s)}{R} + \frac{U_o(s) - U_{C2}(s)}{R} = C_2sU_{C2}(s) \quad (2)$$

$$RC_1sU_{C1}(s) = U_o(s) - U_{C2}(s)$$

整理得传递函数为

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{RC_1s + \frac{1}{RC_2s + 2}}{RC_1s + \frac{RC_2s + 1}{RC_2s + 2}} = \frac{R^2C_1C_2s^2 + 2RC_1s + 1}{R^2C_1C_2s^2 + Rs(2C_1 + C_2) + 1}$$

(c) 由图得

$$U_{C1}(s) = U_i(s) - U_{R2}(s) \quad (1)$$

$$U_{C2}(s) = U_o(s) - U_{R2}(s) \quad (2)$$

$$CsU_{C1}(s) + CsU_{C2}(s) = \frac{U_{R2}(s)}{R_2} \quad (3)$$

$$\frac{U_i(s) - U_o(s)}{R_1} = CsU_{C2}(s) \quad (4)$$

整理得传递函数为



$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{Cs + \frac{1}{R_2}}{Cs + \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 Cs}} = \frac{R_1 R_2 C^2 s^2 + R_1 Cs}{R_1 R_2 C^2 s^2 + (R_1 + 2R_2)Cs + 1}$$

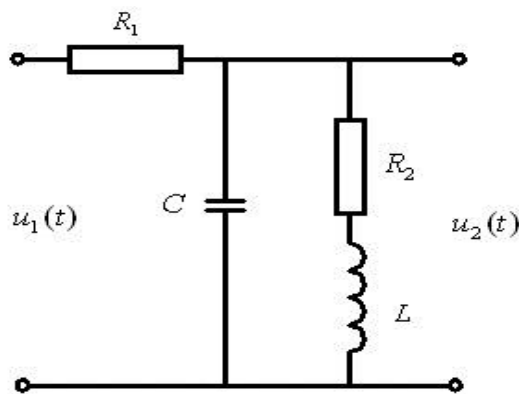


图 2-5 习题 2-7 无源网络示意图

2-7 求图 2-5 中无源网络的传递函数。

解：由图得

$$\frac{U_1(s) - U_2(s)}{R_1} = (Cs + \frac{1}{R_2 + Ls})U_2(s)$$

整理得

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_1}}{Cs + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + Ls}} = \frac{R_2 + Ls}{R_1 CLs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 + R_2}$$

2-8 试简化图 2-6 中所示系统结构图，并求传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $C(s)/N(s)$ 。

解：(a)

(1)求传递函数  $C(s)/R(s)$ ，按下列步骤简化结构图：

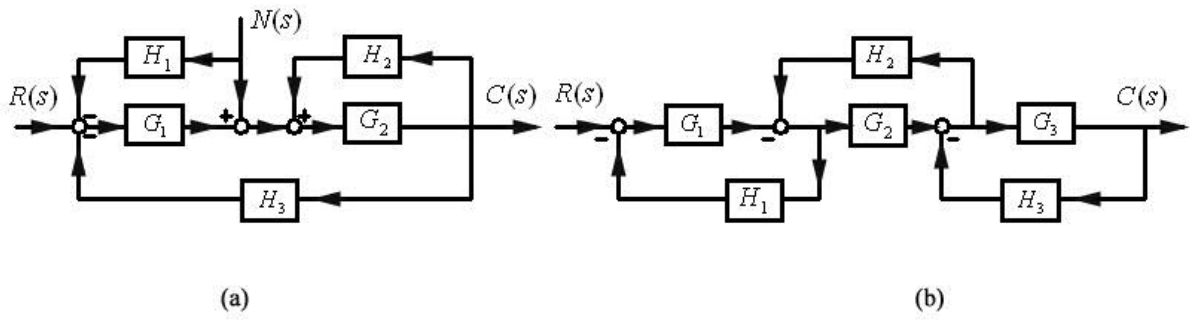


图 2-6 习题 2-8 系统结构图示意图

① 令  $N(s) = 0$ ，利用反馈运算简化如图 2-8a 所示

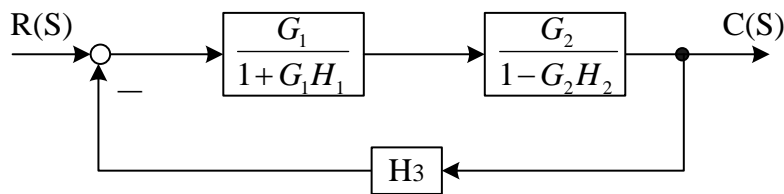


图 2-8a

② 串联等效如图 2-8b 所示

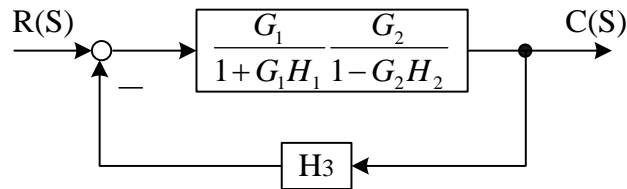


图 2-8b

③ 根据反馈运算可得传递函数

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{G_1}{1+G_1H_1} \frac{G_2}{1-G_2H_2}}{1 - \frac{G_1}{1+G_1H_1} \frac{G_2}{1-G_2H_2} H_3} = \frac{G_1G_2}{(1+G_1H_1)(1-G_2H_2) + G_1G_2H_3} \\ &= \frac{G_1G_2}{1+G_1H_1 - G_2H_2 - G_1H_1G_2H_2 + G_1G_2H_3} \end{aligned}$$

(2) 求传递函数  $C(s)/N(s)$ ，按下列步骤简化结构图：

①令  $R(s) = 0$ ，重画系统结构图如图 2-8c 所示

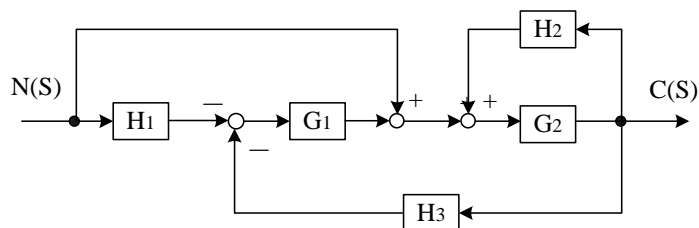


图 2-8c

② 将  $H_3$  输出端的端子前移，并将反馈运算合并如图 2-8d 所示

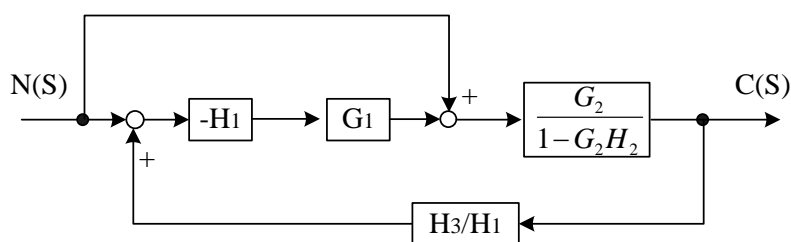


图 2-9d

③  $G_1$  和  $-H_1$  串联合并，并将单位比较点前移如图 2-8e 所示

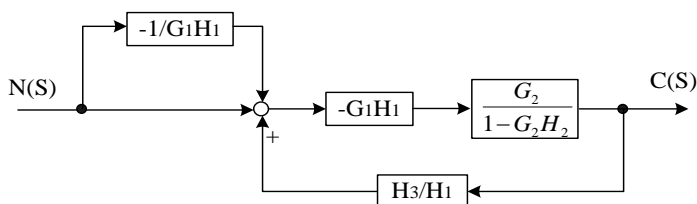


图 2-8e

④ 串并联合并如图 2-8f 所示

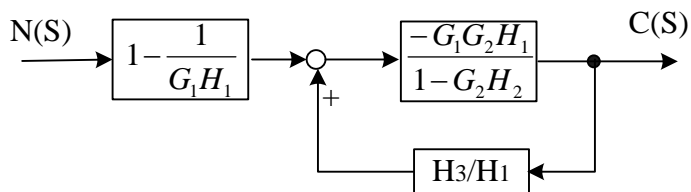


图 2-8f

⑤ 根据反馈和串联运算，得传递函数

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{N(s)} &= \left(1 - \frac{1}{G_1 H_1}\right) \cdot \frac{\frac{-G_1 G_2 H_1}{1 - G_2 H_2}}{1 - \frac{-G_1 G_2 H_1 H_3}{1 - G_2 H_2} \frac{1}{H_1}} \\ &= \frac{G_1 H_1 - 1}{G_1 H_1} \cdot \frac{-G_1 G_2 H_1}{1 - G_2 H_2 + G_1 G_2 H_3} \\ &= \frac{G_2 - G_1 G_2 H_1}{1 - G_2 H_2 + G_1 G_2 H_3} \end{aligned}$$

(b) 求传递函数  $C(s)/R(s)$ ，按下列步骤简化结构图：

① 将  $H_2$  的引出端前移如图 2-8g 所示

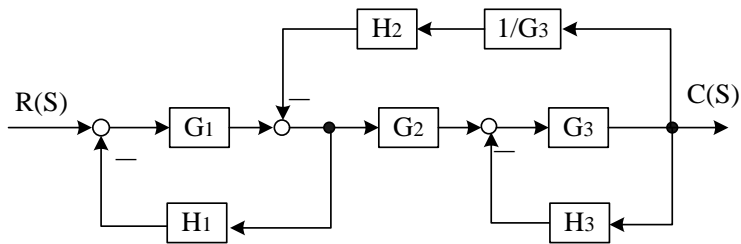


图 2-8g

② 合并反馈、串联如图 2-8h 所示

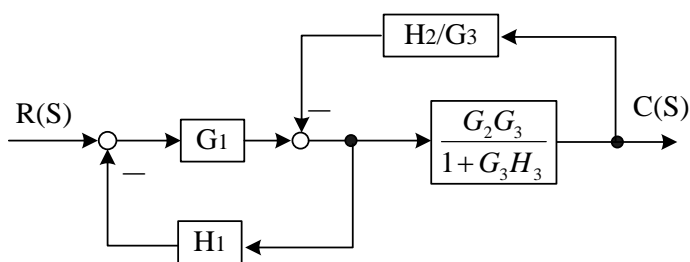


图 2-8h

③ 将  $H_1$  的引出端前移如图 2-8i 所示

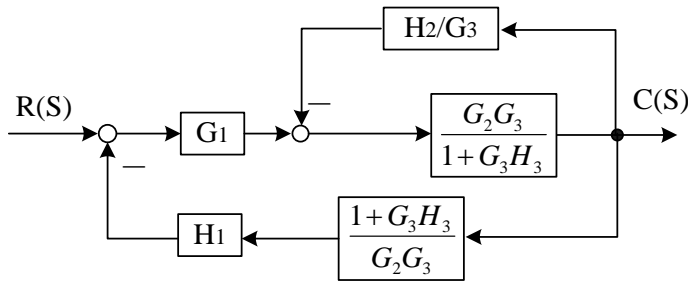


图 2-8i

④ 合并反馈及串联如图 2-8j 所示

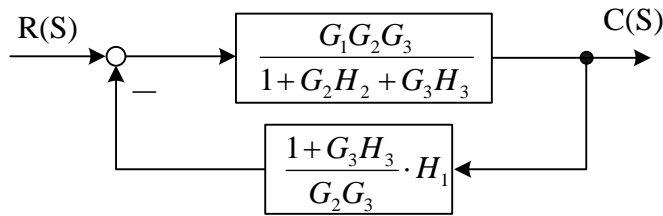


图 2-8j

⑤ 根据反馈运算得传递函数

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_3 H_3}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_3 H_3} \cdot \frac{1 + G_3 H_3}{G_2 G_3} \cdot H_1} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 H + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 H_1 G_3 H_3} \end{aligned}$$

2-9 试简化图 2-7 中所示系统结构图，并求传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

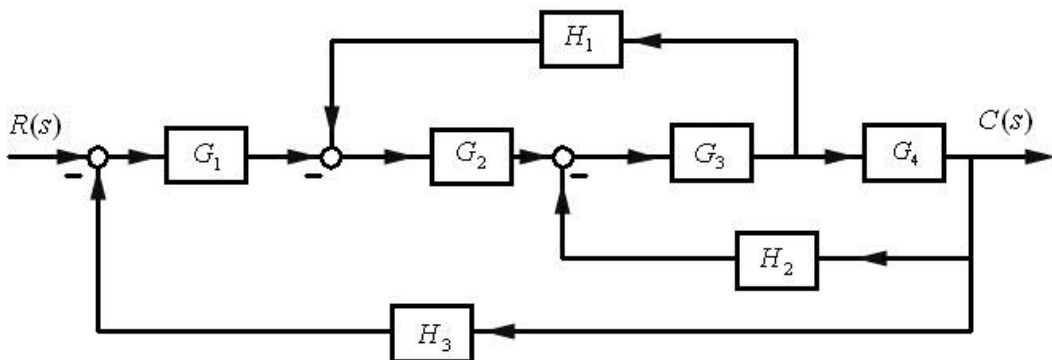


图 2-7 习题 2-9 系统结构图示意图

解：求传递函数  $C(s)/R(s)$ ，按下列步骤简化结构图：

① 将  $H_1$  的引出端前移如图 2-9a 所示

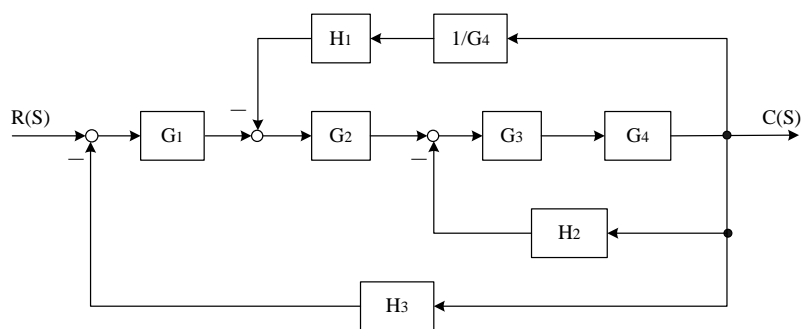


图 2-9a

② 合并反馈及串联如图 2-9b 所示

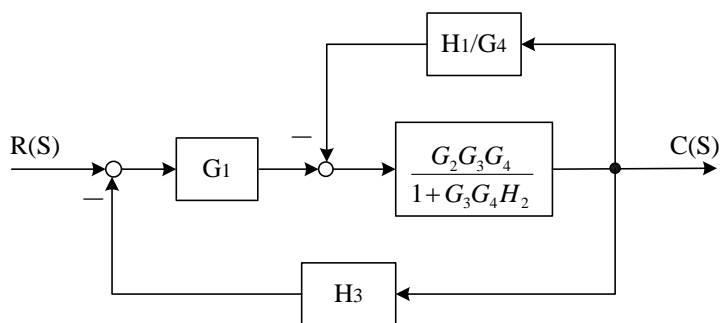


图 2-9b

③ 合并反馈、串联如图 2-9c 所示

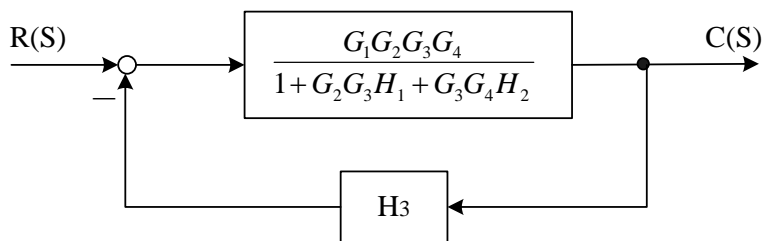


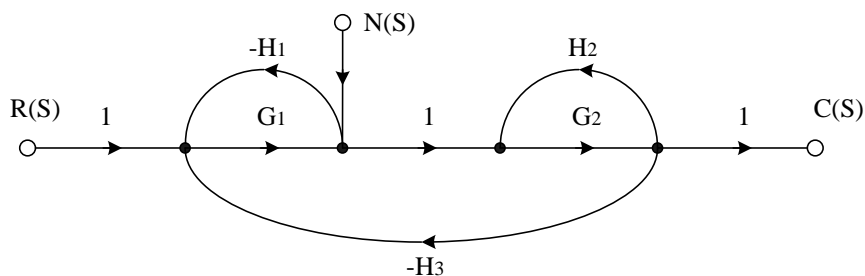
图 2-9c

④ 根据反馈运算，得传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_2}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_2} \cdot H_3} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3}$$

2-10 根据图 2-6 给出的系统结构图，画出该系统的信号流图，并用梅森公式求系统传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $C(s)/N(s)$ 。

解：(a) 根据结构图与信号流图的对应关系，用节点代替结构图中信号线上传递的信号，用标有传递函数的之路代替结构图中的方框，可以绘出系统对应的信号流图。如图 2-10a 所示。



(1) 令  $N(s) = 0$ ，求系统传递函数  $C(s)/R(s)$

由信号流图 2-10a 可见，从源节点  $R(s)$  到阱节点  $C(s)$  之间，有一条前向通路，其增益为

$$p_1 = G_1 G_2$$

有三个相互接触的单回路，其回路增益分别为

$$L_1 = -G_1 H_1, \quad L_2 = G_2 H_2, \quad L_3 = -G_1 G_2 H_3$$

$L_1$  与  $L_2$  互不接触

$$L_{12} = -G_1 H_1 G_2 H_2$$

流图特征式

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_{12} = 1 + G_1H_1 - G_2H_2 + G_1G_2H_3 - G_1G_2H_1H_2$$

由于前向通路与所有单独回路都接触，所以余因子式

$$\Delta_1 = 1$$

根据梅森增益公式，得系统闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2}{1 + G_1H_1 - G_2H_2 + G_1G_2H_3 - G_1G_2H_1H_2}$$

(2) 令  $R(s) = 0$ ，求系统传递函数  $C(s)/N(s)$

由信号流图 2-10a 可见，从源节点  $N(s)$  到阱节点  $C(s)$  之间，有两条前向通路，其增益为

$$p_1 = G_2, \quad p_2 = -G_1G_2H_1$$

有两个相互接触的单回路，其回路增益分别为

$$L_1 = G_2H_2, \quad L_2 = -G_1G_2H_3$$

没有互不接触的回路，所以流图特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - G_2H_2 + G_1G_2H_3$$

由于前向通路与所有单独回路都接触，所以余因子式

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1$$

根据梅森增益公式，得系统闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 p_i\Delta_i = \frac{G_2 - G_1G_2H_1}{1 - G_2H_2 + G_1G_2H_3}$$

(b) 根据结构图与信号流图的对应关系，用节点代替结构图中信号线上传递的信号，用标有传递函数的之路代替结构图中的方框，可以绘出系统对应的信号流图。如图 2-10b 所示。



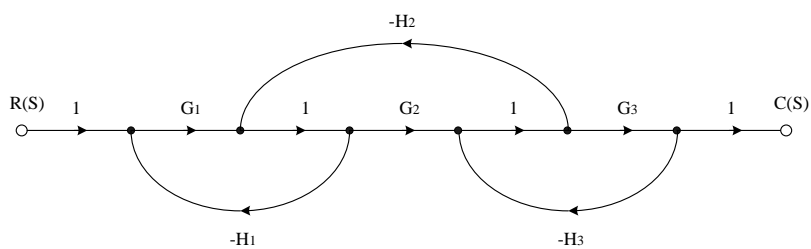


图 2-10b

求系统传递函数  $C(s)/R(s)$

由信号流图 2-10b 可见，从源节点  $R(s)$  到阱节点  $C(s)$  之间，有一条前向通路，其增益为

$$p_1 = G_1 G_2 G_3$$

有三个相互接触的单独回路，其回路增益分别为

$$L_1 = -G_1 H_1, \quad L_2 = -G_2 H_2, \quad L_3 = -G_3 H_3$$

$L_1$  与  $L_3$  互不接触

$$L_{13} = G_1 G_3 H_1 H_3$$

流图特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_{13} = 1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_3 H_1 H_3$$

由于前向通路与所有单独回路都接触，所以余因子式

$$\Delta_1 = 1$$

根据梅森增益公式，得系统闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_3 H_1 H_3}$$

2-11 根据图 2-7 给出的系统结构图，画出该系统的信号流图，并用梅森公式求

系统传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

解：根据结构图与信号流图的对应关系，用节点代替结构图中信号线上传递的信号，用标有传递函数的之路代替结构图中的方框，可以绘出系统对应的信号流图。

如图 2-11a 所示

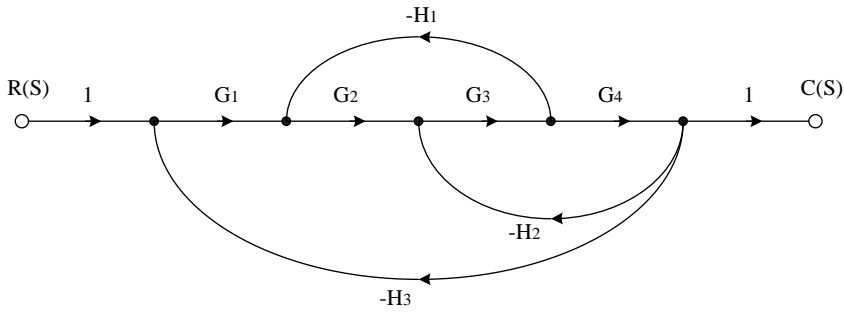


图 2-11a

由信号流图 2-11a 可见，从源节点  $R(s)$  到阱节点  $C(s)$  之间，有一条前向通路，其增益为

$$p_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$$

有三个相互接触的单独回路，其回路增益分别为

$$L_1 = -G_2 G_3 H_1, \quad L_2 = -G_3 G_4 H_2, \quad L_3 = -G_1 G_2 G_3 G_4 H_3$$

没有互不接触回路。因此，流图特征式

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 + G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3$$

由于前向通路与所有单独回路都接触，所以余因子式

$$\Delta_1 = 1$$

根据梅森增益公式，得系统闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3}$$

3-2 设系统的微分方程式如下:

$$(1) \quad 0.2\dot{c}(t) = 2r(t)$$

$$(2) \quad 0.04\ddot{c}(t) + 0.24\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$$

试求系统的单位脉冲响应  $k(t)$  和单位阶跃响应  $h(t)$ 。已知全部初值为零:

$$(1) \quad \text{因为 } 0.2sC(s) = 2R(s)$$

$$\text{单位脉冲响应: } C(s) = 10/s \quad k(t) = 10 \quad t \geq 0$$

$$\text{单位阶跃响应 } h(t) \quad C(s) = 10/s^2 \quad h(t) = 10t \quad t \geq 0$$

$$(2) \quad (0.04s^2 + 0.24s + 1)C(s) = R(s) \quad C(s) = \frac{R(s)}{0.04s^2 + 0.24s + 1}$$

$$\text{单位脉冲响应: } C(s) = \frac{1}{0.04s^2 + 0.24s + 1} \quad k(t) = \frac{25}{3}e^{-3t} \sin 4t$$

$$\text{单位阶跃响应 } h(t) \quad C(s) = \frac{25}{s[(s+3)^2 + 16]} = \frac{1}{s} - \frac{s+6}{(s+3)^2 + 16}$$

$$h(t) = 1 - e^{-3t} \cos 4t - \frac{3}{4}e^{-3t} \sin 4t$$

3-2 已知各系统的脉冲响应, 试求系统的闭环传递函数:

$$(1) \quad k(t) = 0.0125e^{-1.25t};$$

$$(2) \quad k(t) = 5t + 10\sin(4t + 45^\circ);$$

$$(3) \quad k(t) = 0.1(1 - e^{-t/3}).$$

解:

$$(1) \quad \Phi(s) = L[k(t)] = \frac{0.0125}{s+1.25}$$

$$(2) \quad \Phi(s) = L[k(t)] = L\left[5t + \frac{10}{\sqrt{2}}(\sin 4t + \cos 4t)\right]$$

$$= \frac{5}{s^2} + 5\sqrt{2}\left(\frac{4}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$= \frac{5(\frac{\sqrt{2}}{16}s^3 + \frac{1+4\sqrt{2}}{16}s^2 + 1)}{s^2(\frac{s^2}{16} + 1)}$$

$$(3) \Phi(s) = L[k(t)] = 0.1[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{3}}] = \frac{1}{10s(3s+1)}$$

3-3 已知二阶系统的单位阶跃响应为  $h(t) = 10 - 12.5e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$ ，试求系统的超调量  $\sigma\%$ ，峰值时间  $t_p$  和调节时间  $t_s$ 。

解：

$$h(t) = 10 - 12.5e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$$

$$= 10[1 - 1.25e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)]$$

由上式可知，此二阶系统的放大系数是 10，但放大系数并不影响系统的动态性能指标。

由于标准的二阶系统单位阶跃响应表达式为

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \beta)$$

$$\text{所以有 } \begin{cases} \zeta\omega_n = 1.2 \\ 1/\sqrt{1-\zeta^2} = 1.25 \\ \omega_n/\sqrt{1-\zeta^2} = 1.6 \end{cases}$$

$$\text{解上述方程组，得 } \begin{cases} \zeta = 0.6 \\ \omega_n = 2 \end{cases}$$

所以，此系统为欠阻尼二阶系统，其动态性能指标如下

$$\text{超调量 } \sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = e^{-0.6/\sqrt{1-0.6^2}} \times 100\% = 9\%$$

$$\text{峰值时间 } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{2 \times 0.8} \approx 1.96s$$

$$\text{调节时间 } t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5}{2 \times 0.6} = 2.92$$

3-4 设单位负反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}$ ，试求系统在单位阶

跃输入下的动态性能。

解题过程：

由题意可得系统得闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{0.4s+1}{s^2+s+1} = \frac{\omega_n^2}{a} \frac{s+a}{s^2+2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中  $a=2, \omega_n=1, \zeta_d = \zeta + \frac{\omega_n}{2z} = 0.5, z=2.5$ 。这是一个比例-微分控制二阶系统。

比例-微分控制二阶系统的单位阶跃响应为

$$h(t) = 1 + r e^{-\zeta_d \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta_d^2} t + \phi)$$

故显然有 
$$r = \frac{\sqrt{z^2 - 2\zeta_d \omega_n + \omega_n^2}}{z\sqrt{1-\zeta_d^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\phi = -\pi + \arctan\left(\frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta_d^2}}{z - \zeta_d \omega_n}\right) + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d} = -1.686$$

$$\beta_d = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d} = \frac{\pi}{3} = 1.0$$

此系统得动态性能指标为

峰值时间 
$$t_p = \frac{\beta_d - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta_d^2}} = 3.15$$

超调量 
$$\sigma\% = r \sqrt{1-\zeta_d^2} e^{-\zeta_d t_p / \sqrt{1-\zeta_d^2}} = 16.2$$

调节时间 
$$t_s = \frac{3 + \frac{1}{2} \ln(z^2 - 2\zeta_n \omega_n + \omega_n^2) - \ln z - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta_d^2)}{\zeta_d \omega_n} = 5.134$$

3-5 已知控制系统的单位阶跃响应为  $h(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$ ，试确定系统的阻尼比  $\zeta$  和自然频率  $\omega_n$ 。

解：

系统的单位脉冲响应为  $k(t) = \dot{h}(t) = -12e^{-60t} + 12e^{-10t} = 12(e^{-10t} - e^{-60t})$

系统的闭环传递函数为  $\Phi(s) = L[k(t)] = 12\left(\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+60}\right) = \frac{600}{s^2 + 10s + 600}$

自然频率  $\omega_n = \sqrt{600} = 24$

阻尼比  $\zeta = \frac{70}{2 \times \sqrt{600}} = 1.429$

3-6 已知系统特征方程为  $3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$ ，试用劳斯稳定判据和赫尔维茨稳定判据确定系统的稳定性。

解：

先用劳斯稳定判据来判定系统的稳定性，列出劳斯表如下

$$\begin{array}{r} s^4 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \\ s^3 \quad 10 \quad 1 \\ s^2 \quad \frac{47}{10} \quad 2 \\ s^1 \quad -\frac{153}{47} \\ s^0 \quad 2 \end{array}$$

显然，由于表中第一列元素得符号有两次改变，所以该系统在  $s$  右半平面有两个闭环极点。因此，该系统不稳定。

再用赫尔维茨稳定判据来判定系统的稳定性。显然，特征方程的各项系数均为正，则

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 10 \times 5 - 3 \times 1 = 47 > 0$$

$$\frac{a_1^2 a_4}{a_3} = \frac{10^2 \times 2}{1} = 200 > \Delta_2$$

显然，此系统不稳定。

3-7 设单位负反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+25)}$ ，试应

用劳斯稳定判据确定  $K$  为多大值时，特使系统振荡，并求出振荡频率。

解：

由题得，特征方程是  $s^4 + 12s^3 + 69s^2 + 198s + 200 + K = 0$

列劳斯表

$s^4$	1	69	200+K
$s^3$	12	198	
$s^2$	52.5	200+K	
$s^1$	7995-12K		
$s^0$	200+K		

由题意，令  $s^1$  所在行为零得  $K = 666.25$

由  $s^2$  行得  $52.5s^2 + 200 + 666.25 = 0$

解之得  $s = \pm 4.062i$ ，所以振荡角频率为  $\omega = 4.062 \text{ rad/s}$

3-8 已知单位负反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(0.5s^2+s+1)}$ ，试确定

系统稳定时的  $K$  值范围。

解：

由题可知系统的特征方程为

$$D(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + (2+K)s + 2K = 0$$

列劳斯表如下

$s^4$	1	4
$s^3$	3	$2+K$
$s^2$	$\frac{10-K}{3}$	$2K$
$s^1$	$\frac{(10-K)(2+K) - 6K}{3}$	$\frac{10-K}{3}$
$s^0$	$2K$	

由劳斯稳定判据可得

$$\begin{cases} \frac{10-K}{3} > 0 \\ \frac{[(10-K)(2+K)/3] - 6K}{(10-K)/3} > 0 \\ 2K > 0 \end{cases}$$

解上述方程组可得  $0 < K < 1.70$

3-9 系统结构如图 3-1 所示,  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ , 定义误差  $e(t) = r(t) - c(t)$ ,

- (1) 若希望图 a 中, 系统所有的特征根位于  $s$  平面上  $s = -2$  的左侧, 且阻尼比为 0.5, 求满足条件的  $K, T$  的取值范围。
- (2) 求图 a 系统的单位斜坡输入下的稳态误差。
- (3) 为了使稳态误差为零, 让斜坡输入先通过一个比例微分环节, 如图 b 所示, 试求出合适的  $K_0$  值。



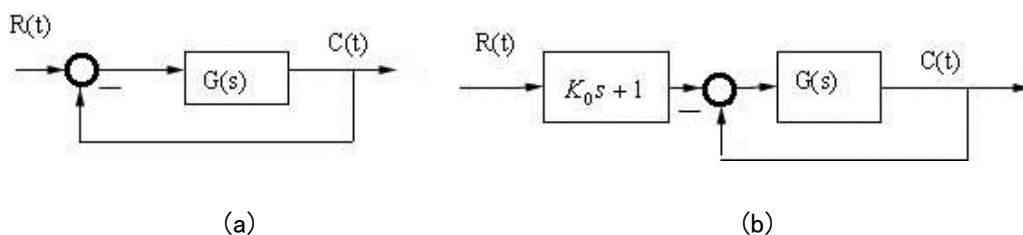


图 3-1 习题 3-9 示意图

解: (1) 闭环传递函数为  $\phi(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + K} = \frac{K/T}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}}$

即  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}, \because \zeta = 0.5 \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{T}, K = \frac{1}{T}$

$D(s) = Ts^2 + s + K$ , 令  $s' = s + 2$ , 代入上式得,

$$D'(s) = T(s'-2)^2 + s'-2 + K = Ts'^2 - (4T-1)s' + 4T + 1/T - 2 = 0$$

列出劳斯表,

$s^2$	T	$4T+1/T-2$
$s^1$	$1-4T$	
$s^0$	$4T+1/T-2$	

$$T > 0, 1-4T > 0, 4T+1/T-2 > 0 \Rightarrow 0 < T < 1/4$$

$$\text{或 } T < 0, 1-4T < 0, 4T+1/T-2 < 0 \Rightarrow \text{无解}$$

$$\therefore 0 < T < 1/4, 4 < K < \infty$$

(2)  $R(t) = t$ , 系统为 I 型系统  $\therefore e_{ss} = 1/K$

(3)  $G'(s) = (K_0s + 1) \frac{K}{s(Ts + 1) + K} = \frac{KK_0s + K}{Ts^2 + s + K}$

$$\therefore E(s) = R(s) - C(s) = R(s)[1 - G'(s)] = \frac{1}{s^2} \frac{Ts^2 + (1 - KK_0)s}{Ts^2 + s + K} = \frac{Ts + 1 - KK_0}{s(Ts^2 + s + K)}$$

$$\text{令 } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1 - KK_0}{Ts^2 + s + K} = \frac{1 - KK_0}{K} = 0 \Rightarrow K_0 = 1/K$$

$K_0$  并没有改变系统的稳定性。

3-10 已知单位反馈系统的开环传递函数:

$$(1) G(s) = \frac{100}{(0.1s+1)(s+5)};$$

$$(2) G(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}$$

试求输入分别为  $r(t) = 2t$  和  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时, 系统的稳态误差。

解:

$$(1) G(s) = \frac{100}{(0.1s+1)(s+5)} = \frac{20}{(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

由上式可知, 该系统是 0 型系统, 且  $K = 20$ 。

0 型系统在  $1(t), t, \frac{1}{2}t^2$  信号作用下的稳态误差分别为:  $\frac{1}{1+K}, \infty, \infty$ 。根据线性

叠加原理有该系统在输入为  $r(t) = 2t$  时的稳态误差为  $e_{ss2} = 2 \cdot \infty = \infty$ , 该系统在输入

为  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时的稳态误差为  $e_{ss2} = 2 \cdot \frac{1}{1+K} + 2 \cdot \infty + \infty = \infty$

$$(2) G(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)} = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

由上式可知, 该系统是 I 型系统, 且  $K = 10$ 。

I 型系统在  $1(t), t, \frac{1}{2}t^2$  信号作用下的稳态误差分别为:  $0, \frac{1}{K}, \infty$ 。根据线性叠加

原理有该系统在输入为  $r(t) = 2t$  时的稳态误差为  $e_{ss2} = 2 \cdot \frac{1}{K} = 0.2$ , 该系统在输入

为  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时的稳态误差为  $e_{ss2} = 20 + 2 \cdot \frac{1}{K + \infty} = \infty$

3-11 已知闭环传递函数的一般形式为

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

误差定义为  $e(t) = r(t) - c(t)$ 。试证,

(1) 系统在阶跃信号输入下，稳态误差为零的充分条件为

$$\phi(s) = \frac{a_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

(2) 系统在斜坡信号输入下，稳态误差为零的充分条件为

$$\phi(s) = \frac{a_1s + a_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

(3) 推导系统在斜坡信号输入下稳态误差为零的充分条件

(4) 求出系统闭环传递函数与系统型别之间的关系

解：(1)  $\because \phi(s) = \frac{a_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$

$$\therefore E(s) = R(s) - C(s) = R(s)[1 - \phi(s)]$$

$$= \frac{1}{s} \bullet \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

$$= \frac{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

满足终值定理的条件，

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = 0$$

即证

(2)  $\because \phi(s) = \frac{a_1s + a_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$

$$\therefore E(s) = R(s) - C(s) = R(s)[1 - \phi(s)]$$

$$= \frac{1}{s^2} \bullet \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

$$= \frac{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

满足终值定理的条件，

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = 0$$

即证

(3) 对于加速度输入，稳态误差为零的必要条件为

$$\because \phi(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

同理可证

(4) 系统型别比闭环函数分子最高次幂大 1 次。

3-12 已知单位反馈系统的开环传递函数为：

$$(1) G(s) = \frac{50}{(0.1s+1)(2s+1)};$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)};$$

$$(3) G(s) = \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

试求位置误差系数  $K_p$ ，速度误差系数  $K_v$ ，加速度误差系数  $K_a$ 。

解：

(1) 此系统是一个 0 型系统，且  $K = 20$ 。故查表可得  $K_p = K = 10$ ， $K_v = 0$ ，

$$K_a = 0$$

(2) 根据误差系数的定义式可得

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s(s^2+4s+200)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K}{s(s^2+4s+200)} = \frac{K}{200}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K}{s(s^2+4s+200)} = 0$$

(3) 根据误差系数的定义式可得

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \bullet G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bullet \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)} = \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)} = 1$$

### 3-13 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = K_0 \bullet \frac{K_f}{T_f s + 1} \bullet \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \bullet \frac{1}{i}$$

输入信号为  $r(t) = (a + bt) \bullet 1(t)$

其中  $K_0, K_m, K_f, i, T_f, T_m$  均为正数,  $a$  和  $b$  为已知正常数。如果要求闭环系统的稳态误差  $e_{ss} < \varepsilon_0$ , 其中  $\varepsilon_0 > 0$ , 试求系统各参数满足的条件。

解: 首先系统必须是稳定的, 系统的闭环特征方程为

$$T_f T_m s^3 + (T_f + T_m) s^2 + s + K = 0$$

式中,  $K = K_0 K_f K_m / i$ , 为系统的开环增益, 各参数满足:

$$K > 0, \quad (T_f + T_m) - K T_m T_f > 0$$

$$\text{即稳定条件为 } 0 < K < \frac{T_f + T_m}{T_f T_m}$$

由于本例是 I 型系统, 其  $K_p = \infty, K_v = K$ , 故在  $r(t) = (a + bt) \bullet 1(t)$  作用下,

其稳态误差

$$e_{ss} = \frac{b}{K} < \varepsilon_0 \quad \text{必有 } K > \frac{b}{\varepsilon_0}$$

于是, 即能保证系统稳定, 又满足对系统稳态误差要求的各参数之

$$\text{间的条件为 } \frac{b}{\varepsilon_0} < K_0 K_f K_m / i < \frac{T_f + T_m}{T_f T_m}$$

3-14 设单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = 1/Ts$ 。试用动态误差系数法求出

当输入信号分别为  $r(t) = t^2/2$  时，系统的稳态误差。

解：

系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{Ts}{1+Ts} = Ts - (Ts)^2 + (Ts)^3 - (Ts)^4 + \dots$$

所以有  $E(s) = \Phi_e(s) \cdot R(s) = Ts \cdot R(s) - (Ts)^2 \cdot R(s) + (Ts)^3 \cdot R(s) - (Ts)^4 \cdot R(s) + \dots$

对上式进行拉氏反变换可得

$$e(t) = T \dot{r}(t) - T^2 \ddot{r}(t) + T^3 \dddot{r}(t) - T^4 r^{(4)}(t) + \dots \quad (1)$$

当  $r(t) = t^2/2$  时，显然有

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= t \\ \ddot{r}(t) &= 1 \\ \dddot{r}(t) &= r^{(4)}(t) = \dots = 0 \end{aligned}$$

将上述三式代入 (1) 式，可得  $e(t) = T \cdot t - T^2 \cdot 1 + T^3 \cdot 0 - T^4 \cdot 0 + \dots = T(t - T)$

系统的稳态误差为  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t - T) = \infty$

3-15 假设可用传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$  描述温度计的特性，现在用温度计测量盛

在容器内的水温，需要一分钟时间才能指出实际水温的 98% 的数值。如果给容器加热，使水温依  $10^\circ / \text{min}$  的速度线性变化，问温度计的稳态误差有多大？

解：

由题意，该一阶系统得调整时间  $t_s = 1 \text{ min}$ ，但  $t_s = 4T$ ，所以  $T = 0.25 \text{ min}$ 。

系统输入为  $r(t) = 10t$ ，可推得  $R(s) = \frac{10}{s^2}$

因此可得  $C(s) = \frac{1}{Ts+1} R(s) = \frac{10}{s^2(Ts+1)}$

$$c(t) = 10t - 10T + 10T e^{-t/T}$$

$c(t)$  的稳态分量为  $c_{ss}(t) = 10t - 10T$

稳态误差为  $e_{ss}(t) = r(t) - c_{ss}(t) = 10T = 10 \times 0.25 = 2.5$

所以，稳态误差为  $2.5^\circ C$

3-16 如图 3-2 所示的控制系统结构图，误差  $E(s)$  在输入端定义，扰动输入  $n(t) = 2 \times 1(t)$ 。

(1) 试求  $K = 40$  时，系统在扰动输入下的稳态输出和稳态误差。

(2) 若  $K = 20$ ，其结果又如何？

(3) 在扰动作用点之前的前向通道中引入积分环节  $\frac{1}{s}$ ，对其结果有何影响？

在扰动作用点之后的前向通道中引入积分环节  $\frac{1}{s}$ ，对其结果又有何影响？

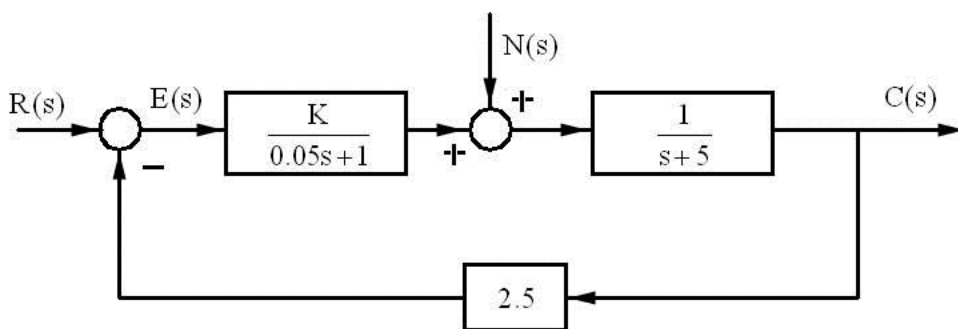


图 3-2 习题 3-16 示意图

解：令  $G_1 = \frac{K}{0.05s+1}$ ， $G_2 = \frac{1}{s+5}$ ， $H = 2.5$

则  $C(s) = G_2 N(s) + G_1 G_2 E(s)$  代入  $E(s) = R(s) - HC(s)$

$$\text{得 } C(s) = \frac{G_2}{1+G_1G_2H}N(s) + \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}R(s)$$

令  $R(s) = 0$ ，得扰动作用下的输出表达式：

$$C_n(s) = \frac{G_2}{1+G_1G_2H}N(s)$$

$$\text{此时的误差表达式为： } E_n(s) = R(s) - HC_n(s) = -\frac{G_2H}{1+G_1G_2H}N(s)$$

若在  $s$  右半平面上解析，则有

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_n(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_2H}{1+G_1G_2H} sN(s)$$

在扰动输入下的稳态输出为

$$C_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC_n(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_2}{1+G_1G_2H} sN(s)$$

代入  $N(s), G_1, G_2, H$  的表达式，可得

$$c_n(\infty) = \frac{1}{1+2.5K}, e_{ssn} = \frac{5}{1+2.5K}$$

$$(1) \text{ 当 } K = 40 \text{ 时, } c_n(\infty) = \frac{2}{101}, e_{ssn} = -\frac{5}{101}$$

$$(2) \text{ 当 } K = 20 \text{ 时, } c_n(\infty) = \frac{2}{51}, e_{ssn} = -\frac{5}{51}$$

可见，开环增益的减小将导致扰动作用下系统稳态输出的增大，且稳态误差的绝对值也增大。

(3) 若  $1/s$  加在扰动之前，则

$$G_1 = \frac{K}{s(0.05s+1)} \quad G_2 = \frac{1}{s+5} \quad H = 2.5$$

$$\text{得 } c_n(\infty) = 0, e_{ssn} = 0$$

若  $1/s$  加在扰动之后，则

$$G_1 = \frac{K}{0.05s+1} \quad G_2 = \frac{1}{(s+5)} \quad H = 2.5$$



$$c_n(\infty) = \frac{2}{2.5K} = 0.02(K=40), 0.04(K=20)$$

$$e_{ssn} = -\frac{5}{2.5K} = -0.05(K=40), -0.1(K=20)$$

可见在扰动作用点之前的前向通路中加入积分环节,可以消除阶跃输入引起的稳态误差。

3-17 设随动系统的微分方程为:

$$T_m T_a \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + T_m \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = Kr(t)$$

其中,  $c(t)$  为系统输出量,  $r(t)$  为系统输入量,  $T_m$  为电动机机电时间常数,  $T_a$  为电动机电磁时间常数,  $K$  为系统开环增益。初始条件全部为零, 试讨论:

(1)  $T_a$ 、 $T_m$  与  $K$  之间关系对系统稳定性的影响

(2) 当  $T_a = 0.01$ ,  $T_m = 0.1$ ,  $K = 500$  时, 可否忽略  $T_a$  的影响? 在什么影响下  $T_a$  的影响可以忽略?

解: (1) 对系统微分方程在零初始条件下进行拉氏变换, 得闭环系统特征方程

$$T_m T_a s^3 + T_m s^2 + s + K = 0$$

当  $T_m$   $T_a$   $K$  均为正值时, 且有  $D_2 = T_m(1 - T_a K) > 0$

即  $0 < K < 1/T_a$  时 闭环系统稳定。

(2) 由于  $T_a = 0.01$ , 因此只有当  $0 < K < 100$

闭环系统才稳定, 显然, 对于  $K = 500$ , 闭环不稳定。此时若略去  $T_a$ ,

闭环特征方程为

$$T_m s^2 + s + K = 0.1s^2 + s + 500 = 0$$

上式中各项系数为正, 从而得到得出闭环系统稳定的错误结论。如果

$K < 100$ 。如果  $K < 100$ , 则略去  $T_a$  不会影响闭环稳定性。

对于本例，当  $K > 1/T_a$  时，不能忽略  $T_a$  对稳定性的影响，否则可以忽略。

### 3-18 设计题

飞机的自动控制，是一个需要多变量反馈方式的例子。在该系统中，飞机的飞行姿态由三组翼面决定，分别是：升降舵，方向舵和副翼，如附图 3-3(a)所示。

飞行员通过操纵这三组翼面，可以使飞机按照既定的路线飞行。

这里所要讨论的自动驾驶仪是一个自动控制系统，它通过调节副翼表面来控制

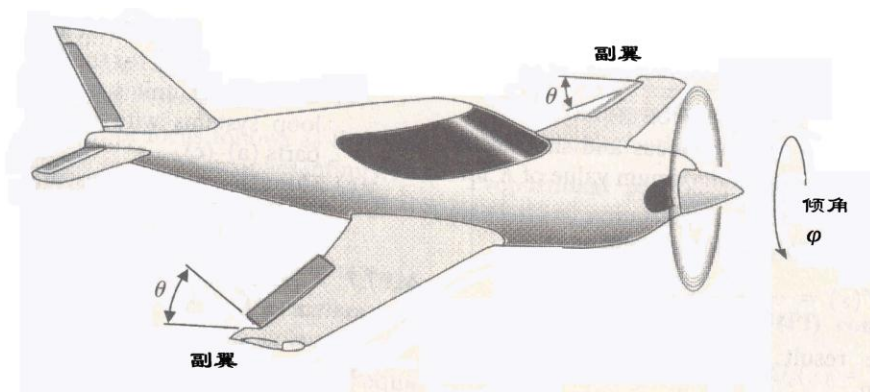


图 3-3 (a) 飞机副翼模型图

制倾角  $\phi$ ，只要使副翼表面产生一个  $\theta$  的变形，气压在这些表面上会产生一个扭矩，使飞机产生侧滚。飞机副翼是由液压操纵杆来控制的，后者的传递函数为  $\frac{1}{s}$ 。

测量实际的倾角  $\phi$ ，并与输入设定值进行比较，其差值被用来驱动液压操纵杆，而液压操纵杆则反过来又会引起副翼表面产生变形。

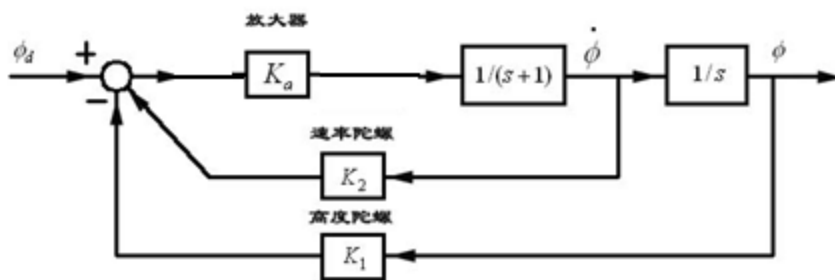


图 3-3 (b) 飞机控制倾角结构图

为简单化起见，这里假定飞机的侧滚运动与其他运动无关，其结构图如图 3-3(b)所示，又假定  $K_1 = 1$ ，且角速率  $\dot{\phi}$  由速率陀螺将其值进行反馈，期望的阶跃响应的超调量  $\sigma\% \leq 10\%$ ，调节时间(以  $\pm 2\%$  的标准)  $t_s \leq 9s$ ，试选择合适的  $K_a$  和  $K_2$  值。

解：

由于过阻尼响应缓慢，故通常不希望采用过阻尼系统，在本题中  $\xi \in [0,1]$  欠阻尼

$$G(s) = \frac{1}{s} \frac{K_a}{s+1+K_2K_a} = \frac{K_a}{s^2 + (K_2K_a + 1)s}$$

$$\phi(s) = \frac{K_a}{s^2 + (K_2K_a + 1)s + K_a}$$

因此，

$$\begin{cases} \omega_n^2 = K_a \\ 2\xi\omega_n = K_2K_a + 1 \end{cases}$$

计算可得

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{K_a} \\ \xi = \frac{K_2K_a + 1}{2\sqrt{K_a}} \end{cases}$$

$$\text{又因, } \sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%, \quad t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 9$$

由题计算可得  $\xi = 0.59$ ， $\omega_n = 0.659$

故  $K_1 = 0.4, K_2 = -0.634$

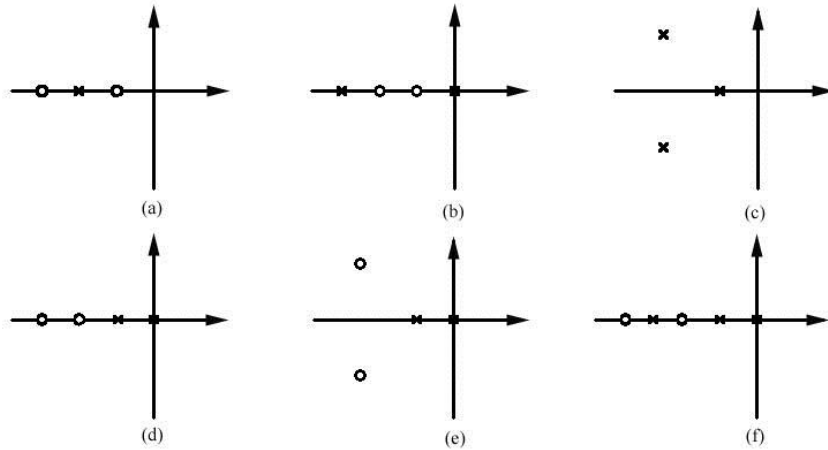


图 4-1 习题 4-1 系统零极点分布图

4-1 已知系统开环零极点分布如图 4-1 所示，试绘制相应的根轨迹图。

解：

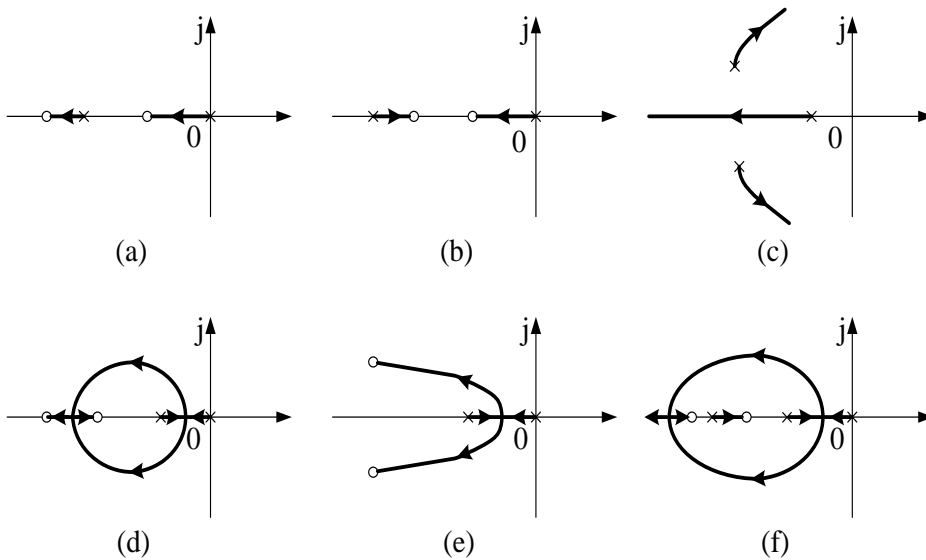


图 4-1a 根轨迹图

(a) 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 0$

(b) 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 0$

(c) 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 3$ ，渐近线的倾斜角为  $\phi_1 = 60^\circ$ ， $\phi_2 = 180^\circ$ ，

$\phi_3 = 240^\circ$

(d) 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 0$

(e) 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 0$

(f) 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 1$ ，渐近线的倾斜角为  $\phi = 180^\circ$

4-2 已知单位反馈控制系统的前向通道传递函数为：

$$(1) G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

$$(4) G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

$K \geq 0$ ，画出各系统的根轨迹图。

解：(1) 按下列步骤绘制根轨迹：

① 系统开环有限零点为  $z_1 = -1$ ；开环有限极点为  $p_{1,2} = 0, p_3 = -2, p_4 = -4$

② 实轴上的根轨迹区间为  $[-\infty, -4], [-2, -1]$

③ 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 3$ ，渐近线的倾角为

$$\phi_1 = 60^\circ, \phi_2 = 180^\circ, \phi_3 = -60^\circ$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = -\frac{5}{3}$$

闭环系统根轨迹如下图 4-2a 所示

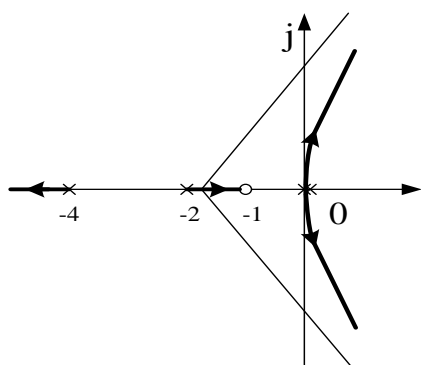


图 4-2a 闭环系统根轨迹图

(2) 按下列步骤绘制根轨迹:

①系统没有开环有限零点; 开环有限极点为  $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2, p_4 = -5$

②实轴上的根轨迹区间为  $[-5, -2], [-1, 0]$

③根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 4$ , 渐近线的倾角为

$$\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 135^\circ, \phi_3 = -135^\circ, \phi_4 = -45^\circ$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = -2$$

④分离点方程为

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} = 0$$

解得分离点  $d_1 = -4.06, d_2 = -0.40$

闭环系统根轨迹如下图 4-2b 所示

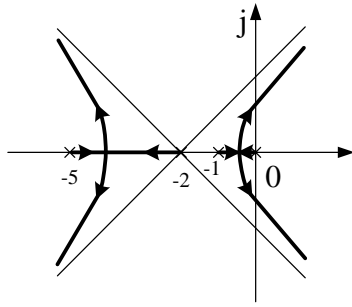


图 4-2b

(3) 按下列步骤绘制根轨迹:

- ① 系统没有开环有限零点; 开环有限极点为  $p_1 = 0, p_2 = -4, p_{3,4} = -2 \pm j4$
- ② 实轴上根轨迹区间为  $[-4, 0]$
- ③ 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 4$ ,  $\sigma_a = -2$ ,  $\phi_a = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$
- ④ 根轨迹的起始角: 复数开环有限极点  $p_{3,4} = -2 \pm j4$  处,  $\theta_{p_3} = -90^\circ, \theta_{p_4} = 90^\circ$
- ⑤ 分离点方程为

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} + \frac{1}{d+2+j4} + \frac{1}{d+2-j4} = 0$$

解得分离点  $d_1 = -2, d_{2,3} = -2 \pm j\sqrt{6}$

检查

$$d_1 = -2 \text{ 时, } K^* = 64$$

$$d_{2,3} = -2 \pm j\sqrt{6} \text{ 时, } K^* = 100$$

$d_1, d_2, d_3$  皆为闭环系统根轨迹的分离点。

⑥ 确定根轨迹与虚轴的交点: 系统闭环特征方程为

$$D(s) = s^4 + 8s^3 + 36s^2 + 80s + K^* = 0$$

列写劳斯表



$s^4$	1	36	$K^*$
$s^3$	8	80	
$s^2$	26	$K^*$	
$s^1$	$\frac{80 \times 26 - 8K^*}{26}$		
$s^0$	0		

当  $K^* = 260$  时，劳斯表出现全零行，辅助方程为

$$A(s) = 26s^2 + 260 = 0$$

解得根轨迹与虚轴交点为  $\omega = \pm\sqrt{10}$ 。

根轨迹如下图 4-2c 所示：

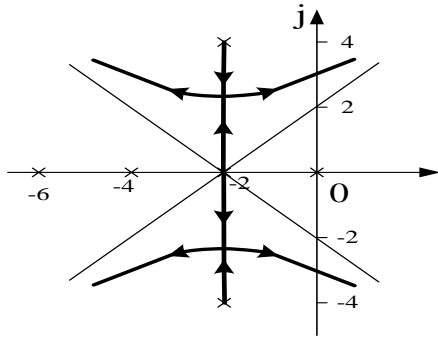


图 4-2c

(4) 按下列步骤绘制根轨迹：

① 系统开环有限零点为  $z_1 = -1$ ；开环有限极点为  $p_1 = 0$ ， $p_2 = 1$ ，

$$p_{3,4} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

② 实轴上根轨迹区间为  $(-\infty, -1], [0, 1]$

③ 根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 3$ ， $\sigma_a = -\frac{2}{3}$ ， $\phi_a = 60^\circ, 180^\circ, -60^\circ$

④ 分离点方程为

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d-1} + \frac{1}{d+2+j2\sqrt{3}} + \frac{1}{d+2-j2\sqrt{3}} = \frac{1}{d+1}$$

解得分离点  $d_1 = -2.26, d_2 = 0.45$

根轨迹如下图 4-2d 所示：

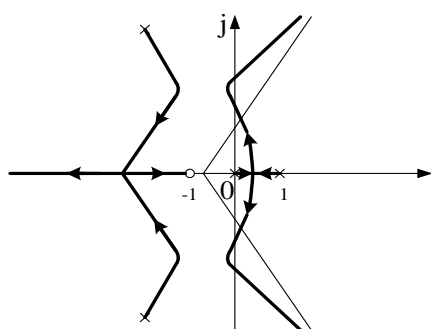


图 4-2d

4-3 给定系统如图 4-2 所示， $K \geq 0$ ，试画出系统的根轨迹，并分析增益对系统

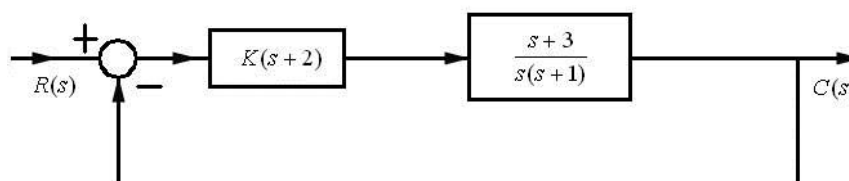


图 4-2 习题 4-3 系统零极点分布图

阻尼特性的影响。

解：（1）作系统的根轨迹。开环传递函数为

$$G(s)F(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$$

①开环极点为 0 和 -1，开环零点为 -2 和 -3。

②所以实轴上的根轨迹区间为  $[-3, -2]$  和  $[-1, 0]$ 。

③分离点方程

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} = \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3}$$

得分离点  $d_1 = -2.366, d_2 = -0.634$

检查

$$d_1 = -2.366 \text{ 时, } K^* = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-2.366} = 0.0718$$

$$d_2 = -0.634 \text{ 时, } K^* = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-0.634} = 13.93$$

可得到根轨迹如下图 4-3a 所示

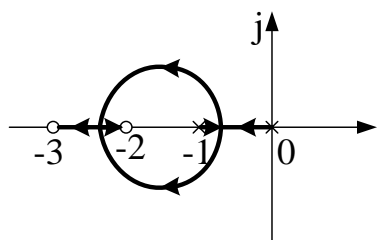


图 4-3a

(2) 分析增益对阻尼特性的影响。

从根轨迹图可以看出，对于任意  $K > 0$ ，闭环系统都是稳定的，但阻尼状况不同。

增益较小时 ( $0 < K < 0.0718$ ) 系统过阻尼；

增益很大时 ( $K > 13.93$ )，系统过阻尼；

增益中等时 ( $0.0718 < K < 13.93$ )，系统欠阻尼。

4-4 给定控制系统如图 4-3 所示， $K \geq 0$ ，试用系统的根轨迹图确定，速度反馈增益  $K$  为何值时能使闭环系统极点阻尼比等于 0.7。

解：(1) 求系统的闭环特征方程并划成标准形式。通过方块图变换或代数运算可以求得单位反馈系统的开环传递函数

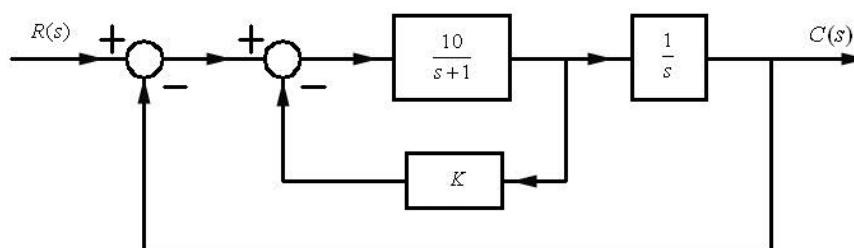


图 4-3 习题 4-4 系统结构图

$$G(s) = \frac{10/(s+1)}{1+10k/(s+1)} \frac{1}{s} = \frac{10}{s(s+1+10k)}$$

因为可变参数  $K$  不是分子多项式的相乘因子，所以先求系统的闭环特征方程

$$s(s+1+10k)+10=s^2+s+10ks+10=0$$

改写为

$$1 + \frac{10ks}{s^2 + s + 10} = 0$$

即，上述闭环特征方程也相当于开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{Ks}{s^2 + s + 10} = 0, K = 10k$$

的系统的闭环特征方程。

(2) 根据  $G'(s)$  作出根轨迹图。

$G'(s)$  有两个极点  $-0.5 \pm j3.1225$ ，一个零点  $0$ ，所以负实轴是根轨迹，而且其上有分离点。将闭环特征方程改写为

$$K = -\frac{s^2 + s + 10}{s}$$

由  $dK/ds = 0$  可以求得  $s = \pm\sqrt{10}$ ，其中  $s = -\sqrt{10}$  在根轨迹上，对应增益为  $K = 5.3246 > 0$ ，故  $s = -\sqrt{10}$  是实轴上的分离点。根轨迹如图 4-4a 所示。

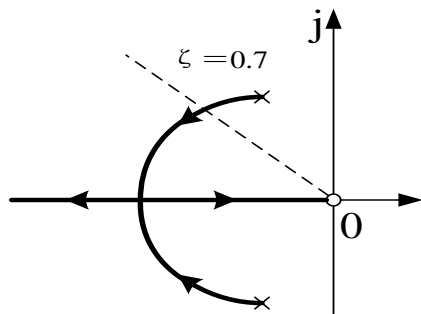


图 4-4a

(3) 求反馈增益  $k$ 。首先要确定闭环极点。设途中虚线代表  $\zeta = 0.7$ ，则闭

环极点为根轨迹和该虚线的交点，由  $\zeta = 0.7$  可得  $\theta = \arccos \zeta = 45.57^\circ$ 。设

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.7\omega_n + j\sqrt{0.51}\omega_n$$

列出该点对应的辐角条件

$$\begin{aligned} \arg G'(s) &= \arg \frac{s}{(s_1 + 0.5 + j3.1225)(s_1 + 0.5 - j3.1225)} \\ &= \arctan \frac{\sqrt{0.51}}{-0.7} - \arctan \frac{\sqrt{0.51}\omega_n + 3.1225}{-0.7\omega_n + 0.5} - \arctan \frac{\sqrt{0.51}\omega_n - 3.1225}{-0.7\omega_n + 0.5} \\ &= -180^\circ(2k+1) \end{aligned}$$

经整理得

$$\arctan \frac{\sqrt{0.51}\omega_n + 3.1225}{-0.7\omega_n + 0.5} + \arctan \frac{\sqrt{0.51}\omega_n - 3.1225}{-0.7\omega_n + 0.5} = \mp 180^\circ(2k+1) + \arctan \frac{\sqrt{0.51}}{-0.7}$$

两边同取正切，整理得

$$1.0202\omega_n^2 - 10.2020 = 0$$

解得， $\omega_n = 3.1623$ 。所以该闭环极点为  $s_1 = -2.2136 + j2.2583$ 。再由

$$K = -\frac{s^2 + s + 10}{s} \Big|_{s=-2.2136+j2.2583} = 3.4272$$

得速度反馈增益为  $k = K/10 = 0.3427$ 。

4-5 已知单位反馈系统的开环传递函数为： $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$ 。要求系统的

闭环极点有一对共轭复数极点，其阻尼比为  $\xi = 0.5$ 。试确定开环增益  $K$ ，并

近似分析系统的时域性能。

解：根据绘制常规根轨迹的基本法则，作系统的概略根轨迹如图 4-5a 所示。

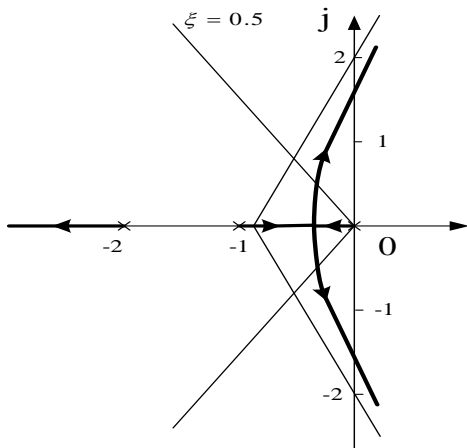


图 4-5a

欲确定  $K$ ，需先确定共轭复极点。设复极点为  $s_{1,2} = x \pm jy$

根据阻尼比的要求，应保证

$$y = x \operatorname{tg}(180^\circ - \arccos \zeta) = -1.732x$$

在图上作  $\zeta = 0.5$  的阻尼线，并得到初始试探点的横坐标  $x = -0.3$ ，由此求得纵坐标  $y = 0.52$ 。在  $s = -0.3 \pm j0.52$  处检查相角条件

$$\angle G(s) = -173.6^\circ$$

不满足相角条件；修正  $x = -0.32$ ，则  $y = 0.554$ ，点  $s = -0.32 \pm j0.554$  处的相角为  $-177.4^\circ$ ；再取  $x = -0.33$ ，则  $y = 0.572$ ，点  $s = -0.33 \pm j0.572$  处的相角为  $-180^\circ$ 。

因此共轭复极点  $s_{1,2} = -0.33 \pm j0.572$ 。由模值条件求得

$$K = \frac{1}{2} K^* \Big|_{s=-0.33+j0.572} = 0.513$$

运用综合除法求得另一闭环极点为  $s_3 = -2.34$ 。共轭复极点的实部与实极点的实部之比为 0.14，因此可视共轭复极点为系统的主导极点，系统的闭环传递函数可近似表示为

$$\phi(s) = \frac{0.436}{s^2 + 0.665s + 0.436}$$

并可近似地用典型二阶系统估算系统的时域性能

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 10.6$$

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 16.3\%$$

4-6 已知单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 4)}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 1.4s + 1)}, K \geq 0$$

试画出系统的根轨迹图，并分析系统的稳定时 K 的取值范围。

解：由题得

开环极点：0, -4, -6 和  $-0.7 \pm j0.714$

开环零点： $-1 \pm j1.7321$

分离、会合点：从 s 平面的零点、极点分布可知在区间内 (-4, 0) 可能有分离、会合点。

记

$$A(s) = s(s+4)(s+6)(s^2 + 1.4s + 1) = s^5 + 11.4s^4 + 39s^3 + 43.6s^2 + 24s$$

$$B(s) = s^2 + 2s + 4$$

由  $A'(s)B(s) = A(s)B'(s)$ ，可得

$$(5s^4 + 45.6s^3 + 117s^2 + 87.2s + 24)(s^2 + 2s + 4)$$

$$= (s^5 + 11.4s^4 + 39s^3 + 43.6s^2 + 24s)(2s + 2)$$

经整理后得到

$$3s^6 + 30.8s^5 + 127.4s^4 + 338.4s^3 + 531.2s^2 + 348.8s + 96 = 0$$

用试探法或程序算得区间 (-4, 0) 内的一个根为 -2.3557，它就是实轴上的分离点。

根轨迹自复数极点的出射角： $\mp 54.88^\circ$

根轨迹趋向复数零点的入射角： $\mp 102.52^\circ$

根轨迹与虚轴的交点：闭环特征方程为

$$f(s) = s^5 + 11.4s^4 + 39s^3 + (43.6+k)s^2 + (24+2K)s + 4K = 0$$

$$\text{令 } s = j\omega, \text{ 可得 } \begin{cases} 11.4\omega^4 - (43.6 + K)\omega^2 + 4K = 0 \\ \omega[\omega^4 - 39\omega^3 + (24 + 2K)] = 0 \end{cases}$$

由第二式得  $K = -0.5\omega^4 + 19.5\omega^2 - 12$ , 代入第一式, 得

$$\omega^6 - 20.2\omega^4 + 92\omega^2 - 96 = 0$$

解得  $\omega_1 = 1.2115, \omega_2 = 2.1545, \omega_3 = 3.7537$

根据以上数据画根轨迹图, 如图 4-6a 所示。

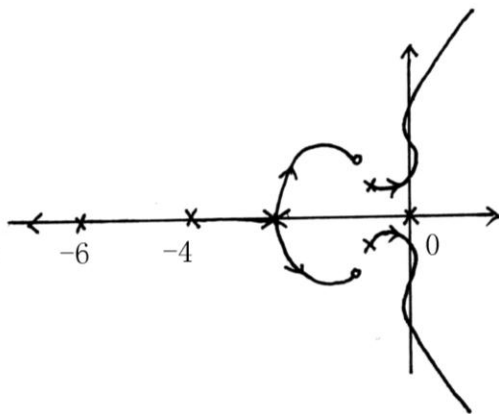


图 4-6a 根轨迹图

再分析系统得稳定情况: 根轨迹与虚轴第一个交点的频率为  $\omega_1 = 1.2115$ ,

利用幅值条件可以计算出对应的增益

$$K = -\frac{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}{s^2+2s+4} \Big|_{s=j1.2115} = 15.56$$

同样可以算得与  $\omega_2 = 2.1545$  和  $\omega_3 = 3.7537$  对应的增益  $K_2 = 64.74, K_3 = 163.43$

参看根轨迹图可知: 系统稳定时  $K$  的取值范围为:  $K < 15.54$  或  $64.74 < K < 163.43$

4-7 已知单位反馈系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

$K$  的变化范围是  $0 \rightarrow \infty$ , 试画出系统的根轨迹图。

解: 按下列步骤绘制根轨迹:



①系统没有开环有限零点；开环有限极点为  $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$

②实轴上的根轨迹区间为  $[-\infty, -2], [-1, 0]$

③根轨迹的渐近线条数为  $n - m = 3$ ，渐近线的倾角为

$$\phi_1 = 60^\circ, \phi_2 = 180^\circ, \phi_3 = -60^\circ$$

渐近线与实轴的交点为 
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = -1$$

④分离点方程为 
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0$$

解得分离点  $d = -0.42$

闭环系统根轨迹如下图 4-7a 所示

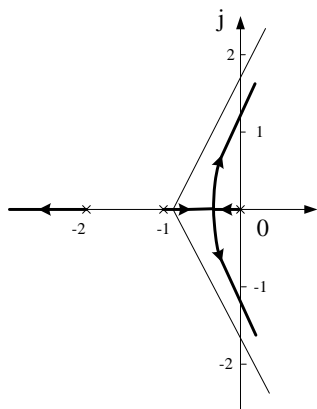


图 4-7a

4-8 已知反馈控制系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}, H(s) = 1, K > 0, a > 0$$

试画出  $K$  和  $a$  同时变化的根轨迹簇。

解：(1) 列写闭环特征方程。闭环特征方程为  $s^2 + as + K = 0$

(2) 画  $a = 0$ ， $K$  从 0 到  $+\infty$  的根轨迹。 $a = 0$  时闭环特征方程为  $s^2 + K = 0$ 。

这相当于一个开环传递函数为

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{K}{s^2}$$

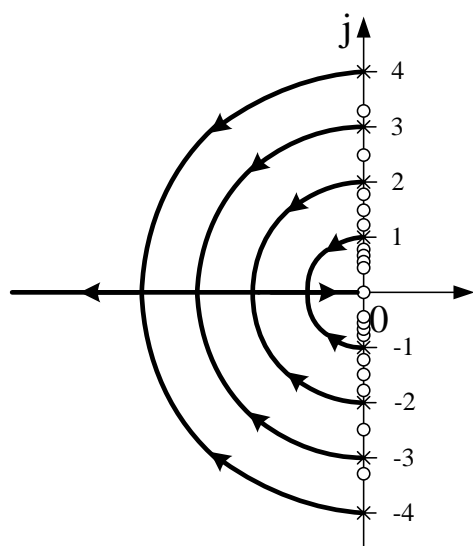
的系统。它的根轨迹是与虚轴重合的直线。见图 4-8a 中由圆圈构成的根轨迹。

(3) 画  $K$  为常数,  $a$  从 0 到  $+\infty$  的根轨迹。给定  $K$ , 则闭环特征方程为

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0$$

它相当于一个开环传递函数为  $G_2(s)H_2(s) = \frac{as}{s^2 + K}$  的系统, 该系统的开环极点为

$\pm j\sqrt{K}$ , 开环零点为 0。图 4-8a 中不带圆圈的根轨迹是  $K=1, 4, 9, 16$  时的根轨迹。



4-9 已知单位反馈系统的开环传递函数为:  $G(s) = \frac{1}{4} \frac{(s+a)}{s^2(s+1)}$

$a$  的变化范围是  $[0, +\infty]$ , 试画出系统的闭环根轨迹。

解: 系统闭环特征方程为

$$D(s) = s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}a = 0$$

$$\text{即有 } 1 + \frac{\frac{1}{4}a}{s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s} = 0$$

$$\text{等效开环传递函数为 } G_1(s) = \frac{K^*}{s(s + \frac{1}{2})^2}$$

$$K^* = \frac{1}{4}a, \text{ 变化范围为 } [0, +\infty)$$

按照绘制常规根轨迹的基本法则确定根轨迹的各项参数：

(1) 等效系统无开环有限零点；开环有限极点为： $p_1 = 0, p_2 = p_3 = -\frac{1}{2}$

(2) 实轴上的根轨迹区间为  $(-\infty, 0]$

(3) 根轨迹有 3 条渐近线，且  $\sigma_a = -\frac{1}{3}, \varphi_a = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$

(4) 根轨迹的分离点：由分离点方程  $\frac{d}{ds} G_1(s) = \frac{-K^*(3s^2 + 2s + \frac{1}{4})}{s^2(s + \frac{1}{2})^4} = 0$

$$\text{解得 } d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = -\frac{1}{6}$$

(5) 根轨迹与虚轴的交点：根据闭环特征方程列写劳斯表如下：

$s^3$	1	$\frac{1}{4}$
$s^2$	1	$\frac{a}{4}$
$s^1$	$\frac{1}{4} - \frac{a}{4}$	

当  $a=1$  时，劳斯表的  $s^1$  行元素全为零，辅助方程为  $A(s) = s^2 + \frac{1}{4} = 0$

$$\text{解得 } s_{1,2} = \pm j\frac{1}{2}$$

绘制系统参数根轨迹如图 4-9a 所示

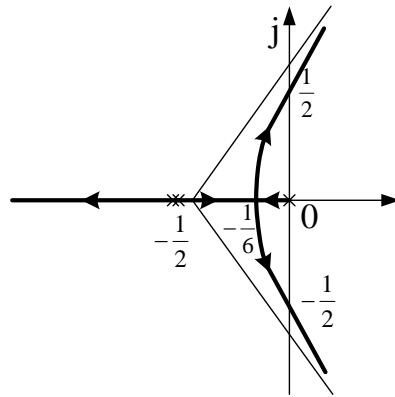


图 4-9a

4-10 已知反馈控制系统中，其开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 4)}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 1.4s + 1)}$$

- (1) 绘制  $H(s) = \frac{s+4}{s}$  时的闭环根轨迹概略图；
- (2) 绘制  $H(s) = \frac{s+1.05}{s}$  时的闭环根轨迹概略图；
- (3) 比较开环零点变化对根轨迹形状的影响。

解：（1）开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 4)}{s^2(s+6)(s^2 + 1.4s + 1)}$$

按下列步骤绘制根轨迹：

- ①系统开环有限零点为  $z_{1,2} = -1 \pm j1.732$ ；开环有限极点为  $p_{1,2} = 0$ ， $p_3 = -6$ ， $p_{4,5} = -0.7 \pm j0.714$

②实轴上的根轨迹区间为  $(-\infty, -6]$

③根轨迹的渐近线条数为  $n-m=3$ ，渐近线的倾角为

$$\phi_1 = 60^\circ, \phi_2 = 180^\circ, \phi_3 = -60^\circ$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -1.8$$

闭环系统根轨迹如下图 4-10a 所示

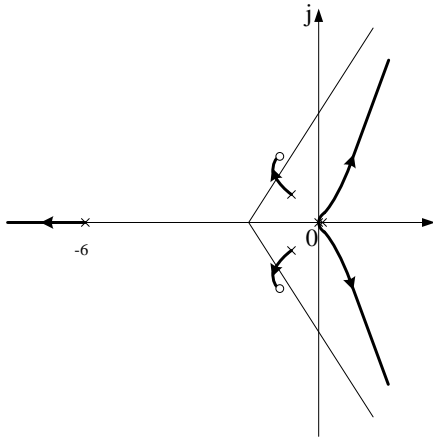


图 4-10a 根轨迹图

## (2) 开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1.05)(s^2+2s+4)}{s^2(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$$

按下列步骤绘制根轨迹：

① 系统开环有限零点为  $z_1 = -1.05$ ， $z_{2,3} = -1 \pm j1.732$ ；开环有限极点为

$$p_{1,2} = 0, \quad p_3 = -4, \quad p_4 = -6, \quad p_{5,6} = -0.7 \pm j0.714$$

② 实轴上的根轨迹区间为  $(-\infty, -6]$  和  $[-4, -1.05]$

③ 根轨迹的渐近线条数为  $n-m=3$ ，渐近线的倾角为

$$\phi_1 = 60^\circ, \quad \phi_2 = 180^\circ, \quad \phi_3 = -60^\circ$$

渐近线与实轴的交点为

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -2.78$$

闭环系统根轨迹如下图 4-10b 所示

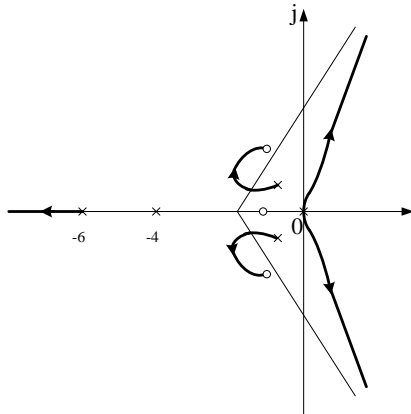


图 4-10b 根轨迹图

4-11 给定控制系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{s+a}{s(2s-a)}, a \geq 0$$

试作出以  $a$  为参变量的根轨迹，并利用根轨迹分  $a$  取何值时闭环系统稳定。

解：(1) 求系统的闭环特征方程并化成标准的形式。因为可变参数  $a$  不是分子多项式的相乘因子，所以先求系统的闭环特征方程

$$2s^2 - as + s + a = 0$$

可改写为

$$1 + \frac{-a(s-1)}{s(2s+1)} = 0$$

则开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{-a(s-1)}{s(2s+1)} = \frac{K(s-1)}{s(2s+1)}, K = -a < 0$$

(2) 根据  $G'(s)$  作系统的根轨迹。  $G'(s)$  中的增益为负值，所以要作系统的补根轨迹。开环极点为  $-0.5$  和  $0$ ，开环零点为  $1$ 。按照补根轨迹的作图规则，实轴上的根轨迹区间为  $[-0.5, 0]$  和  $[1, +\infty]$ 。在  $[-0.5, 0]$  区间有会合点，在  $[1, +\infty]$  有分离点。为求分离、会合点，将闭环特征方程改写为

$$K = -\frac{s(2s+1)}{(s-1)}$$

由  $dK/ds = 0$ ，得  $s^2 - 4s - 1 = 0$ ，解得  $s_1 = 2.2247, s_2 = -0.2247$ ，分别对应的增益为  $K = -9.8990$  和  $K = -0.1010$ ，所以是分离、会合点。可以证明，不在

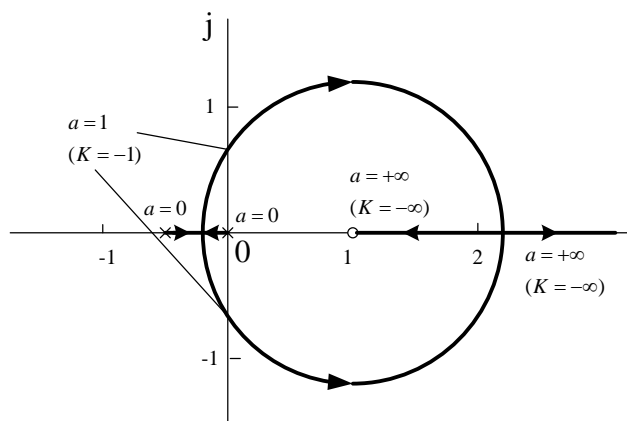


图 4-11a

实轴上的根轨迹是一个圆，圆心在  $(1, 0)$ ，半径为  $1.2227$ 。以  $K = -a$  为参变量的根轨迹如图 4-11a 所示，图中箭头表示  $a$  从  $0$  到  $+\infty$  的方向，也即  $K$  从  $0$  到  $-\infty$  的方向。

(3) 求  $a$  使闭环系统稳定的取值范围。首先求根轨迹与虚轴的交点。由闭环特征方程

$$2s^2 + (1+K)s - K = 0$$

可知， $K = -1$  时系统处于临界稳定状态，这相当于  $a = 1$ ，所以使闭环系统稳定的范围为  $0 < a < 1$ 。

4-12 实系参数多项式函数为：

$$A(s) = s^3 + 5s^2 + (6+a)s + a$$

欲使  $A(s)=0$  的根均为实数，试确定参数  $a$  的范围。

解：对  $A(s)=0$  作等效变换得

$$1 + \frac{a(s+1)}{s^3 + 5s^2 + 6s} = 0$$

等效开环函数为

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{a(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

当  $a > 0$  时，需绘制常规根轨迹：

系统开环有限零点为  $z_1 = -1$ ；开环有限极点为  $p_1 = 0$ ， $p_2 = -2$ ， $p_3 = -3$

实轴上的根轨迹区间为  $[-3, -2]$  和  $[-1, 0]$

根轨迹有 2 条渐近线，且

$$\sigma_a = -2；\varphi_a = 90^\circ, -90^\circ$$

由分离点方程

$$\frac{1}{d+1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3}$$

在实轴区间  $[-3, -2]$  内用试探法求得  $d = -2.47$ 。绘制根轨迹图，如图 4-12a 所示。

当  $a < 0$  时，需绘制零度根轨迹。实轴上，零度根轨迹区间为  $(-\infty, -3]$ ， $[-2, -1]$  和  $[0, +\infty]$ 。作零度根轨迹图，如图 4-12b 所示。

当多项式有根  $-2.47$  时，根据模值条件得

$$a = \frac{|d||d+2||d+3|}{|d+1|} = 0.419$$

根据常规根轨迹图，知当  $0 \leq a \leq 0.419$  时，多项式的根皆为实数；根据零度



根轨迹图，知当  $a < 0$  时，多项式的根亦全为实数。因此所求参数  $a$  的范围为  $a \leq 0.419$ 。

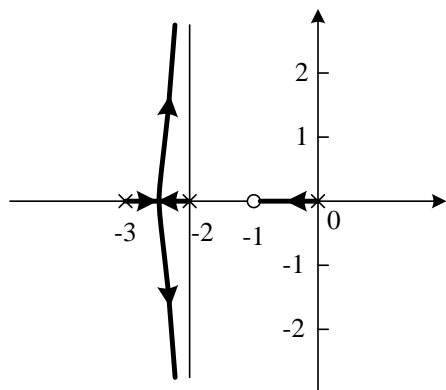


图 4-12a 常规根轨迹

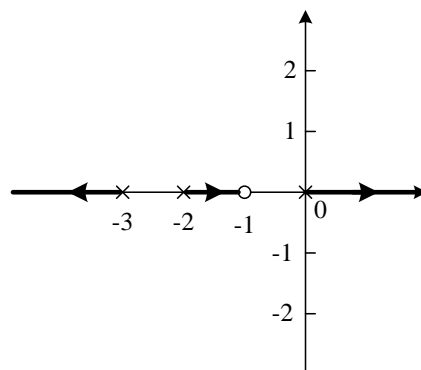


图 4-12b 零度根轨迹

4-13 设系统开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+10)}$$

(1) 大致画出系统的根轨迹图；

(2) 用文字说明当  $K < 0$  时，如何求系统单位阶跃响应的超调量  $\sigma\%$ ，峰值时间  $t_p$

及调节时间  $t_s$ 。

解：(1) 绘根轨迹图

渐近线：  $\sigma_a = \frac{-1-10}{3} = -3.67; \varphi_a = \pm 60^\circ, 180^\circ$

分离点：由  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+10} = 0$ ，得  $d = -0.487$

相应的根轨迹增益  $K_d = 2.377$

根轨迹与虚轴交点：闭环特征方程  $s^3 + 11s^2 + 10s + K = 0$

列劳斯表

$$\begin{array}{rcl}
 s^3 & 1 & 10 \\
 s^2 & 11 & K \\
 s^1 & \frac{110-K}{10} & 0 \\
 s^0 & K & 
 \end{array}$$

当  $K=110$  时, 劳斯表出现全零行, 由辅助方程  $11s^2 + 110 = 0$

得根轨迹与虚轴交点处为  $K=110, \omega = \pm 3.16$

根轨迹图如下图 4-13a 所示:

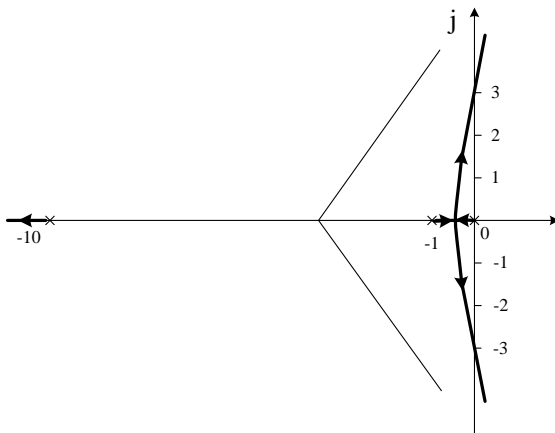


图 4-13a

## (2) 求动态性能指标

当  $0 < K < 2.377$  时, 系统  $\sigma\% = 0, t_p = 0$ , 闭环有两个实主导极点  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 且

$|\sigma_1| \leq |\sigma_2|$ , 因此求得调节时间如下:

$$t_s = \frac{4.75}{|\sigma_1|}, \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

$$t_s = \frac{3 - \ln\left(1 - \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_2|}\right)}{|\sigma_1|}, \quad \sigma_1 \neq \sigma_2$$

当  $2.377 < K < 100$  时, 闭环系统有一对共轭复极点, 则

$$t_p = \frac{\pi}{D}, \sigma\% = 100e^{-\sigma_1 t_p}, t_s = \frac{3 + \ln\left(\frac{A}{D}\right)}{\sigma_1}$$

由于  $D = \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $A = \omega_n$ ,  $\sigma_1 = \zeta \omega_n$ ,  $\ln\left(\frac{A}{D}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$

因此

$$\zeta = \frac{\sigma_1}{A}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1}{\omega_n} = \zeta$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \zeta \leq 0.5$$

4-14 设单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+2)}$$

试画出系统根轨迹图，并求出系统具有最小阻尼比时的闭环极点和对应的增益  $K$ 。

解：系统在实轴上的根轨迹区域为  $[0, -2]$  和  $[-4, -\infty)$

在这两段区域内，均存在分离点。为了求出分离点，令

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+4}$$

求出

$$d_1 = -4 + 2\sqrt{2} = -1.172$$

$$d_2 = -4 - 2\sqrt{2} = -6.828$$

因而复数根轨迹是以  $(-4, j0)$  为圆心， $2\sqrt{2}$  为半径的一个圆，如图 4-14a 所示

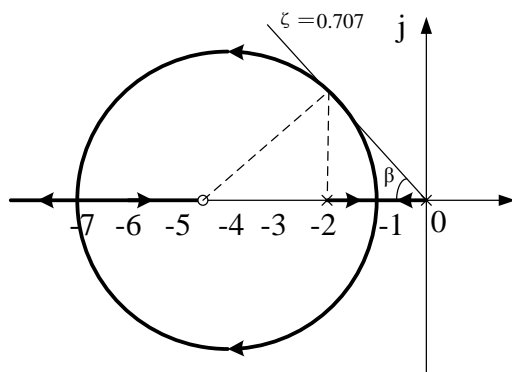


图 4-14a

在图上，过原点作圆得切线，得最小阻尼比线。由根轨迹图知，对于等腰直角三角形，必有

$$\beta = 45^\circ, \text{ 故最小阻尼比 } \zeta = \cos \beta = 0.707$$

响应的闭环极点  $s_{1,2} = -2 \pm j2$

由根轨迹模值条件，可求出相应的增益为

$$K = \frac{|-2 + j2| \cdot |-2 + j2 + 2|}{|-2 + j2 + 4|} = 2$$

4-15 已知单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+5)}$$

试按照步骤作出  $K^* \geq 0$  时的根轨迹图。

解：开环极点：  $p_1 = 0, p_2 = -4, p_{3,4} = -2 \pm j$

根轨迹在实轴上的区间  $[0, -4]$

根轨迹的渐近线  $n - m = 4, \sigma_a = -2, \varphi_a = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$

$$\text{分离点: } \frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} + \frac{1}{d+2+j} + \frac{1}{d+2-j} = 0$$

$$\text{即 } \frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} + \frac{2d+2}{d^2+4d+5} = 0$$

$$\text{整理得 } d^3 + 6d^2 + 10.5d + 5 = 0$$

$$\text{为了求取分离点方程的根，将上式表示为 } 1 + \frac{10.5(d+0.476)}{d^2(d+6)} = 0$$

$$\text{令等效开环传递函数为 } G_1(d) = \frac{K_1^*(d+0.476)}{d^2(d+6)}$$

其中  $K_1^* = 10.5$ 。若令  $K_1^*$  从 0 变到  $+\infty$ ，其根轨迹如图 4-15a 所示。图中，渐近线

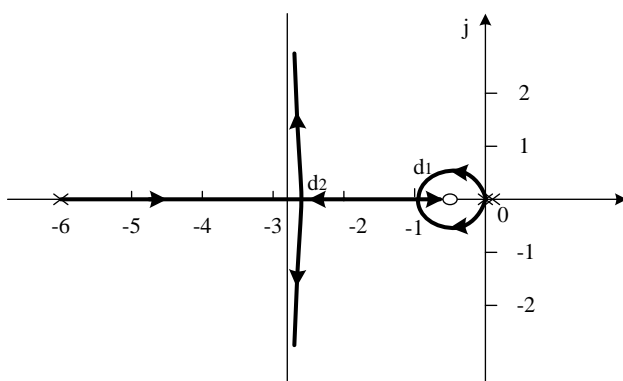


图 4-15a

$\sigma_a = -2.78, \varphi_a = \pm 90^\circ$ ; 分离点  $d_1' = -1.088, d_2' = -2.627$ 。

在图上, 试探  $d = -2$ , 检验模值条件  $K_1^* = \frac{2 \times 2 \times 4}{1.524} = 10.5$

故符合要求, 故  $d = -2$  为分离点方程的一个根。利用综合除法, 有

$$d^3 + 6d^2 + 10.5d + 5 = (d + 2)(d^2 + 4d + 2.5) = (d + 2)(d + 0.775)(d + 3.225) = 0$$

求得分离点  $d_1 = -0.775, d_2 = -2, d_3 = -3.225$

分离角为  $90^\circ$

根轨迹的起始角

$$\theta_{p_3} = 180^\circ + \left(-\sum_{j=1(j \neq 3)}^4 \angle(p_3 - p_j)\right) = 180^\circ + \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{2} - 180^\circ - 90^\circ = -90^\circ$$

$$\theta_{p_4} = 90^\circ$$

根轨迹与虚轴的交点: 闭环特征方程为  $s^4 + 8s^3 + 21s^2 + 20s + K^* = 0$

列劳斯表

$s^4$	1	21	$K^*$
$s^3$	8	20	
$s^2$	18.5	$K^*$	
$s^1$	$\frac{370 - 8K^*}{18.5}$	0	
$s^0$	$K^*$		

显然, 当  $K^* = 46.25$  时, 根轨迹和虚轴相交, 由辅助方程

$$18.5^2 + 46.25$$

求得交点处  $K^* = 46.25, \omega = \pm 1.58$

根据以上步骤，绘制系统根轨迹图 4-15b

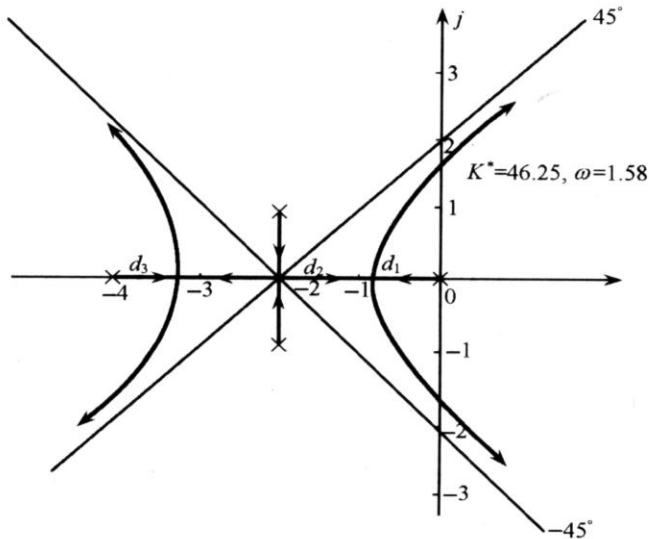


图 4-15b 根轨迹图

4-16 设某单位负反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{4K(1-s)}{s[(K+1)s+4]}$$

- (1) 绘制  $K$  从  $0 \rightarrow +\infty$  时系统的根轨迹图；
- (2) 求系统阶跃响应中含有  $e^{-at} \cos(\omega t + \beta)$  时的  $K$  值范围，其中  $a > 0, \omega > 0$ ；
- (3) 求系统有一个闭环极点为  $-2$  时的闭环传递函数。

解：绘制根轨迹图

闭环特征方程为

$$(s^2 + 4s) + K(s^2 - 4s + 4) = 0$$

写成根轨迹方程形式为：

$$1 + \frac{K(s-2)}{s(s+4)} = 0$$

令等效开环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{K(s-2)^2}{s(s+4)}$$

实轴上根轨迹:  $[-4, 0]$

分离点: 由  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} = \frac{2}{d-2}$  求得  $d = -1$

与虚轴交点: 列劳斯表

$s^2$	$K+1$	$4K$
$s^1$	$4-4K$	$0$
$s^0$	$4K$	

显然, 当时系统处于临界稳定, 由辅助方程并代入  $K=1$ , 解出交点处

$$K=1, \omega = \pm\sqrt{2}$$

分离点处根轨迹增益: 由模值条件得:  $K_d = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$

绘出系统根轨迹如图 4-16a 所示

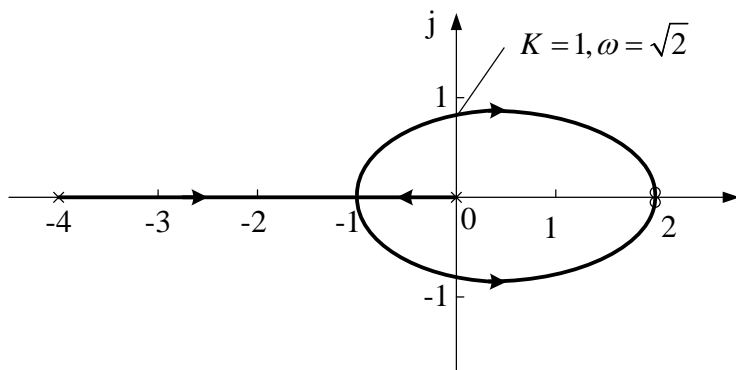


图 4-16a

(2) 求  $K$  值范围

当系统阶跃响应含有  $e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta)$  分量时, 系统处于欠阻尼状态, 系统有一对

具有负实部的共轭极点,  $K$  值范围为  $\frac{1}{3} < K < 1$

(3) 求闭环传递函数

当系统具有  $s_1 = -2$  闭环极点时，由模值条件，其对应的  $K$  值为  $K = \frac{2 \times 2}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$

于是  $G(s) = \frac{(1-s)}{s(\frac{5}{4}s+4)}$

闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{0.8(1-s)}{(s+0.4)(s+2)}$



5-1 设系统闭环稳定，闭环传递函数为  $\Phi(s)$ ，试根据频率特性的定义证明，输入为余弦函数  $r(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$  时，系统的稳态输出为

输入为余弦函数  $r(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$  时，系统的稳态输出为

$$c_{ss}(t) = A \cdot |\Phi(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi + \angle\Phi(j\omega)]$$

解：

由题目可得  $r(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\omega t \cos\varphi - A\sin\omega t \sin\varphi$

对等式两边同时进行拉氏变换可得

$$R(s) = A \frac{s \cos\varphi}{s^2 + \omega^2} - A \frac{\omega \sin\varphi}{s^2 + \omega^2} = A \frac{s \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

由于系统闭环稳定，所以  $\Phi(s)$  不存在正实部的极点。假设  $\Phi(s)$  可表示为如下表达式

下表达式

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{(s + s_1)(s + s_2)\cdots(s + s_n)}$$

由以上分析可得，系统的闭环传递函数为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{M(s)}{(s + s_1)(s + s_2)\cdots(s + s_n)} \cdot A \frac{s \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

对上述闭环传递函数作如下分解

$$C(s) = \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{s + s_i} + \frac{B_1}{s + j\omega} + \frac{B_2}{s - j\omega}$$

对上式等式两边进行拉氏反变换可得

$$c(t) = \sum_{i=1}^n D_i e^{-s_i t} + B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t}$$

由系统稳态输出的定义可得

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t}$$

利用留数法确定待定的系数  $B_1, B_2$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} A\Phi(s) \frac{s \cos\varphi - \omega \sin\varphi}{s - j\omega} = A |\Phi(j\omega)| e^{-j\angle\Phi(j\omega)} \left( \frac{\cos\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi}{2j} \right)$$

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow j\omega} A\Phi(s) \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s + j\omega} = A|\Phi(j\omega)| e^{j\angle\Phi(j\omega)} \left( \frac{\cos \varphi}{2} - \frac{\sin \varphi}{2j} \right)$$

所以可得

$$\begin{aligned} c_{ss}(t) &= A|\Phi(j\omega)| \left( \frac{\cos \varphi}{2} e^{-j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} + \frac{\sin \varphi}{2j} e^{-j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \varphi}{2} e^{j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} - \frac{\sin \varphi}{2j} e^{j[\omega t + \angle\Phi(j\omega)]} \right) \\ &= A|\Phi(j\omega)| \{ \cos \varphi \cos[\omega t + \angle\Phi(j\omega)] - \sin \varphi \sin[\omega t + \angle\Phi(j\omega)] \} \\ &= A|\Phi(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi + \angle\Phi(j\omega)] \end{aligned}$$

5-2 若系统阶跃响应为：

$$h(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t}$$

试确定系统频率特性

解：

单位阶跃输入信号的拉氏变换为  $R(s) = \frac{1}{s}$

系统单位阶跃响应的拉氏变换为

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9} = \frac{36}{s(s+4)(s+9)}$$

系统的闭环传递函数为  $G(s) = \frac{H(s)}{R(s)} = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$

将  $s = j\omega$  代入传递函数  $G(s)$  可得

$$G(j\omega) = \frac{36}{(j\omega+4)(j\omega+9)}$$

5-3 设系统结构图如图 5-1 所示，试确定输入信号

$$r(t) = \sin(t + 30^\circ) - \cos(2t - 45^\circ)$$

作用下，系统的稳态误差  $e_{ss}(t)$ 。

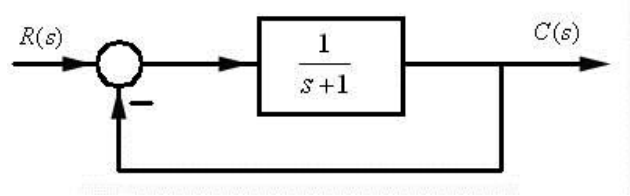


图 5-1 习题 5-3 控制系统结构图

解：

如图 5-1 所示，系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = 1 - \Phi(s) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{s+1}{s+2}$$

1: 备注：为什么稳态误差？

其幅频特性和相频特性分别为

$$|\Phi_e(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 + 1}{\omega^2 + 4}}, \varphi_e(j\omega) = \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{2}$$

当  $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - \cos(2t - 45^\circ) = \sin(t + 30^\circ) - \sin(2t + 45^\circ)$  时

$$\begin{aligned} e_{ss}(t) &= \sqrt{\frac{1+1}{1+4}} \sin(t + 30^\circ + \arctan 1 - \arctan \frac{1}{2}) - \sqrt{\frac{4+1}{4+4}} \sin(2t + 45^\circ + \arctan 2 - \arctan 1) \\ &= \frac{\sqrt{10}}{5} \sin(t + 30^\circ - 45^\circ - 26.5^\circ) - \frac{\sqrt{10}}{4} \sin(2t + 45^\circ - 63^\circ) \\ &= 0.63 \sin(t - 48.43^\circ) - 0.79 \sin(2t - 63^\circ) \end{aligned}$$

5-4 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}; \quad K, \tau, T > 0$$

试分析并绘制  $\tau > T$  和  $T > \tau$  情况下的概略幅相曲线。

解:

由题可知, 系统的频率特性如下

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(\tau j\omega + 1)}{(j\omega)^2(Tj\omega + 1)} = \frac{-K(\tau j\omega + 1)}{\omega^2(Tj\omega + 1)}$$

由于系统  $\nu = 2$ , 所以开环幅相曲线要用虚线补画  $180^\circ$  的半径为无穷大的圆弧

$$\text{当 } \omega = 0_+ \text{ 时, } G(j0_+)H(j0_+) = \frac{-K(\tau j0_+ + 1)}{0_+^2(Tj0_+ + 1)} = \infty, \varphi(0_+) = -180^\circ$$

$$\text{当 } \omega = +\infty \text{ 时, } G(j\infty)H(j\infty) = \frac{-K(\tau j\infty + 1)}{\infty^2(Tj\infty + 1)} = 0, \varphi(\infty) = -180^\circ$$

$$\text{又由于 } G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-K(\tau j\omega + 1)}{\omega^2(Tj\omega + 1)} = \frac{-K(\tau T\omega^2 + 1) + jK\omega(T - \tau)}{\omega^2(T^2\omega^2 + 1)}, \text{ 所以有}$$

当  $\tau > T$  时, 开环幅相曲线始终处于第三象限, 如图 5-4a 所示;

当  $T > \tau$  时, 开环幅相曲线始终处于第二象限, 如图 5-4b 所示。

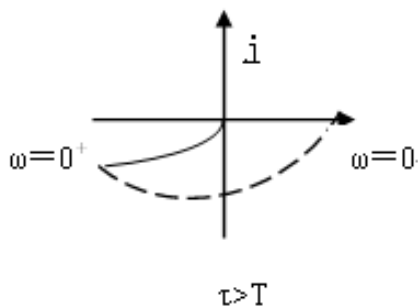


图 5-4a 开环幅相曲线

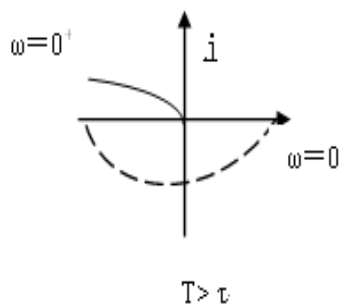


图 5-4b 开环幅相曲线

### 5-5 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^\gamma(s+1)(s+2)}$$

试分别绘制  $\gamma = 1, 2, 3, 4$  时系统的概略开环幅相曲线。

解:

由题目可知，系统的频率特性如下

$$G(\omega)H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{\nu}(j\omega+1)(\omega+2)}$$

当  $\nu=1$  时，开环幅相曲线要用虚线补画  $90^\circ$  的半径为无穷大的圆弧。

$$\text{若 } \omega=0_+, \text{ 则 } G(j0_+)H(j0_+) = \frac{1}{(0_+)^1(0_++1)(0_++2)} = \infty, \varphi(0_+) = -90^\circ$$

$$\text{若 } \omega=\infty, \text{ 则 } G(j\infty)H(j\infty) = \frac{1}{(\infty)^1(\infty+1)(\infty+2)} = 0, \varphi(\infty) = -270^\circ$$

由以上分析可知，系统概略开环幅相曲线如图 5-5a 所示。

当  $\nu=2$  时，开环幅相曲线要用虚线补画  $180^\circ$  的半径为无穷大的圆弧。

$$\text{若 } \omega=0_+, \text{ 则 } G(j0_+)H(j0_+) = \frac{1}{(0_+)^2(0_++1)(0_++2)} = \infty, \varphi(0_+) = -180^\circ$$

$$\text{若 } \omega=\infty, \text{ 则 } G(j\infty)H(j\infty) = \frac{1}{(\infty)^2(\infty+1)(\infty+2)} = 0, \varphi(\infty) = -360^\circ$$

由以上分析可知，系统概略开环幅相曲线如图 5-5a 所示。

当  $\nu=3$  时，开环幅相曲线要用虚线补画  $270^\circ$  的半径为无穷大的圆弧。

$$\text{若 } \omega=0_+, \text{ 则 } G(j0_+)H(j0_+) = \frac{1}{(0_+)^3(0_++1)(0_++2)} = \infty, \varphi(0_+) = -270^\circ$$

$$\text{若 } \omega=\infty, \text{ 则 } G(j\infty)H(j\infty) = \frac{1}{(\infty)^3(\infty+1)(\infty+2)} = 0, \varphi(\infty) = -420^\circ$$

由以上分析可知，系统概略开环幅相曲线如图 5-5a 所示。

当  $\nu=4$  时，开环幅相曲线要用虚线补画  $360^\circ$  的半径为无穷大的圆弧。

$$\text{若 } \omega=0_+, \text{ 则 } G(j0_+)H(j0_+) = \frac{1}{(0_+)^4(0_++1)(0_++2)} = \infty, \varphi(0_+) = -360^\circ$$

$$\text{若 } \omega=\infty, \text{ 则 } G(j\infty)H(j\infty) = \frac{1}{(\infty)^4(\infty+1)(\infty+2)} = 0, \varphi(\infty) = -540^\circ$$

由以上分析可知，系统概略开环幅相曲线如图 5-5a 所示。

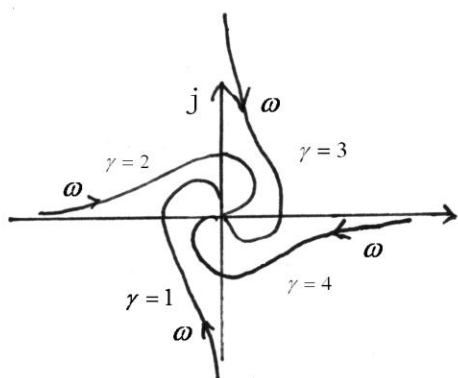


图 5-5a 系统开环幅相曲线

### 5-6 已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$$

试分别计算  $\omega = 0.5$  和  $\omega = 2$  时，开环频率特性的幅值  $A(\omega)$  和相位  $\varphi(\omega)$ 。

解：

系统的开环频率特性表达式如下

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{j\omega(2j\omega+1)(-\omega^2+0.5j\omega+1)} = \frac{10(2\omega^4 - 2.5\omega^2) - 10j(\omega - 2\omega^3)}{(2\omega^4 - 2.5\omega^2)^2 + (\omega + 2\omega^3)^2}$$

当  $\omega = 0.5$  时

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(2\omega^4 - 2.5\omega^2) - 10j(\omega - 2\omega^3)}{(2\omega^4 - 2.5\omega^2)^2 + (\omega + 2\omega^3)^2} \Big|_{\omega=0.5} = 16 - 8j$$

$$\text{此时 } A(\omega) = \sqrt{16^2 + 8^2} = 17.89, \varphi(\omega) = \arctan \frac{-8}{16} = -26.57^\circ$$

当  $\omega = 2$  时

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(2\omega^4 - 2.5\omega^2) - 10j(\omega - 2\omega^3)}{(2\omega^4 - 2.5\omega^2)^2 + (\omega + 2\omega^3)^2} \Big|_{\omega=2} = 0.32 + j0.21$$

$$\text{此时 } A(\omega) = \sqrt{0.32^2 + 0.21^2} = 0.38, \varphi(\omega) = \arctan \frac{0.21}{0.32} = 33.27^\circ$$

5-7 绘制下列传递函数的对数幅频渐进特性曲线

a. 
$$G(s) = \frac{1}{(1+0.5s)(1+2s)}$$

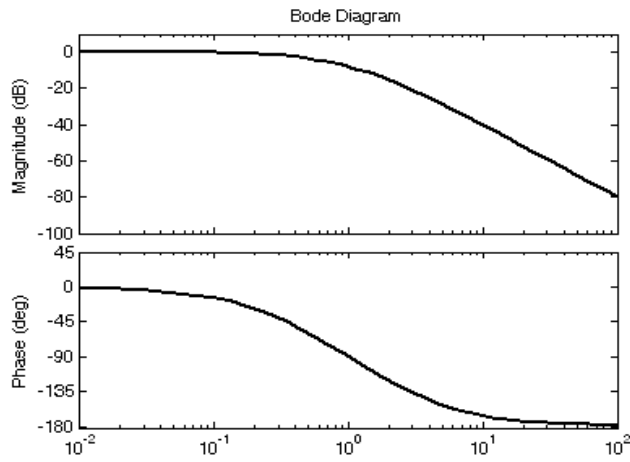


图 2-7a 对数幅频渐进特性曲线

b. 
$$G(s) = \frac{(1+0.5s)}{s^2}$$

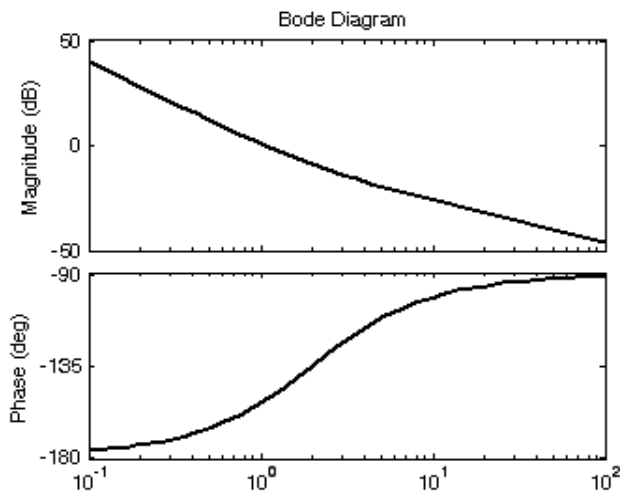
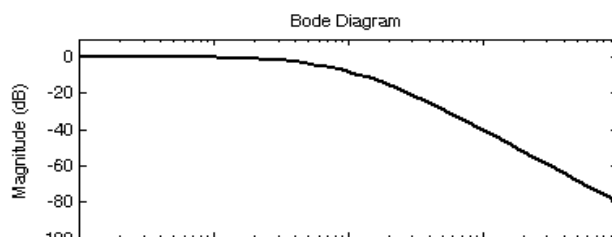


图 2-7b 对数幅频渐进特性曲线

c. 
$$G(s) = \frac{s-10}{s^2+6s+10}$$



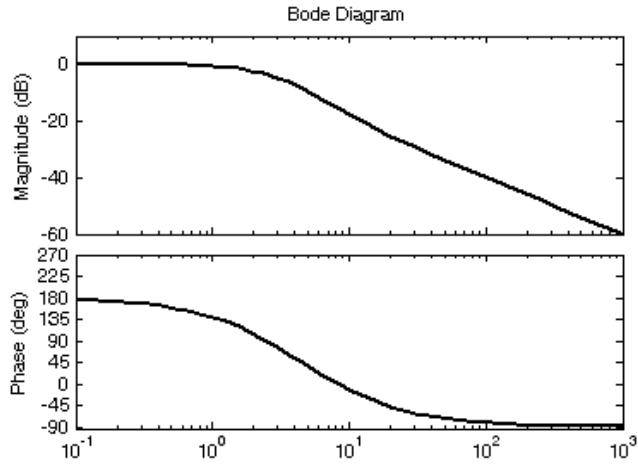


图 2-7c 对数幅频渐进特性曲线

d. 
$$G(s) = \frac{30(s+8)}{s(s+2)(s+4)}$$

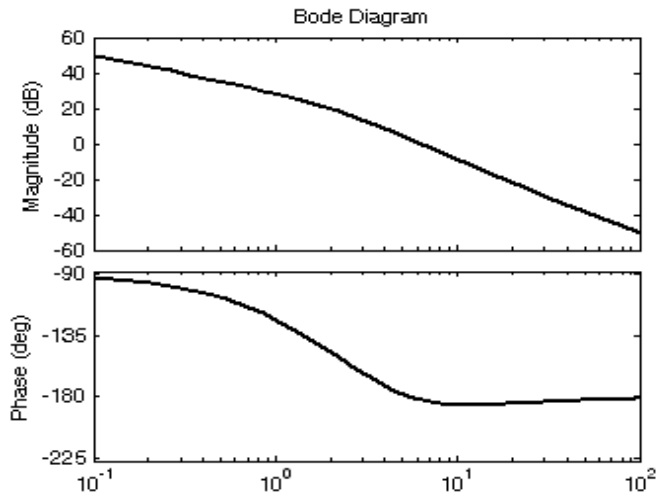


图 2-7d 对数幅频渐进特性曲线

### 5-8 已知系统开环传递函数



$$G(s) = \frac{K}{s(s/5+1)(s/200+1)}$$

试绘制  $K=10$  的对数频率特性曲线，并算出截止频率  $\omega_c$ 。

解：由题可得  $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega/5+1)(j\omega/200+1)}$

则

$$|G(j\omega)| = 10\omega^{-1} \left(1 + \frac{\omega^2}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\omega^2}{200^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega}{5} - \arctan \frac{\omega}{200}$$

因此  $20\ln|G(j\omega)| = 20 - 20\ln\omega - 10\ln\left(1 + \frac{\omega^2}{25}\right) - 10\ln\left(1 + \frac{\omega^2}{200^2}\right)$

对数频率特性曲线如图 5-8a 所示

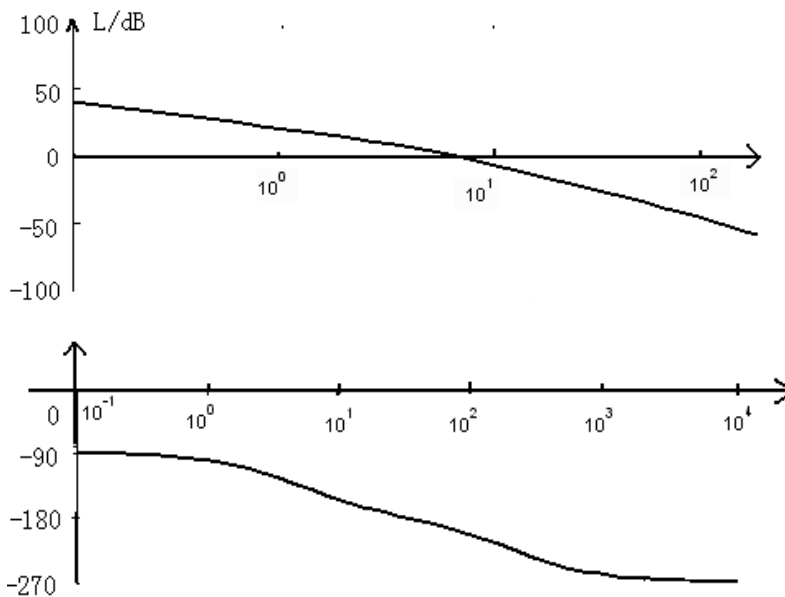


图 5-8a 对数频率特性曲线

又  $20\ln|G(j\omega)| = 0$ ，可得  $|G(j\omega)| = 1$ ，即  $10\omega^{-1} \left(1 + \frac{\omega^2}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\omega^2}{200^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1$

计算可得  $\omega_c = \sqrt{50} \text{ rad/s}$

5-9 已知系统开环传递函数为：

$$G(s)H(s) = \frac{50(s-2)}{s^2 + 11s + 10}$$

- 计算截止频率  $\omega_c$ 。
- 确定对数幅频渐进特性曲线的低频渐进线的斜率。
- 绘制对数幅频特性曲线。

解：  $G(s)H(s) = \frac{50(s-2)}{s^2 + 11s + 10} = \frac{50(s-2)}{(s+1)(s+10)}$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{50(j\omega-2)}{(j\omega+1)(j\omega+10)}$$

$$\begin{aligned} |G(j\omega)H(j\omega)| &= 50 \left( \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \right) + \frac{1}{\omega^2} \\ 20 \lg |G(j\omega)H(j\omega)| &= 20 \lg \left( \frac{50}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \right) + \frac{1}{\omega^2} \\ &= 20 \lg 50 - 10 \lg(\omega^2 + 1) - 10 \lg(\omega^2 + 100) \end{aligned}$$

计算可得  $\omega_c = 49 \text{ rad/s}$

当  $\omega < 1$  时，斜率为 0；

当  $1 < \omega < 2$  时，斜率为  $-20 \text{ dB/d}\omega$ ；

当  $2 < \omega < 10$  时，斜率为 0；

当  $\omega > 10$  时，斜率为  $-20 \text{ dB/d}\omega$ ；

绘制对数幅频特性曲线，如图 5-9a 所示。

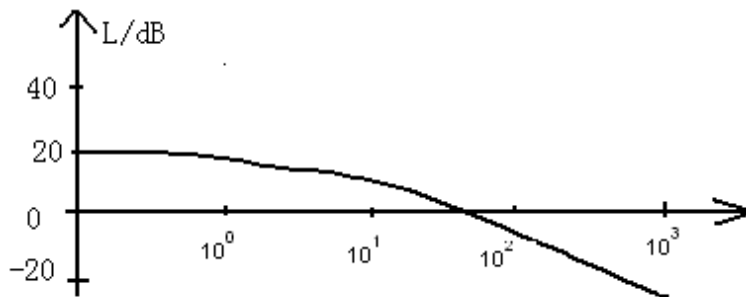


图 5-9a 对数幅频特性曲线

5-10 利用奈氏判据分别判断题 5-4, 5-5 系统的闭环稳定性。

解:

(1) 对于题 5-4 的系统, 分  $\tau > T$  和  $T > \tau$  的两种情况来讨论系统的闭环稳定性。

当  $\tau > T$  时, 系统的开环幅相曲线如图 5-4a 所示, 由图可知, 系统的开环幅相曲线不包围  $(-1, j0)$ , 根据奈奎斯特判据可得  $N = 0$

又由系统得开环传递函数可知  $P = 0$

即  $Z = P - 2N = 0$ , 闭环系统在  $s$  右半平面无极点,  $\tau > T$  时闭环系统稳定。

当  $T > \tau$  时, 系统的开环幅相曲线如图 5-4b 所示, 由图可知,  $N = -1$

又由系统得开环传递函数可知  $P = 0$

即  $Z = P - 2N = 2$ , 闭环系统在  $s$  右半平面有 2 个极点,  $T > \tau$  时闭环系统不稳定。

(2) 对于题 5-5 的系统, 其开环幅相曲线如图所示, 由图 5-5a 可知

当  $\nu = 1$  时,  $N = 0$ , 又由系统得开环传递函数可知  $P = 0$

即  $Z = P - 2N = 0$ , 闭环系统在  $s$  右半平面无极点,  $\nu = 1$  时闭环系统稳定。

当  $\nu = 2, 3, 4$  时,  $N = -1$ , 又由系统得开环传递函数可知  $P = 0$

即  $Z = P - 2N = 2$ , 闭环系统在  $s$  右半平面有 2 个极点,  $\nu = 2, 3, 4$  时闭环系统不稳定。

5-11 用劳斯判断据验证题 5-10 的结果。

解:

(1) 对于题 5-4 的系统, 由题得闭环系统特征方程为

$$Ts^3 + s^2 + K\tau s + K = 0$$

列劳斯表

$s^3$	T	$K\tau$
$s^2$	1	K
$s^1$	$T\tau - KT$	
$s^0$	K	

则当  $\tau > T$  时,  $K\tau - KT > 0$ , 即第一列各值为正, 即闭环系统稳定;

当  $\tau < T$  时,  $K\tau - KT < 0$ , 即第一列各值不全为正, 即闭环系统不稳定。

(2) 对于题 5-5 的系统, 由题得闭环系统特征方程为

$$s^r(s+1)(s+2)+1=0, \text{ 即 } s^{r+2} + 3s^{r+1} + 2s^r + 1 = 0$$

当  $r=1$  时, 列劳斯表

$s^3$	1	2
$s^2$	3	1
$s^1$	4	0
$s^0$	1	

第一列各值为正, 即闭环系统稳定;

当  $r=2$  时, 列劳斯表

$s^4$	1	2	1
$s^3$	3	0	
$s^2$	2		
$s^1$	$-\frac{3}{2}$		
$s^0$	0		

第一列各值不全为正, 即闭环系统不稳定;

当  $r=3,4$  时, 情况与  $r=2$  相同, 即闭环系统不稳定。

5-12 已知三个系统的开环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)},$$

$$G_2(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)},$$

$$G(s) = \frac{K(T_2s+1)(T_4s+1)}{s^3(T_1s+1)(T_3s+1)}, \quad (T_1 > 0, T_2 > 0, T_3 > 0, T_4 > 0)$$

又知它们的奈奎斯特曲线如图 5-2(a)(b)(c)所示。找出各个传递函数分别对应的奈奎斯特曲线，并判断单位反馈下闭环系统的稳定性

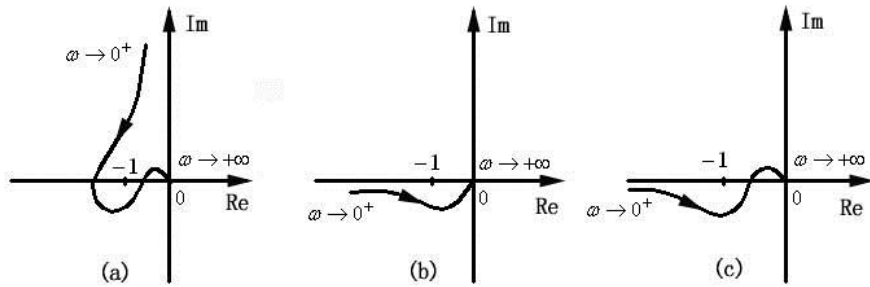


图 5-2 习题 5-12 控制系统乃奎斯特曲线图

解：三个传递函数对应的奈奎斯特曲线分别为  $b, c, a$

对  $G_1(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$  式， $P=0$ ， $N=0$

则  $Z = P - 2N = 0$ ，故系统稳定；

对  $G_2(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$  式， $P=0$ ， $N=0$

则  $Z = P - 2N = 0$ ，故系统稳定；

对  $G(s) = \frac{K(T_2s+1)(T_4s+1)}{s^3(T_1s+1)(T_3s+1)}$  式， $P=0$ ， $N=0$

则  $Z = P - 2N = 0$ ，故系统稳定；

5-13 已知系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(s+1)}; \quad K, T > 0$$

试根据奈氏判据，确定其闭环稳定条件：

- $T = 2$  时， $K$  值的范围；
- $K = 10$  时， $T$  值的范围；
- $K, T$  值的范围。

解：

由系统的开环传递函数可知，系统的开环曲线图如图 5-13a 所示

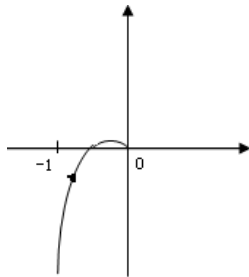


图 5-13a 系统开环曲线

由于  $P = 0$ ，故想要闭环系统稳定，必有  $N = 0$ ，即幅相曲线不包围点  $(-1, j0)$ 。

系统的频率特性表达式如下

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)(j\omega+1)} = \frac{-K\omega^2(T+1) + jK\omega(T\omega^2-1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2-1)^2}$$

a、 $T = 2$  时，对于开环幅相曲线与实轴的交点有

$$\frac{K\omega(T\omega^2-1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2-1)^2} = \frac{K\omega(2\omega^2-1)}{9\omega^4 + \omega^2(2\omega^2-1)^2} = 0$$

由上式可得  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则交点的实轴坐标为

$$\frac{-K\omega^2(T+1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2-1)^2} = \frac{-3K\omega^2}{9\omega^4 + \omega^2(2\omega^2-1)^2} > -1$$

由上式可得  $0 < K < \frac{3}{2}$

b、 $K=10$ 时，对于开环幅相曲线与实轴的交点有

$$\frac{K\omega(T\omega^2 - 1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2 - 1)^2} = \frac{10\omega(T\omega^2 - 1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2 - 1)^2} = 0$$

由上式可得  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T}}$ ，则交点的实轴坐标为

$$\frac{-K\omega^2(T+1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2 - 1)^2} = \frac{-10\frac{1}{T}(T+1)}{(T+1)^2\frac{1}{T^2} + \frac{1}{T}(T\frac{1}{T} - 1)^2} > -1$$

由上式可得  $0 < T < \frac{1}{9}$

c、对于开环幅相曲线与实轴的交点有

$$\frac{K\omega(T\omega^2 - 1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2 - 1)^2} = \frac{K\omega(T\omega^2 - 1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2 - 1)^2} = 0$$

由上式可得  $\omega = \frac{1}{\sqrt{T}}$ ，则交点的实轴坐标为

$$\frac{-K\omega^2(T+1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2 - 1)^2} = \frac{-K\frac{1}{T}(T+1)}{(T+1)^2\frac{1}{T^2} + \frac{1}{T}(T\frac{1}{T} - 1)^2} > -1$$

由上式可得  $0 < K < \frac{T+1}{T}, 0 < T < \frac{1}{K-1}$

5-14 某系统的开环传递函数为

$$Q(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$$

要求画出以下 4 种情况下的奈奎斯特曲线，并判断闭环系统的稳定性：

- $T_2 = 0$ ;
- $0 < T_2 < T_1$ ;
- $0 < T_2 = T_1$ ;

d.  $0 < T_1 < T_2$ 。

解:

a. 当  $T_2 = 0$  时,  $Q(s) = \frac{K}{s^2(T_1s+1)}$ ,

其开环幅相曲线如图 5-14a 所示,  $P=0$ ,  $N=-1$

则  $Z = P - 2N = 2$ , 故在  $s$  平面右半平面有 2 个闭环极点, 闭环系统不稳定;

b. 当  $0 < T_2 < T_1$  时,  $Q(j\omega) = \frac{K(jT_2\omega+1)}{-\omega^2(1+jT_1\omega)} = \frac{K(1+T_1T_2\omega^2) + K\omega(T_2-T_1)}{-\omega^2(1+T_1^2\omega^2)}$

若  $\omega = 0_+$ , 则  $|Q(j0_+)| = \infty, \varphi(0_+) = -180^\circ$

若  $\omega = +\infty$ , 则  $|Q(j0_+)| = 0, \varphi(0_+) = -180^\circ$

其开环幅相曲线如图 5-14b 所示,  $P=0$ ,  $N=-1$

则  $Z = P - 2N = 2$ , 故系统不稳定;

c. 当  $0 < T_2 = T_1$  时,  $Q(s) = \frac{K}{s^2}$

若  $\omega = 0_+$ , 则  $|Q(j0_+)| = \infty, \varphi(0_+) = -180^\circ$

若  $\omega = +\infty$ , 则  $|Q(j0_+)| = 0, \varphi(0_+) = -180^\circ$

其开环幅相曲线如图 5-14c 所示,  $P=0$ ,  $N=-\frac{1}{2}$

则  $Z = P - 2N = 1$ , 故系统不稳定;

d. 当  $0 < T_1 < T_2$  时,  $Q(j\omega) = \frac{K(jT_2\omega+1)}{-\omega^2(1+jT_1\omega)} = \frac{K(1+T_1T_2\omega^2) + K\omega(T_2-T_1)}{-\omega^2(1+T_1^2\omega^2)}$

由  $0 < T_1 < T_2$  可得  $\text{Re}[Q(j\omega)] < 0, \text{Im}[Q(j\omega)] < 0$

故可得其开环幅相曲线如图 5-14d 所示,  $P=0$ ,  $N=0$



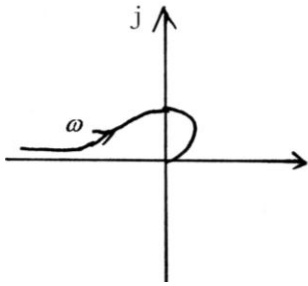


图 5-14a 开环幅相曲线

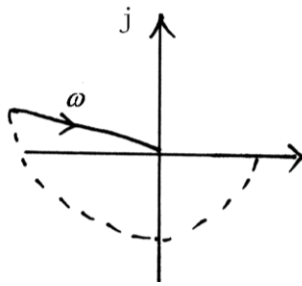


图 5-14b 开环幅相曲线

则  $Z = P - 2N = 0$ ，故系统稳定。

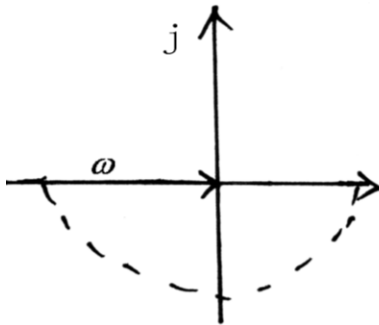


图 5-14c 开环幅相曲线

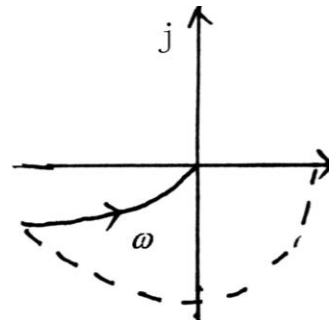


图 5-14d 开环幅相曲线

5-15 已知反馈控制系统的开环传递函数为

$$Q(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}, \quad (T_1, T_1, T_1, T_1 > 0)$$

如果闭环系统不稳定，闭环传递函数会有几个极点在复数平面的右半平面？

解：

$$|Q(j\omega)| = K\omega^{-1}(T_1^2\omega^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(T_2^2\omega^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(T_3^2\omega^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(T_4^2\omega^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan T_1\omega - \arctan T_2\omega - \arctan T_3\omega - \arctan T_4\omega$$

当  $\omega \rightarrow 0$  时， $|Q(j\omega)| = \infty, \varphi(\omega) = -90^\circ$

当  $\omega \rightarrow \infty$  时， $|Q(j\omega)| = 0, \varphi(\omega) = -450^\circ$

由于系统不稳定，故可得其开环幅相曲线如图 5-15a 所示

由图可得  $P=0$ ， $N=-1$

则  $Z=P-2N=2$ ，故闭环传递函数有 2 个极点在复数平面的右半平面。

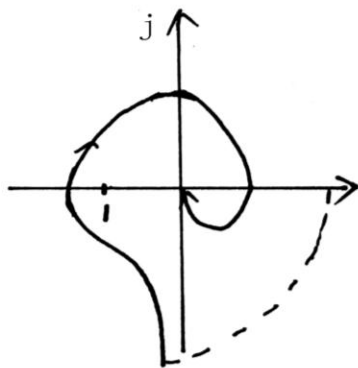


图 5-15a 开环幅相曲线

5-16 设控制系统的结构图如图 5-3 所示。

- 求出开环传递函数；
- 画出对数相频特性曲线；
- 求出临界开环比例  $K_c$  和截止频率  $\omega_c$ ；
- 用奈氏判据判断该系统是否稳定，如果稳定再分别求出当输入信号  $u(t)=1(t)$  和  $u(t)=t$  的情况下系统的静态误差。

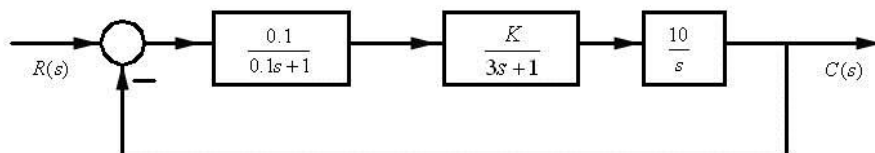


图 5-3 习题 5-16 控制系统结构图

解:

(a) 系统开环传递函数为  $G(s) = \frac{0.1}{0.1s+1} \cdot \frac{K}{3s+1} \cdot \frac{10}{s} = \frac{10}{s(1+3s)(1+0.1s)}$

(b)  $\varphi(\omega) = 0 - 90^\circ - \arctan 3\omega - \arctan 0.1\omega$

$\omega \rightarrow 0, \varphi(\omega) = 0 - 90^\circ - 0 - 0 = -90^\circ$

$\omega \rightarrow \infty, \varphi(\omega) = 0 - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = -270^\circ$

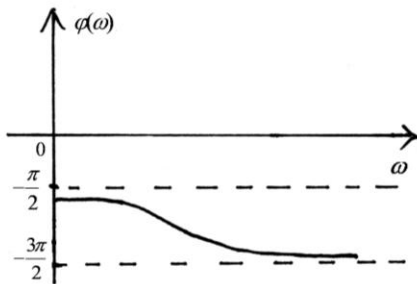


图 5-16a

(c)  $A(\omega) = \frac{K}{-\omega\sqrt{1+9\omega^2} \cdot \sqrt{1+0.01\omega^2}}$

$\omega \rightarrow 0, A(0) = \infty$

$\omega \rightarrow \infty, A(\infty) = 0$

系统开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K[-(T_1 + T_2)\omega + j(-1 + T_1T_2\omega^2)]}{\omega(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}$$

与实轴的交点  $\omega_x = \frac{1}{\sqrt{0.1 \times 3}} = 1.826$

$$G(j\omega_x)H(j\omega_x) = \text{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = -\frac{K3 \times 0.1}{3 + 0.1} = -\frac{0.3K}{3.1}$$

故幅相曲线为

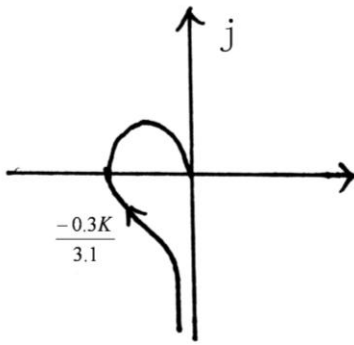


图 5-16b

当  $G(j\omega_x)H(j\omega_x) = 1$  时, 系统临界稳定, 得  $K_c = 10, \omega_c = \omega_x = 1.826$

当  $-\frac{0.3K}{3.1} > -1$  时,  $Z = P - 2N = 0 - 0 = 0$ , 系统稳定

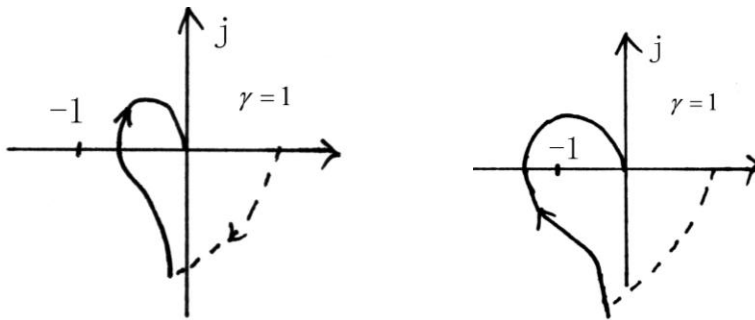


图 5-16c

当  $-\frac{0.3K}{3.1} < -1$  时,  $Z = P - 2N = 0 - (0 - 1) = 1$ , 系统不稳定

当  $u(t) = 1(t)$  时,  $e_{ss} = 0$ ,

当  $u(t) = t$  时,  $e_{ss} = R/K = 0.1$

5-17 已知某最小相位系统的开环对数幅频特性如图 5-4 所示。

- 写出其开环传递函数;
- 画出其相频特性草图, 并从图上求出和标明相角裕度和幅值裕度;
- 求出该系统达到临界稳定时的开环比例系数值  $K$ ;

d. 在复数平面上画出其奈奎斯特曲线，并标明点  $-1+j0$  的位置。

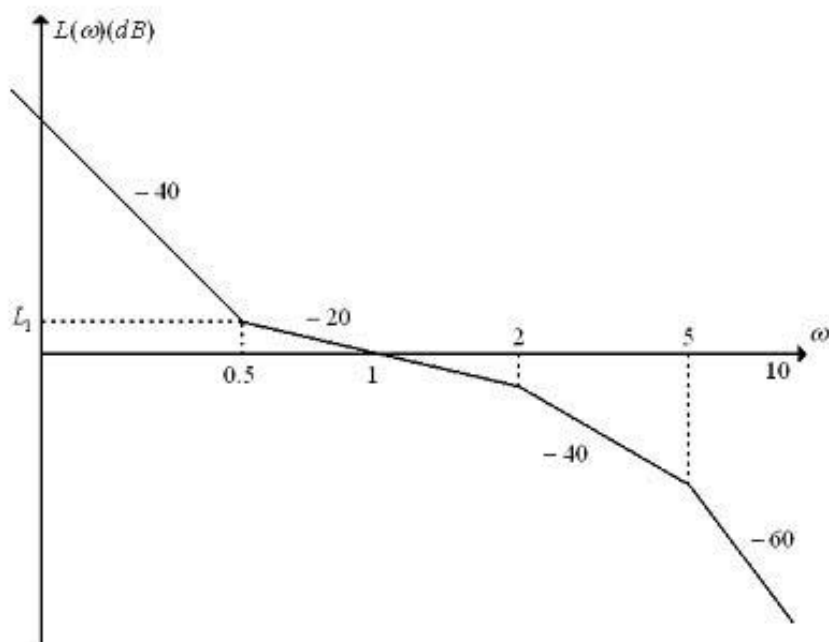


图 5-4 习题 5-17 控制系统结构图

解：

(1) 确定系统积分或微分环节的个数。因对数幅频渐近特性曲线的低频渐近线的斜率为  $-20\gamma dB/dec$ ，由图，低频渐近斜率为  $-40dB/dec$ ，故  $\gamma = 2$ ，系统含有 2 个积分环节。

(2) 确定系统传递函数结构形式。由于对数幅频渐近特性曲线为分段折线，其各转折点对应的频率为所含一阶或二阶环节的交接频率，每个交接频率处斜率的变化取决于环节的种类。

$\omega = \omega_1 = 0.5$  处，斜率变化  $20dB/dec$ ，对应微分环节；

$\omega = \omega_2 = 2$  处，斜率变化  $-20dB/dec$ ，对应惯性环节；

$\omega = \omega_2 = 5$  处，斜率变化  $-20dB/dec$ ，对应惯性环节。

因此，所测系统具有下述传递函数

$$G(s) = \frac{K(1+T_1s)}{s^2(1+T_2s)(1+T_3s)} = \frac{K(1+\frac{1}{\omega_1}s)}{s^2(1+\frac{1}{\omega_2}s)(1+\frac{1}{\omega_3}s)}$$

其中  $K$  待定。

(3) 低频渐近线方程为

$$L_a(\omega) = 20 \ln \frac{K}{\omega^\gamma} = 20 \ln K - 20\gamma \ln \omega = 20 \ln K - 40 \ln \omega$$

由给定点  $(\omega, L_a(\omega)) = (0.5, 8)$ , 得  $K = 10$

$$\text{故所测系统传递函数为 } G(s) = \frac{10(1+2s)}{s^2(1+0.5s)(1+0.2s)}$$

5-18 设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

试确定相角裕度为  $45^\circ$  时的参数值。

解:

$$\text{系统的频率特性表达式为 } G(j\omega) = \frac{ja\omega+1}{-\omega^2}$$

设系统的截止频率为  $\omega_c$ , 则由相角裕度的定义可得

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + \arctan a\omega_c - 180^\circ = \arctan a\omega_c = 45^\circ$$

$$\text{即 } a\omega_c = 1$$

$$\text{又由于 } |G(j(\omega_c))| = \frac{\sqrt{(a\omega_c)^2+1}}{\omega_c^2} = \frac{\sqrt{2}}{\omega_c^2} = 1$$

$$\text{由上式得 } \omega_c = 1.19$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{\omega_c} = 0.84$$

5-19 若高阶系统的时域指标为  $18\% \leq \sigma\% \leq 25\%$  ,  $0.1 \leq t_s \leq 0.2$  , 试根据经验公式确定系统的截止频率和相角裕度的范围。

解: 根据经验公式,

$$\sigma = 0.16 + 0.4 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)$$

$$t_s = \frac{K_0 \pi}{\omega_c}$$

根据题意有,  $18\% \leq 0.16 + 0.4 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) \leq 25\%$

$$0.1 \leq \frac{K_0 \pi}{\omega_c} \leq 0.2$$

可求得  $54.7^\circ \leq \gamma \leq 72.2^\circ$  ,  $39.02 \leq \omega_c \leq 65.35$

5-20 典型二阶系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

若已知  $10\% \leq \sigma\% \leq 30\%$  , 试确定相角裕度  $\gamma$  的范围; 若给定  $\omega_n = 10$  , 试确定系统带宽  $\omega_b$  的范围。

解: 由于  $\sigma = 0.16 + 0.4 \left( \frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)$  且  $10\% \leq \sigma\% \leq 30\%$  ,

可解得  $39.1^\circ \leq \gamma \leq 58.6^\circ$

而根据题意  $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = \arctan(2\xi(\sqrt{4\xi^2 + 1} - 2\xi^2)^{-\frac{1}{2}})$

又有  $\omega_b = \omega_n((1 - 2\xi^2) + \sqrt{(1 - 2\xi^2) + 1})^{\frac{1}{2}}$  , 且  $\omega_n = 10$

故计算可得:  $11.61 \leq \omega_b \leq 14.11$

5-21 设二阶系统如图 5-5(a)所示。若分别加入测速反馈校正,  $0.1 \leq K_f \leq 1.5$  (图

5-5(b)) 和比例-微分校正,  $0.1 \leq K_d \leq 1.5$  (图 5-5(c)), 并设  $\omega_n = 1$ ,  $\xi = 0.2$ , 试确定各种情况下相角裕度  $\gamma$  的范围, 并加以比较。

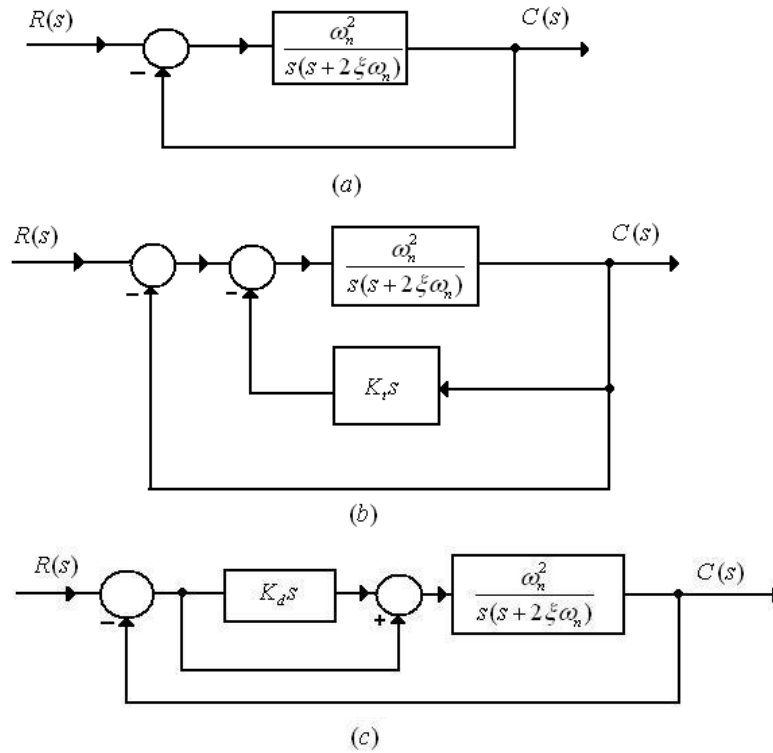


图 5-5 习题 5-21 控制系统结构图

解: (a)由题意可知系统开环频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n)}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{(1 + \omega^2/4\xi^2\omega_n^2)^{1/2}} \cdot \frac{\omega_n}{2\xi}, \quad \varphi(\omega) = 0 - \arctan \frac{1}{2\xi\omega_n} \omega - \frac{\pi}{2},$$

设  $\omega_c$  为截止频率, 当  $\omega = \omega_c$  时, 则有

$$A(\omega_c) = \frac{1}{\omega_c} \cdot \frac{1}{(1 + \omega_c^2/4\xi^2\omega_n^2)^{1/2}} \cdot \frac{\omega_n}{2\xi} = 1$$

和



$$\varphi(\omega_c) = 0 - \arctan \frac{1}{2\xi\omega_n} \omega_c - \frac{\pi}{2}$$

把  $\omega_n = 1, \xi = 0.2$  代入上式, 得:

$$\omega_c = 0.9608, \quad \varphi(\omega_c) = -157.4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 157.4^\circ = 22.6^\circ$$

(b) 由题意可知系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n + K_t\omega_n^2)}$$

其开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n + K_t\omega_n^2)}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{2\xi\omega_n + K_t\omega_n^2}\right)^2 \cdot \omega^2\right]^{1/2}} \cdot \frac{\omega_n}{2\xi + K_t\omega_n}$$

$$\varphi(\omega) = 0 - \arctan \frac{1}{2\xi\omega_n + K_t\omega_n^2} \omega - \frac{\pi}{2}$$

设  $\omega_c$  为截止频率, 当  $\omega = \omega_c$  时, 则有

$$A(\omega_c) = \frac{1}{\omega_c} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{2\xi\omega_n + K_t\omega_n^2}\right)^2 \cdot \omega_c^2\right]^{1/2}} \cdot \frac{\omega_n}{2\xi + K_t\omega_n} = 1$$

和

$$\varphi(\omega_c) = 0 - \arctan \frac{1}{2\xi\omega_n + K_t\omega_n^2} \cdot \omega_c - \frac{\pi}{2}$$

把  $\omega_n = 1, \xi = 0.2$ , 设  $K_t = 0.6$ , 代入上式, 得:

$$\omega_c = 0.7862, (K_t = 0.6), \quad \varphi(\omega_c) = -128.17^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 51.83^\circ$$

(c) 由题意可知系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(K_d s + 1)}{s(s/2\xi\omega_n + 1)}, \text{ 其中 } K = \omega_n/2\xi$$

其开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(jK_d\omega + 1)}{j\omega(j\omega/2\xi\omega_n^2 + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{1+K_d^2\omega^2}}{\omega\left(1+\frac{\omega^2}{4\xi^2\omega_n^2}\right)^{1/2}}, \quad \varphi(\omega) = 0 - \arctan \frac{1}{2\xi\omega_n} \cdot \omega + \arctan K_d\omega - \frac{\pi}{2}$$

设  $\omega_c$  为截止频率, 当  $\omega = \omega_c$  时, 则有

$$A(\omega_c) = \frac{K\sqrt{1+K_d^2\omega_c^2}}{\omega_c\left(1+\frac{\omega_c^2}{4\xi^2\omega_n^2}\right)^{1/2}} = 1$$

和

$$\varphi(\omega_c) = 0 - \arctan \frac{1}{2\xi\omega_n} \cdot \omega_c + \arctan K_d\omega_c - \frac{\pi}{2}$$

把  $\omega_n = 1, \xi = 0.2$ , 设  $K_d = 1$ , 代入上式, 得:

$$\omega_c = 1.226, (K_d = 1), \quad \varphi(\omega_c) = -111.1^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 68.9^\circ$$

5-22 已知单位反馈系统的开环幅相特性曲线如图 5-6 所示。当  $K = 50$  时, 系统

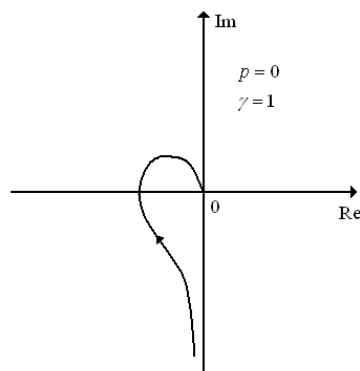
幅值裕度  $h = 1$ , 穿越频率  $\omega_c = 1$ ,

求输入为  $r(t) = t^2 + 5\sin\omega_c t$ , 幅

裕度为下述值时, 系统的稳态误差。

a.  $h = 0.5$

b.  $h = 3$



试  
值  
差。

图 5-6 习题 5-22 控制系统结构图

解：设系统开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K(1+T_2s)}{s(1+T_1s)}$$

开环系统幅频特性为：

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}$$

系统的开环频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{K[-(T_1+T_2)\omega - j(1-T_1T_2\omega^2)]}{\omega(1+T_1^2\omega^2)}$$

解得  $\omega_x = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$

当  $\omega = \omega_g = 1$  有  $\omega_x = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}} = 1$ ,  $\frac{50\sqrt{1+T_2^2}}{\sqrt{1+T_1^2}} = 1$

得  $T_2 = 0.02, T_1 = 50$

则系统开环传递函数可写成

$$G(s) = \frac{K(1+0.02s)}{s(1+50s)}$$

系统与实轴的交点为  $G(j\omega_x) = -KT_2 = -0.02K$

当  $h=0.5$  时,  $K=100$ ,  $e_{ss}=1/100=0.01$

当  $h=3$  时,  $K=16.7$ ,  $e_{ss}=1/16.7=0.05$

5-23 设单位反馈系统如图 5-7 所示。其中,  $K=10$ ;  $T=0.1$  时, 截止频率  $\omega_c=5$ ,

若要求  $\omega_c$  不变, 问  $K$  与  $T$  如何变化才能使系统相角裕度提高至  $45^\circ$ ?

解: 开环系统幅频特性为:

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{(1+T^2\omega^2)}}{(1+\omega^2)^{1/2}} \cdot A_1(\omega)$$

相频特性为:

$$\varphi(\omega) = 0 + \arctan T\omega - \arctan \omega + \varphi_1(\omega)$$

当  $\omega = \omega_c$  时,

$\varphi(\omega_c) = 0 + \arctan T\omega_c - \arctan \omega_c + \varphi_1(\omega_c)$ , 把  $K=10; T=0.1; \omega_c=5$  代入得:

$$\varphi(\omega_c) = 0^\circ + 26.57^\circ - 78.69^\circ + \varphi_1(\omega_c)$$

$$\therefore \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

若要求相角提高  $45^\circ$ , 即要求  $\varphi(\omega_c)$  提高  $45^\circ$ , 设调整后的系统相频特性为:

$$\varphi(\omega_c) = 0^\circ + (26.57^\circ + 45^\circ) - 78.69^\circ + \varphi_1(\omega_c)$$

$\therefore$  调整后的  $T$  值为:  $[\tan(26.57^\circ + 45^\circ)]/\omega_c = 0.6$ ,  $K$  值不做调整。

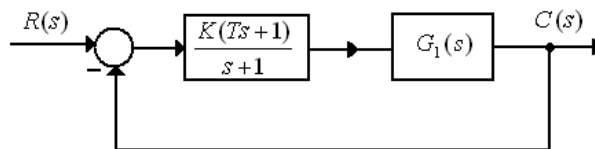


图 5-7 习题 5-23 单位反馈系统结构图

5-24 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s(s+1)}$$

试绘制系统的对数频率特性曲线，并据此确定：

- a. 求  $K=1$  时的相角裕度；
- b. 求  $K=20$  时的幅值裕度；

(1)解： 开环系统幅频特性为：

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

令  $A(\omega)=1$ ，当  $K=1$  时，得  $\omega_c = 0.75$

开环系统相频特性为：

$$\varphi(\omega) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arctan \omega, \text{ 当 } \omega = \omega_c \text{ 时, 有}$$

$$\varphi(\omega_c) = 0 - \frac{\pi}{2} - \arctan 0.75 = -126.9^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 53.1^\circ$$

(2) 解： 开环系统的频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{20[(\sin 0.1\omega + \omega \cos 0.1\omega) + j(\cos 0.1\omega - \omega \sin 0.1\omega)]}{-\omega(1+\omega^2)} \text{ 令其虚部为零, 即}$$

$$\cos 0.1\omega - \omega \sin 0.1\omega = 0$$

$$\tan 0.1\omega = 1/\omega$$

得  $\omega_x = 25$

$$|G(j\omega_x)| = \frac{20[(\sin 0.1\omega_x + \omega_x \cos 0.1\omega_x)]}{\omega_x(1+\omega_x^2)} = 0.03$$

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_x)|} = 33.3$$

5-25 若单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$$

试确定使系统稳定的  $K$  值。

解:

系统的频率特性表达式为  $G(j\omega) = \frac{Ke^{-0.8j\omega}}{j\omega+1}$

由上式可得, 系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+1}}, \varphi(\omega) = -\arctan \omega - 0.8\omega$$

系统临界稳定时开环幅相曲线穿过点  $(-1, j0)$ , 此时

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+1}} = 1, \varphi(\omega) = -\arctan \omega - 0.8\omega = -180^\circ$$

由上式可得,  $\omega = 2.45K = \sqrt{2.45^2 - 1} = 2.2$

显然, 当  $0 < K < 2.65$  时, 由奈奎斯特稳定判据可得系统闭环稳定。

故  $K$  的取值范围为  $0 < K < 2.65$

### 5-26 设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{5s^2 e^{-\tau s}}{(s+1)^4}$$

试确定闭环系统稳定时, 延迟时间  $\tau$  的范围。

解:

系统的频率特性表达式为  $G(j\omega) = \frac{-5\omega^2 e^{-j\tau\omega}}{(j\omega+1)^4}$

由上式可得, 系统的幅频特性和相频特性分别为

$$|G(j\omega)| = \frac{5\omega^2}{(\omega^2+1)^2} \quad \varphi(\omega) = 180^\circ - 4 \arctan \omega - \tau\omega \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

系统临界稳定时开环幅相曲线穿过点  $(-1, j0)$ ，此时

$$|G(j\omega)| = \frac{5\omega^2}{(\omega^2+1)^2} = 1, \varphi(\omega) = 180^\circ - 4 \arctan \omega - \tau\omega \times \frac{180^\circ}{\pi} = -180^\circ$$

由幅频特性可得  $\omega^2 + 1 = \sqrt{5}\omega$

解之可得  $\omega_1 = 1.618, \omega_2 = 0.618$  (舍去)

又  $\varphi(\omega_1) = 180^\circ - 4 \arctan 1.618 - \tau 1.618 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -180^\circ$  即  $\tau = 1.37$

显然，当  $0 < \tau < 1.37$  时，由奈奎斯特稳定判据可得系统闭环稳定。故  $\tau$  的取值范围为

$$0 < \tau < 1.37$$

6-1 设单位反馈系统开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)}$$

试设计一无源校正网络，使已校正系统的相角裕度不小于 $45^\circ$ ，截止频率不低于50。

解：

作待校正系统对数幅频特性 $L'(\omega)$ ，如图6-1a所示，得 $\omega_c' = 40, \gamma' = 14^\circ$ ，故应选择超前网络。

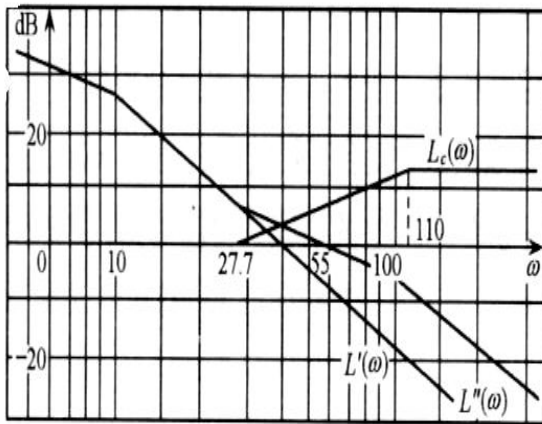


图 6-1a 系统特性

取  $\omega_c'' = \omega_m = 55$ ，量得  $L'(\omega) = -10$  dB，由  $10 \text{ dB} = 20 \log a$ ，求得

$$a = 4, T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = 0.009$$

取无源超前网络  $aG_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} = \frac{1+0.036s}{1+0.009s}$

将放大增益提高 4 倍，作校正后系统  $L''(\omega)$ ，见图 6-1a，得满足设计要求得如下指标：

$$\omega_c = 55, \quad \gamma(\omega_c'') = 47.2^\circ$$

6-2 设单位反馈系统的开环传递函数：



$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

试设计一串联超前校正装置，使系统满足如下指标：

- (1) 相角裕度  $\gamma \geq 45^\circ$ ；
- (2) 在单位斜坡输入作用下的稳态误差  $e_{ss} < \frac{1}{15} \text{rad}$ ；
- (3) 截止频率  $\omega_c \geq 7.5 \text{rad/s}$ 。

解：首先确定开环增益  $e_{ss} = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{15}$  得  $K \geq 15$ ，取  $K = 15$

则开环传递函数为  $G(s) = \frac{15}{s(s+1)}$  由  $|G(j\omega_c)| = 1$ ，得未校正前的截止频率

$$\omega_c = 3.81$$

对应得相角裕度  $\gamma' = 90^\circ - \arctan \omega_c' = 14.71^\circ$  不符合要求，进行串级超前校正。

取  $\omega_m = \omega_c'' = 7.5$  计算  $L'(7.5) = 20 \lg |G(j7.5)| = -11.56$

由  $10 \lg a = -L'(7.5) = 11.56$ ，得  $a = 14$ ，所以  $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = 0.036$

所以设计得超前网络传递函数为  $G(s) = \frac{0.504s+1}{0.036s+1}$

最终校正系统的开环传递函数为  $G_c(s) \square G(s) = \frac{15}{s(s+1)} \square \frac{0.504s+1}{0.036s+1}$

验算  $\gamma'' = 90^\circ - \arctan \omega_c'' + \arctan 0.504\omega_c'' - \arctan 0.036\omega_c'' = 67.7^\circ > 45^\circ$

满足性能指标要求，设计合理。

6-3 已知单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

试设计串联校正装置，使校正后系统的相位裕度  $\gamma \geq 50^\circ$ ，幅值裕度  $h \geq 10 \text{dB}$ ，

静态速度误差系数  $K_v = 20 \text{s}^{-1}$ 。

解：给定系统的稳定裕量时宜采用频率响应校正设计方法。

确定期望的开环增益  $K$ 。因为  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} G_p(s) = 2K$ ，所以取  $K = 10$ 。

分析增益校正后的系统。图 6-2 中的虚线为  $G_p(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega+2)}$  的对数幅

频特性和相频特性。图 6-3a 中的对数幅频特性采用的是渐近线，渐近线的拐点处的分贝数用数字表示，相频特性为示意图。

从图 6-3a 虚线所示的对数幅频特性可以测算出增益穿越频率  $\omega_c = 6.325 \text{ rad/s}$

相位裕量  $\gamma \geq 17.55^\circ$ 。校正的任务是增加相位裕量。由图可以看出，采用超前校正，可以提高相位裕量。因为增益已经确定，所以超前校正装置采用

$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+aTs}$ ,  $a < 1$  的形式。在  $\omega = 0$  时， $|G_c(j\omega)| = 1$ ，因此校正装置不会影响低

频增益

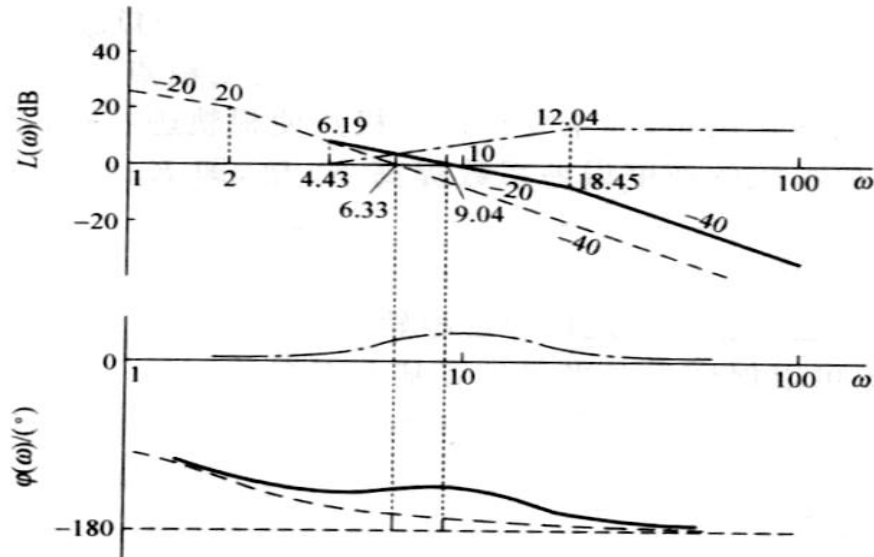


图 6-3a 系统校正前后的伯德图

由  $\gamma \geq 50^\circ$  可得  $\varphi = 55^\circ - 17.55^\circ \approx 33^\circ$ ，并进而取  $\varphi_m = \varphi + 5^\circ = 38^\circ$ 。

$$\alpha = (1 - \sin \varphi_m) / (1 + \sin \varphi_m) = 0.24$$

超前校正装置的最大相角频率为  $\omega_m = 1/(\sqrt{a}T)$ ，而且在该频率的增益为

$|G_c(j\omega)_m| = 1/\sqrt{a}$ 。要使增益穿越频率等于  $\omega_m$ ， $G_p(j\omega)G_c(j\omega)$  曲线必须在  $\omega_m$  处穿过  $\omega$  轴，即

$$\begin{aligned} 20\lg|G_p(j\omega_c)G_c(j\omega_c)| &= 20\lg|G_p(j\omega_c)| + 20\lg|G_c(j\omega_c)| \\ &= 20\lg|G_p(j\omega_c)| - 10\lg\alpha = 0 \end{aligned}$$

所以  $20\lg|G_p(j\omega_c)| = 10\lg\alpha = -6.20\text{dB}$

由图 6-2 可以算出  $\omega_c = 9.04\text{rad/s}$ 。进而取  $\omega_m = 9.04$  可得

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha\omega_m}} = 0.2258, \frac{1}{T} = 4.4286, \alpha T = 0.05419, \frac{1}{\alpha T} = 18.4528$$

故校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.0236s}{1 + 0.0542s} = 4.167 \frac{s + 4.4}{s + 18.45}$$

**6-4** 设系统开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)}$$

试用比例—微分装置进行校正，使系统  $K_v \geq 200$ ， $\gamma(\omega_c'') \geq 50^\circ$ ，并确定校正参数。

解：首先确定开环增益，取  $K_v = K = 200$

$$\text{所以未校正开环传递函数为 } G_0(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)}$$

计算校正前截止频率为  $\omega_c = 44.7$

计算相角裕度为  $\gamma = 90^\circ - \arctan 4.47 = 12.6^\circ$

相角裕度低于性能指标，可用比例微分装置进行校正。设比例微分校正装置传递函数为

$$G_c(s) = Ts + 1$$

需要补偿超前角为  $\varphi = \gamma - \gamma_0 = 50^\circ - 12.6^\circ = 37.4^\circ$

取  $\varphi = 38^\circ$ ，又因为  $\varphi = \arctan \omega_c T = \arctan 44.7T = 38^\circ$

可得比例微分装置的时间常数  $T = 0.0175$

所以比例微分校正装置的传递函数为  $G_c(s) = 0.0175s + 1$

校正后系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)} \cdot (0.0175s+1) = \frac{200(0.0175s+1)}{s(0.1s+1)}$

验算  $\gamma = 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c + \arctan 0.0175\omega_c = 50.6^\circ > 50^\circ$  符合要求。

6-5 设单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K}{s^2(1+0.2s)}$$

试设计串联校正装置  $G_c(s)$ ，使系统的  $K_a = 10$ ， $\gamma(\omega_c'') \geq 35^\circ$ 。

解：取  $K = K_a = 10$ ，绘待校正系统  $L(\omega), \varphi'(\omega)$ ，如 6-5a 图，由图 6-5a 查得

$$\omega_c' = 3.16, \gamma(\omega_c') = -32^\circ$$

采用超前网络，其最大超前相角应为  $\varphi_{\max} = 32^\circ + 35^\circ + 9^\circ = 76^\circ$

由于  $\varphi_{\max}$  较大，应采用两级超前校正，每级  $\varphi'_{\max} = 38^\circ$

超前网络传递函数为  $G_c(s) = \left( \frac{1+s/\omega_1}{1+s/\omega_2} \right)^2, \omega_2 = a\omega_1$

依据  $\sin \varphi'_{\max} = \frac{a-1}{a+1}$ ，算得  $a = 4.204$ ，取  $a = 5$ ，故  $\omega_2 = 5\omega_1$

校正后系统开环传递函数为  $G_c(s)G(s) = \frac{10(1+s/\omega_1)^2}{s^2(1+0.2s)(1+s/\omega_2)^2}$

当  $\omega = \omega_c''$  时，因为  $\omega_c''$  是  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的几何中点，因此可得  $A(\omega_c'') \approx \frac{10(\omega_c''/\omega_1)^2}{\omega_c''^2 \times 0.2\omega_c''} = 1$

从而求得  $\omega_c'' = 50/\omega_1^2$ ，代入  $\omega_c'' = \sqrt{a}\omega_1 = \sqrt{5}\omega_1$ ，

有  $\omega_1 \approx 2.8, \omega_2 = 14$ ，于是  $\omega_c'' = 6.26$

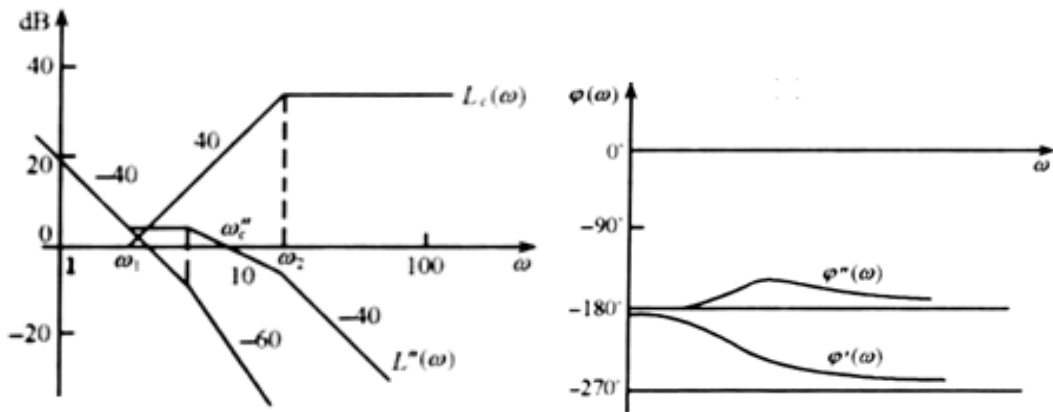


图 6-5a 系统的对数频率特性

经放大补偿后，

$$G_c(s) = \frac{(1+s/2.8)^2}{(1+s/14)^2}$$

验算：  $\gamma(\omega_c^*) = 180^\circ + \varphi''(\omega_c^*) = 180^\circ - 147.8^\circ = 32.2^\circ < 35^\circ$

故将  $a$  增大，取  $a = 6$ ,  $\omega_c^* = \sqrt{a}\omega_1 = 6.86$ ,  $\omega_2 = a\omega_1 = 16.8$ , 算得  $\gamma(\omega_c^*) = 37.3^\circ$

满足设计要求。因此  $G_c(s) = \frac{(1+0.357s)^2}{(1+0.06s)^2}$ , 放大器增益需提高 6 倍。

6-6 设单位反馈系统开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{7}{s \left( \frac{1}{2}s + 1 \right) \left( \frac{1}{6}s + 1 \right)}$$

试设计一串联滞后校正网络，使已校正系统的相角裕度为  $40^\circ \pm 2^\circ$ , 幅值裕度

不低于  $10dB$ , 开环增益保持不变，截止频率不低于“1”。

解：画校正前系统开环对数频率特性曲线，由图 6-6a 得

$$\omega_c^* = 3.8, \gamma'(\omega_c^*) = -4.4^\circ, 20 \lg h = -1dB$$

表明待校正系统不稳定，由于  $\omega_c^*$  大于要求得  $\omega_c^*$ , 故可采用串联滞后校正。

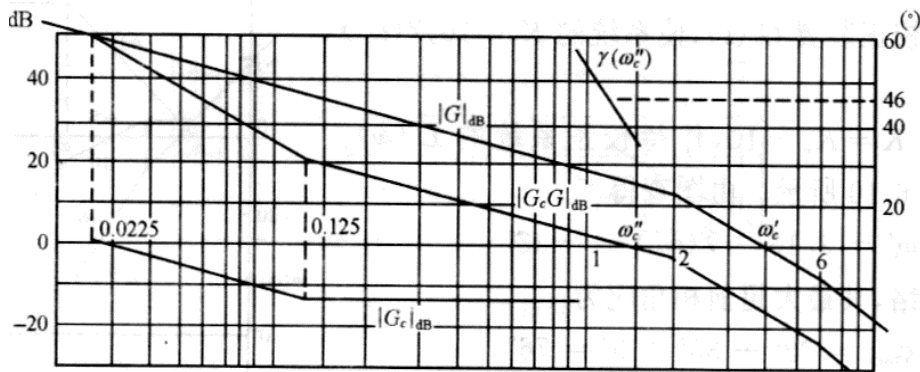


图 6-6a 系统的对数频率特性曲线

由  $\gamma = 90^\circ - \arctan \frac{1}{2} \omega_c'' - \arctan \frac{1}{6} \omega_c''$  画  $\gamma(\omega_c'')$  曲线

根据题目意思，估计  $\varphi_c(\omega_c'') = -6^\circ$ ，而  $\gamma'' = 40^\circ$ ，因此  $\gamma(\omega_c'') = \gamma'' - \varphi_c(\omega_c'') = 46^\circ$

由  $\gamma(\omega_c'')$  曲线查得  $\omega_c'' = 1.25$ ，满足  $\omega_c'' > 1$  的要求。

当  $\omega_c'' = 1.25$  时， $-b(\text{dB}) = L'(\omega_c'') = 15\text{dB}$ ，故  $b = 0.18$

令  $1/bT = 0.1\omega_c''$ ，求得  $T = 44.4$ 。于是串联滞后网络传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1+bTs}{1+Ts} = \frac{1+8s}{1+44.4s}$$

校正后系统开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{1(1+8s)}{s(1+\frac{1}{2}s)(1+\frac{1}{6}s)(1+44.4s)}$$

验算： $\omega_c'' = 1.25$ ， $\gamma = 41.2^\circ$ ， $20\lg h > 10\text{dB}$ ，满足要求。

6-7 对于题 6-4 试用比例—积分装置进行串联校正。

解：加 PI 控制器后，系统成为 II 型，有  $K_v \rightarrow +\infty$ ，必满足稳态性要求。因此  $K$  可取任何满足  $\gamma$  要求得任意值。因待校正系统  $\gamma(\omega_c'') = 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c''$ 。今要求  $\gamma(\omega_c'') \geq 50^\circ$ ，再考虑校正元件产生的滞后相位，可以选择  $\omega_c''$ ，使  $\arctan 0.1\omega_c'' \leq 30^\circ$ 。

设取  $\omega_c'' = 6$ ，由题可得  $K = 6$ ，所以未校正开环传递函数为  $G(s) = \frac{6}{s(0.1s+1)}$

选 PI 校正装置传递函数  $G_c(s) = \frac{1+Ts}{Ts}$

根据  $1/T \leq 0.1\omega_c^*$ , 取  $1/T = 0.6$ , 则校正后系统的传递函数为

$$G(s)G_c(s) = \frac{3.6(1+1.67s)}{s^2(1+0.1s)}$$

校正后的相角裕度  $\gamma(\omega_c^*) = \arctan \omega_c^*/0.6 - \arctan \omega_c^*/10 = 53.3^\circ$  满足设计要求。

6-8 已知单位反馈系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+s)(1+0.5s)}$$

试设计串联校正装置使系统具有相位裕度  $\gamma \geq 40^\circ$ , 幅值裕度  $h \geq 10dB$ , 静态速度误差系数  $K_v \geq 5s^{-1}$ 。

解: 由题意  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s) = K$  可得  $K = 5$

画  $G_p(j\omega)$  的伯德图, 从图 6-8a 中可以看出, 只要将对数幅频渐近线德中段下降, 即可满足相位裕量要求。所以, 采用滞后校正, 传递函数取为

$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}, \beta > 1$$

令  $\gamma = 40^\circ + 12^\circ = 52^\circ$ , 它对应的相角为  $-180^\circ + 52^\circ = -128^\circ$

对应于该期望相位裕量的频率为

$$\arg G_p(j\omega) = \arg \frac{1}{j\omega(1+j\omega)(1+0.5j\omega)} = -90^\circ - \arctan j\omega - \arctan j0.5\omega = -128^\circ$$

解得  $\omega = 0.5rad/s$ , 即为新的增益穿越频率  $\omega_c$

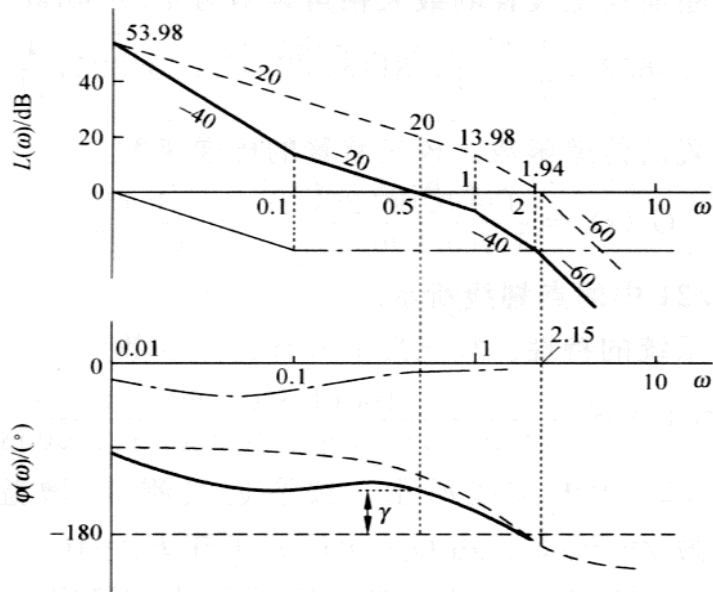


图 6-8a 系统校正前后的伯德图

令  $1/T = \omega_c / 5 = 0.1$ ，得  $T = 10$

因此， $20 \lg |G_p(j\omega_c)G_c(j\omega_c)| = 0 \text{dB}$ ，即  $-20 \lg \beta = -20$ ，解得  $\beta = 10$ 。

滞后校正装置的传递函数为： $G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} = \frac{1}{10} \cdot \frac{s+0.1}{s+0.01}$

校正后系统的开环传递函数为  $G_p(s)G_c(s) = \frac{5(10s+1)}{s(1+s)(1+0.5s)(1+100s)}$

验算  $\omega_c = 0.5 \text{rad/s}$ ,  $\gamma = 39^\circ$ ,  $h = 11 \text{dB}$ ,  $K_v = 5 \text{s}^{-1}$ ，符合要求。

6-9 设单位反馈系统开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{126}{s \left( \frac{1}{10}s + 1 \right) \left( \frac{1}{60}s + 1 \right)}$$

要求设计一串联校正装置，使系统满足：

- (1) 输入速度为1时，稳态速度误差不大于1/126；
- (2) 许可的放大器增益不变；
- (3) 相角裕度不小于  $30^\circ$ ，截止频率为20。



解：绘待校正系统  $L'(\omega)$ ，由图 6-9a 得  $\omega_c' = 36$ ，算出  $\gamma' = -15.5^\circ$ 。表明待校正系统不稳定，且  $\omega_c' > \omega_c''$  要求，宜采用串联滞后—超前校正。

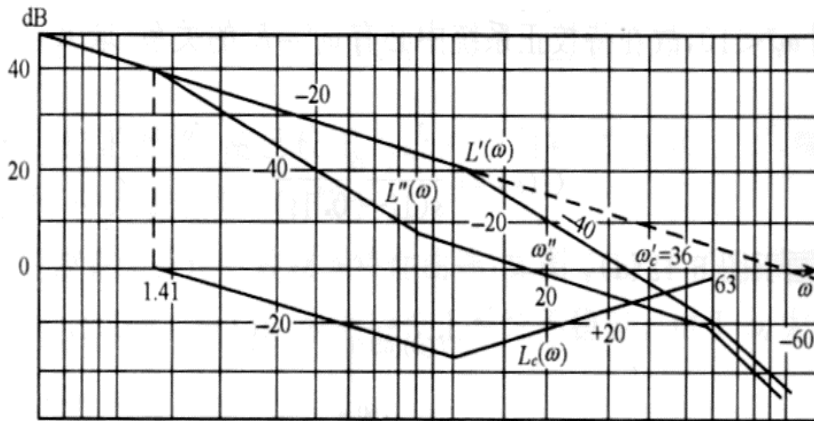


图 6-9a 系统对数幅频特性

由图知， $\omega_b = 10$ ，则  $T_b = 1/\omega_b = 0.1$ ，于是在  $\omega \leq 60$  时， $L''(\omega)$  的斜率均为 -20。

由于要求  $\omega_c'' = 20$ ，故可得  $\alpha = -16\text{dB}$

因此，已校正系统开环频率特性为

$$G_c(j\omega)G(j\omega) = \frac{126(1 + j\omega/\omega_a)}{j\omega(1 + j\omega/60)(1 + j\alpha\omega/\omega_a)(1 + j\omega/63)}$$

令  $\omega = \omega'' = 20, \gamma = 30^\circ$ ，由

$$\gamma'' = 90^\circ + \arctan 20/\omega_a - \arctan 20/60 - \arctan 126/\omega_a - \arctan 20/63$$

可以求出  $\omega_a = 8.9$ ，于是校正网络为

$$G_c(s) = \frac{(1 + 0.112s)(1 + 0.1s)}{(1 + 0.71s)(1 + 0.016s)}$$

验算： $\gamma'' = 33.7^\circ > 30^\circ$ ，满足指标要求。

6-10 已知单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

试设计串联滞后超前校正装置使校正后系统具有相角裕度  $\gamma \geq 40^\circ$ ，增益穿越

频率  $\omega_c = 20 \text{ rad/s}$ ，静态速度误差系数  $K_v \geq 100 \text{ s}^{-1}$ 。

解：由题意  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s) = K$  可得  $K = 100$

$$\text{所以增益校正后的开环传递函数为 } G_p(s) = \frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

由题意，采用超前和滞后分别设计的滞后超前装置，即

$$G(s) = G_{c1}(s)G_{c2}(s), \quad G_{c1}(s) = \frac{1+T_1s}{1+\alpha T_1s}, \quad G_{c2}(s) = \frac{1+T_2s}{1+\beta T_2s}$$

其中  $\alpha < 1, \beta > 1$ ，且  $\alpha\beta$  不一定等于 1。

设计超前部分：根据题目要求，超前部分至少应再提供超前角  $\varphi = 25^\circ$ ，故取超

前装置的最大超前角为  $\varphi_m = 40^\circ$ ，由此可算的， $\alpha = \frac{1 - \sin 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ} = 0.2174$

由  $1/T_1 = \sqrt{\alpha}\omega_c = \sqrt{0.2174} \times 20 = 9.33$ ，故  $T_1 = 0.107$

因此，超前部分的传递函数为  $G_{c1}(s) = \frac{1+T_1s}{1+\alpha T_1s} = \frac{1+0.107s}{1+0.023s}$

由于它的零点和对象的一个极点十分接近，故该取  $T_1 = 0.1, \alpha = 0.23$

$$\text{所以 } G_{c1}(s) = \frac{1+0.1s}{1+0.023s} = 4.348 \frac{s+10}{s+43.48}$$

设计滞后部分：要使  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  成为增益穿越频率，必须满足

$$|G_p(j20)G_{c1}(j20)G_{c2}(j20)| = 1, \text{ 可解得 } 20 \lg |G_{c2}(j20)| = -20 \lg \beta = -14 \text{ dB}, \text{ 即 } \beta \approx 5$$

令  $1/T_2 = \omega_c / 5 = 4$ ，得  $T_2 = 0.25$ ，所以

$$\text{滞后部分的传递函数为 } G_{c2}(s) = \frac{1+T_2s}{1+\beta T_2s} = \frac{1+0.25s}{1+1.25s} = \frac{1}{5} \frac{s+4}{s+0.8}$$

从而可得，超前滞后装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{(1+0.1s)(1+0.25s)}{(1+0.023s)(1+1.25s)} = 0.87 \frac{(s+10)(s+4)}{(s+43.48)(s+0.8)}$$

校正后的开环传递函数为

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{100(1+0.25s)}{s(1+0.01s)(1+0.023s)(1+1.25s)}$$

验算,  $\omega_c = 20 \text{ rad/s}$ ,  $\gamma = 44.97^\circ$ ,  $K_v = 100 \text{ s}^{-1}$ , 符合要求。

6-11 已知系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.5s)(1+0.1s)}$$

试设计 PID 校正装置, 使系统  $K_v \geq 10$ ,  $\gamma(\omega_c'') \geq 50^\circ$  且  $\omega_c'' \geq 4$ 。

解: 令  $K = K_v = 10$ , 作待校正系统  $L(\omega)$ , 如图 6-11a。

由图 6-7 知,  $\omega_c' = 4.47$ ,  $\gamma(\omega_c') \approx 0^\circ$

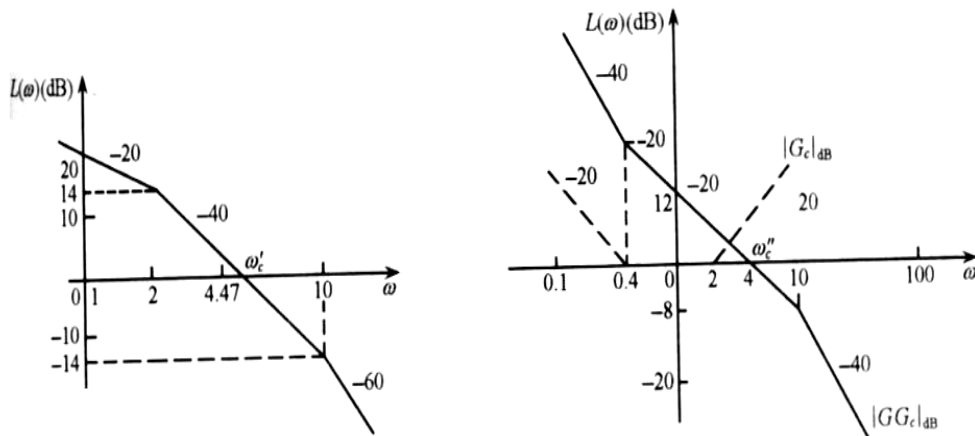


图 6-11a 系统特性曲线

设 PID 校正装置传递函数为  $G_c(s) = \frac{(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)}{\tau_1s} = \frac{(1+s/\omega_1)(1+s/\omega_2)}{s/\omega_1}$

则校正后系统频率特性为

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{K_1(1+j\omega/\omega_1)(1+j\omega/\omega_2)}{(j\omega)^2(1+j\omega/2)(1+j\omega/10)}, \quad K_1 = K\omega_1$$

由于校正后为 II 型系统，故  $K_v$  的要求肯定满足，系统开环增益可任选，由其他条件而定。

初选  $\omega_c'' = 4$ 。为降低系统阶次，选  $\omega_2 = 2$ ，并选  $\omega_1 = 0.1, \omega_c'' = 0.4$ ，此时

$$G(j\omega)G_c(j\omega) = \frac{K_1(1+j\omega/0.4)}{(j\omega)^2(1+j\omega/10)}$$

其对数幅频特性应通过截止频率  $\omega_c'' = 4$ ，故由近似式  $\frac{K_1\omega_c''/0.4}{(\omega_c'')^2} \approx 1$

得  $K_1 = 1.6$ ，从而  $K = 4$ 。

验算： $\gamma(\omega_c'') = \arctan \omega_c''/0.4 - \arctan \omega_c''/10 = 62.5^\circ$

满足设计要求。

6-12 设系统结构图如图 6-1 所示，图中， $G_1(s) = \frac{K_1}{T_0s+1}$ ，

$$G_2(s) = \frac{K_2}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, \quad G_3(s) = \frac{K_3}{s}, \quad \text{其中，} K_1 = 0 \sim 6000 \text{ 可调，} K_2 = 12,$$

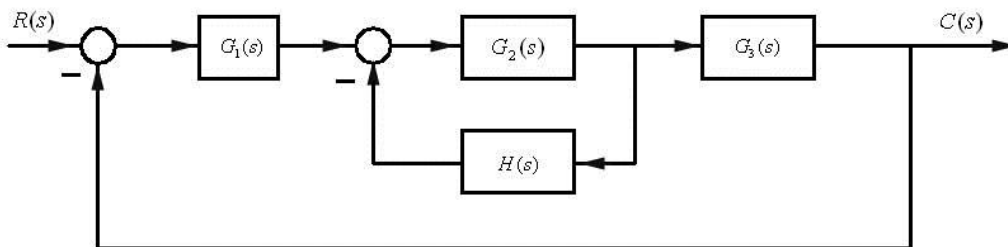


图 6-1 习题 6-12 示意图

$K_3 = 1/400$ ， $T_0 = 0.014$ ， $T_1 = 0.1$ ， $T_2 = 0.02$ 。试设计反馈校正装置  $H(s)$ ，

使系统满足  $K_v \geq 150$ ， $\sigma\% \leq 40\%$ ， $t_s \leq 1$ 。

解：令  $K_1 = 5000$ ，画待校正系统  $G_0(s) = \frac{150}{s(1+0.014s)(1+0.02s)(1+0.1s)}$  的对数幅

频特性曲线，如图 6-12a。由图 6-9 得  $\omega_c' = 38.7$

由对数幅频特性可得  $G(s) = \frac{150(1+0.25s)}{s(1+0.014s)(1+2.86s)(1+0.0133s)}$ ，因此

$$G_2(s)H(s) = \frac{2.86s}{(1+0.25s)(1+0.1s)(1+0.02s)}$$

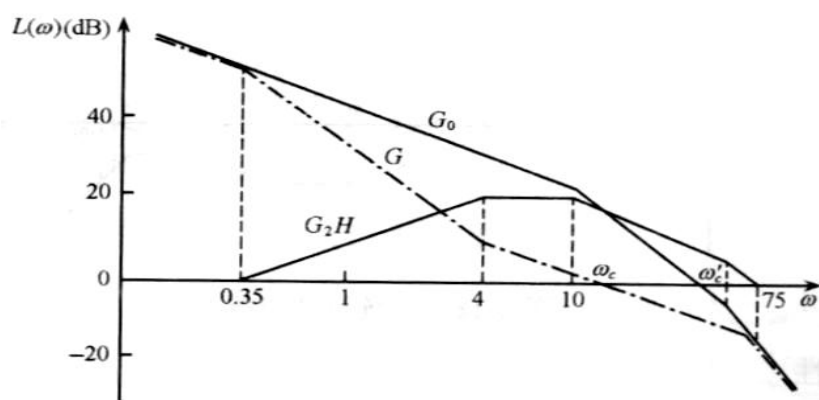


图 6-12a 系统对数幅频特性曲线

当  $\omega = \omega_4 = 75$  时

$\gamma(\omega_4) = 180^\circ + 90^\circ - \arctan 0.25\omega_4 - \arctan 0.1\omega_4 - \arctan 0.02\omega_4 = 44.3^\circ$ ，因而小闭环

稳定。

由于  $G_2(s)$  已知，故有  $H(s) = \frac{0.238s}{1+0.25s} = 0.95 \frac{0.25s}{1+0.25s}$

验算， $K_v = 150, \gamma = 54^\circ, M_r = 1.27, \sigma\% = 27\%, t_s = 0.63$ ，符合设计要求。

6-13 设系统结构图如图 6-2 所示，待校正系统的开环传递函数为：

$$G_0(s) = \frac{40}{s(1+0.003s)}$$

试用三阶最佳工程设计法设计校正装置  $G_c(s)$ 。

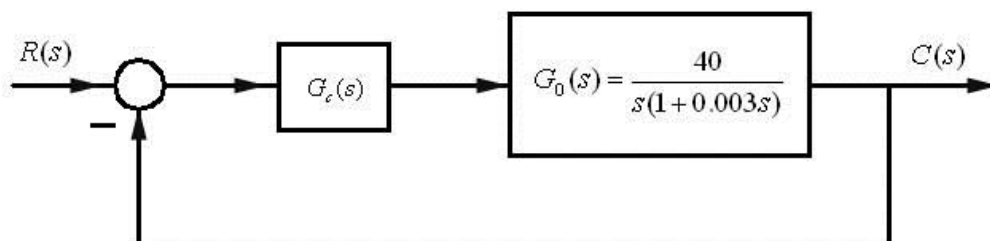


图 6-2 习题 6-13 示意图

解：选  $G_c(s)$  作为  $PI$  调节器，即  $G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts}$

校正后系统开环传递函数为  $G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{40(1 + \tau s)/T}{s^2(1 + 0.003s)}$

确定校正装置参数  $\tau$  和  $T$ ， $\tau = 4 \times 0.003 = 0.012$ ， $40/T = 1/(8 \times 0.003^2)$ ，即  $T = 0.0029$

于是  $PI$  调节器为  $G_c(s) = \frac{1 + 0.012s}{0.0029s} = 4.14(1 + \frac{1}{0.012s})$

本题如采用最小  $M_r$  设计法，取  $H = 5$ ，则可得  $PI$  调节器为

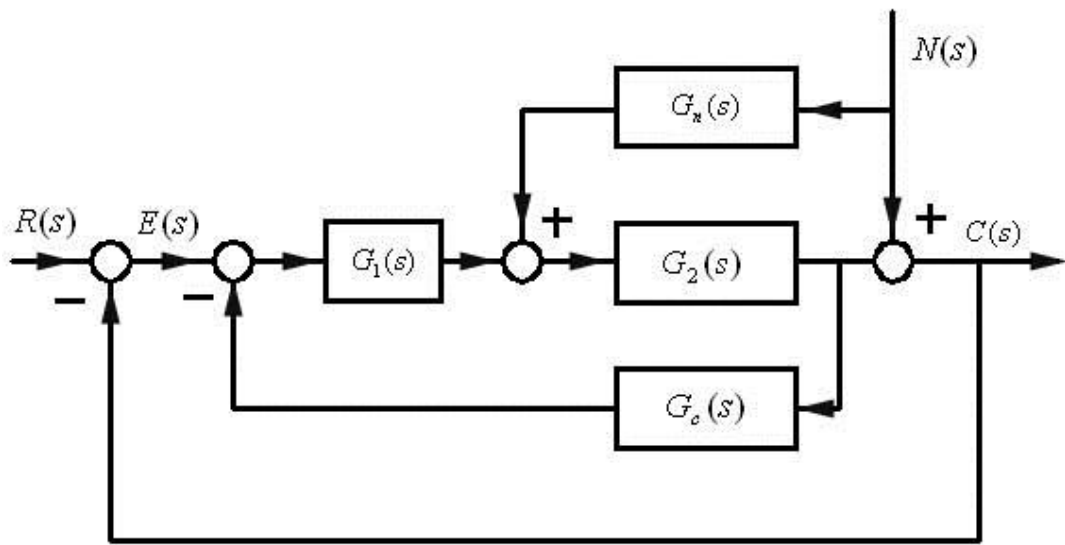
$$G_c(s) = \frac{1 + 0.015s}{0.003s} = 5(1 + \frac{1}{0.015s})$$

6-14 设复合控制系统如图 6-3 所示，图中， $G_n(s)$  为顺馈装置传递函数；

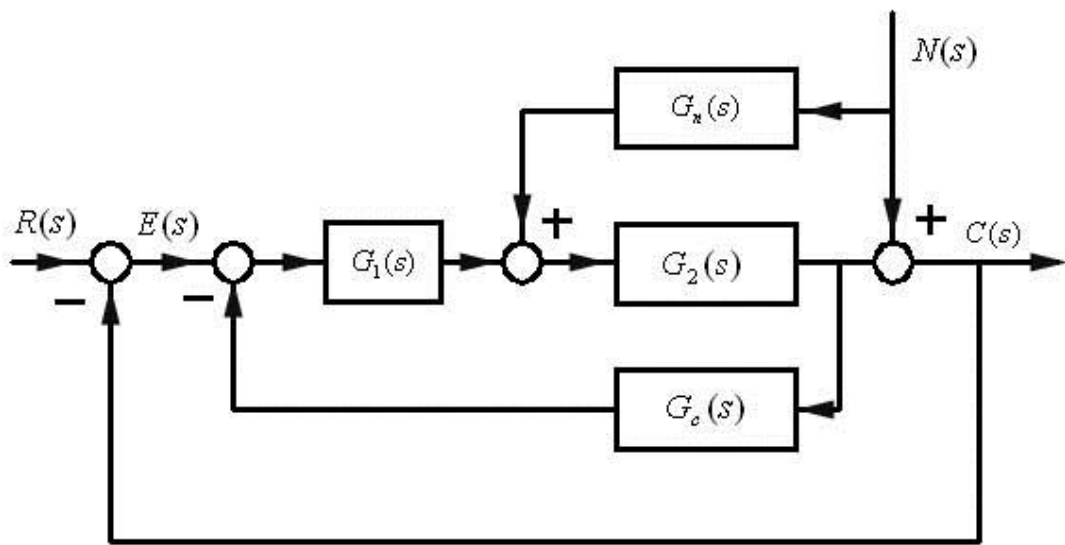
$G_c(s) = K_t s$ ，为测速发电机及分压器的传递函数； $G_1(s) = K_1$ ； $G_2(s) = 1/s^2$ 。

试确定  $K_1$ ， $G_n(s)$  及  $G_c(s)$ ，使系统输出量完全不受扰动  $n(t)$  的影响，且单

位阶跃响应超调量  $\sigma\% = 25\%$ ，峰值时间  $t_p = 2$ 。



(a)



(b)

图 6-3 习题 6-14 示意图

解:

$$\Phi_N(s) = \frac{(1 + G_1 G_2 G_C) G_n G_2}{1 + G_1 G_2 G_C + G_1 G_2} = \frac{s^2 + K_1 G_C(s) + G_n(s)}{s^2 + K_1 G_C(s) + K_1}$$

要使系统输出完全不受扰动影响, 应使  $\Phi_N(s) = 0$ , 于是  $s^2 + K_1 G_C(s) + G_n(s) = 0$

即  $G_n(s) = -s^2 - K_1 G_C(s) = -s^2 - K_1 K_t s$

系统对输入的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_c} = \frac{K_1}{s^2 + K_1 K_t s} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s}$$

按题意要求  $\sigma\% = e^{-\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} =$

从而解得  $\zeta = \frac{\ln 4}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 4)^2}} = 0.404 \omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{2 - \zeta^2} = 1.5}$

因此  $K_1 = \omega_n^2 = 2.984 K_t = \frac{2\zeta \omega_n}{K_1} = 0.4$

于是  $G_c(s) = K_t s = 0.471s, G_n(s) = -s^2 - K_1 K_t s = -s^2 - 1.387s$



1. 计算机控制系统的组成部分有哪些？它的特点是什么？

答：计算机控制系统由硬件部分和软件部分组成，其中硬件部分主要由主机、外部设备、过程输入输出设备和广义被控对象组成，软件部分包括系统软件和应用软件。计算机控制系统的功能强大而且安全可靠。归纳起来，主要有如下几个特点：

(1) 可以同时实现模拟变送器、控制器、指示器、手操器以及记录仪等多种模拟仪表的功能，并且便于集中监视和操作；——利用了计算机的存储、数字运算和显示功能；

(2) 一台计算机可以同时控制多个回路，并且还可以同时实现 DDC、顺序控制、监督控制等多种控制功能——利用了计算机的快速运算功能；

(3) 可以实现模拟控制难以实现的复杂控制规律，如最优控制、自适应控制、多变量控制等等——利用了计算机强大的信息处理能力；

(4) 计算机控制系统的调试、整定灵活方便，系统控制方案、控制策略以及控制算法只需要修改软件即可实现；

(5) 利用网络分布结构可实现计算机控制管理集成系统；

(6) 计算机控制系统中同时存在连续性和离散性两类信号。

2. 计算机控制系统与经典自动控制系统在信号上有什么不同？

答：经典自动控制系统的信号是模拟信号，而计算机控制系统的信号是数字信号。

3. 什么是采样定理？采样周期的一般选择原则是什么？

答：一个连续时间信号  $f(t)$ ，设其频率带宽是有限的，其最高频率为  $\omega_m$ ，如果在等间隔点上对该信号  $f(t)$  进行连续采样，为了使采样后的离散信号  $f^*(t)$  能包含原信号  $f(t)$  的全部信息量。则采样角频率 ( $\omega_s$ ) 只有满足表达式  $\omega_s \geq 2\omega_m$ ，采

样后的信号  $f^*(t)$  才能够无失真地复现  $f(t)$ ，否则不能从  $f^*(t)$  中恢复  $f(t)$ ，这个定理就称为采样定理。

采样周期的一般选择原则是： $T_s < \frac{T_m}{2}$ 。

4. 试推导零阶保持器的传递函数？

解：零阶保持器的输入输出关系式为

$$f_h(nT + \Delta t) = f_h(nT) \quad 0 \leq \Delta t < T$$

该式表明，零阶保持过程是由于理想脉冲  $e(nT)\delta(t-nT)$  的作用结果。如果给零阶保持器输入一个理想单位脉冲  $\delta(t)$ ，则其脉冲过渡函数  $g_h(t)$  是幅值为 1，持续时间为  $T$  的矩形脉冲，并可分解为两个单位阶跃函数的和：

$$g_h(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

对脉冲过渡函数  $g_h(t)$  取拉氏变换，可得零阶保持器的传递函数：

$$G_h(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

5. 求下列函数的 Z 变换

$$(1) \quad f(t) = 1 - e^{-at} \qquad (2) \quad f(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^t$$

$$(3) \quad F(s) = \frac{6}{s(s+2)} \qquad (4) \quad F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

解：(1)  $F(z) = Z[1 - e^{-at}]$

$$\begin{aligned} &= Z[1(t)] - Z[e^{-at}] \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \\ &= \frac{z(1 - e^{-aT})}{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad F(z) = Z\left[\left(\frac{1}{4}\right)^t\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{nT} z^{-n} = 1 + (4^T z)^{-1} + (4^T z)^{-2} + \dots + (4^T z)^{-n} + \dots$$

在上式中, 若  $|(4^T z)^{-1}| < 1$ , 则无穷级数是收敛的, 利用等比级数求和公式, 可得

$$F(z) = \frac{1}{1 - (4^T z)^{-1}} = \frac{4^T z}{4^T z - 1}$$

(3) 将  $F(s)$  展开成部分分式:

$$F(s) = \frac{6}{s(s+2)} = \frac{3}{s} - \frac{3}{s+2}$$

查 Z 变换表, 可得:

$$\begin{aligned} F(z) &= 3 \cdot \frac{z}{z-1} - 3 \cdot \frac{z}{z-e^{-2T}} \\ &= \frac{3z(1-e^{-2T})}{z^2 - (1+e^{-2T})z + e^{-2T}} \end{aligned}$$

(4) 将  $F(s)$  展开成部分分式:

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$$

查 Z 变换表, 可得:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-3T}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}z(e^{-T} + e^{-3T})}{z^2 - (e^{-T} + e^{-3T})z + e^{-4T}} \end{aligned}$$

6. 求下列函数的初值和终值

$$(1) F(z) = \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$(2) F(z) = \frac{1+4z^{-1}+3z^{-2}}{1+2z^{-1}+6z^{-2}+2.5z^{-3}}$$

$$(3) F(z) = \frac{z+5}{z^2+4z+3}$$

$$(4) F(z) = \frac{z^2(z^2+z+1)}{(z^2-0.8z+1)(z^2+z+0.8)}$$

解: (1) 由初值定理得

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \infty
 \end{aligned}$$

(2) 由初值定理得

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1+4z^{-1}+3z^{-2}}{1+2z^{-1}+6z^{-2}+2.5z^{-3}} = 1 \\
 f(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1+4z^{-1}+3z^{-2}}{1+2z^{-1}+6z^{-2}+2.5z^{-3}} = 0
 \end{aligned}$$

(3) 由初值定理得

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+5}{z^2+4z+3} = 0 \\
 f(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z+5}{z^2+4z+3} = 0
 \end{aligned}$$

(4) 由初值定理得

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2(z^2+z+1)}{(z^2-0.8z+1)(z^2+z+0.8)} = 1
 \end{aligned}$$

由于  $F(z)$  的四个极点都在单位圆内，故可以用终值定理求解。

$$\begin{aligned}
 f(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2(z^2+z+1)}{(z^2-0.8z+1)(z^2+z+0.8)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

7. 求下列函数的 Z 反变换

$$(1) F(z) = \frac{z}{z-0.5}$$

$$(2) F(z) = \frac{z^2}{(z-0.8)(z-0.1)}$$

$$(3) F(z) = \frac{0.5z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$(4) F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

解: (1) 查 Z 变换表, 可得  $f(t) = 2 \frac{t}{T}$

(2) 将  $F(z)$  展开, 得

$$F(z) = \frac{8}{7} \cdot \frac{z}{z-0.8} - \frac{1}{7} \cdot \frac{z}{z-0.1}$$

查 Z 变换表, 可得

$$f(t) = \frac{8}{7} \cdot (0.8)^{\frac{t}{T}} - \frac{1}{7} \cdot (0.1)^{\frac{t}{T}}$$

(3) 将  $F(z)$  展开, 得

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{0.5z}{z-0.5}$$

查 Z 变换表, 可得

$$f(t) = 1 - (0.5) \cdot (0.5)^{\frac{t}{T}} = 1 - (0.5)^{\frac{t}{T}+1}$$

(4) 将  $F(z)$  展开, 得

$$F(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

查 Z 变换表, 可得

$$f(t) = -1 + 2 \cdot 2^{\frac{t}{T}-1} = 2^{\frac{t}{T}} - 1$$

8. 求下列系统的 Z 传递函数

$$(1) y(k) - 2y(k-2) + 3y(k-4) = u(k) + u(k-1)$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(0.1s+1)}$$

解: (1) 对方程两边取 Z 变换得:

$$(1 - 2z^{-2} + 3z^{-4})Y(z) = (1 + z^{-1})U(z)$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-2z^{-2}+3z^{-4}}$$

(2) 将  $G(s)$  展开成部分分式

$$G(s) = \frac{2}{s(0.1s+1)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+10}$$

查 Z 变换表, 可得:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-10T}} \\ &= \frac{2z(1-e^{-10T})}{z^2 - (1+e^{-10T})z + e^{-10T}} \end{aligned}$$

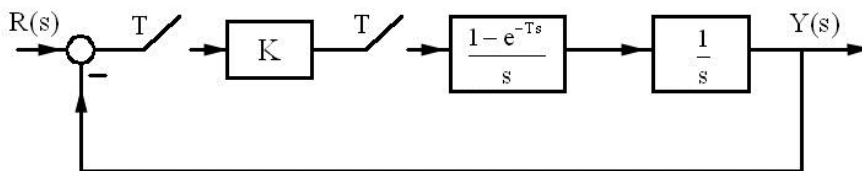


图 7-10 习题 9 系统示意图

9. 已知一离散系统如下图所示, 试分析要使系统稳定,  $K$  的取值范围。

解: 从上图可以得出系统的闭环传递函数为:

$$W(z) = \frac{KT}{z-1+KT}$$

根据系统稳定性的充要条件可得:

当  $|1-KT| < 1 \Rightarrow 0 < K < \frac{2}{T}$  时, 系统稳定, 否则系统不稳定

10. 已知一离散系统的闭环特征方程为:

$$D(z) = z^3 - 1.03z^2 + 0.43z + 0.0054 = 0$$

试用 Routh 判据判断系统的稳定性。

解: 针对上式做  $W$  变换, 即将  $z = \frac{w+1}{1-w}$  代入得:

$$D(w) = 2.45w^3 + 3.62w^2 + 1.52w + 0.4 = 0$$

作 Routh 表如下:

$w^3$	2.45	1.52
$w^2$	3.62	0.4
$w^1$	1.25	0
$w^0$	0.4	0

由于 Routh 表第一列均大于零, 故系统稳定。

