第 1 章 随机变量及其概率

1，写出下列试验的样本空间：

（1）连续投掷一颗骰子直至 6 个结果中有一个结果出现两次，记录投掷的次数。

（2）连续投掷一颗骰子直至 6 个结果中有一个结果接连出现两次，记录投掷的次数。

（3）连续投掷一枚硬币直至正面出现，观察正反面出现的情况。

（4）抛一枚硬币，若出现 H 则再抛一次；若出现 T，则再抛一颗骰子，观察出现的各种结果。

解：（1）$S=\{2,3,4,5,6,7\}$；（2）$S=\{2,3,4,\cdots\}$；（3）$S=\{H,TH,TTH,TTTH,\cdots\}$；（4）$S=\{HH,HT,T1,T2,T3,T4,T5,T6\}$。

2，设 A,B 是两个事件，已知 $P(A)=0.25,P(B)=0.5,P(AB)=0.125$，求 $P(A\cup B),P(\overline{A}B),P(\overline{AB}),P[(A\cup B)(\overline{AB})]$。

解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.625$，

$P(\overline{A}B)=P[(S-A)B]=P(B)-P(AB)=0.375$，

$P(\overline{AB})=1-P(AB)-0.875$，

$P[(A\cup B)(\overline{AB})]=P[(A\cup B)(S-AB)]=P(A\cup B)-P[(A\cup B)(AB)]=0.625-P(AB)=0.5$

3，在 100，101，…，999 这 900 个 3 位数中，任取一个 3 位数，求不包含数字 1 个概率。

解：在 100，101，…，999 这 900 个 3 位数中不包含数字 1 的 3 位数的个数为$8\times9\times9=648$，所以所求得概率为

$$\frac{648}{900}=0.72$$

4，在仅由数字 0，1，2，3，4，5 组成且每个数字之多出现一次的全体三位数中，任取一个三位数。（1）求该数是奇数的概率；（2）求该数大于 330 的概率。

解：仅由数字 0，1，2，3，4，5 组成且每个数字之多出现一次的全体三位数的个数有$5\times5\times4=100$个。（1）该数是奇数的可能个数为$4\times4\times3=48$个，所以出现奇数的概率为

$$\frac{48}{100}=0.48$$

（2）该数大于 330 的可能个数为$2\times4+5\times4+5\times4=48$，所以该数大于 330 的概率为

$$\frac{48}{100}=0.48$$

5，袋中有 5 只白球，4 只红球，3 只黑球，在其中任取 4 只，求下列事件的概率。

（1）4 只中恰有 2 只白球，1 只红球，1 只黑球。

（2）4 只中至少有 2 只红球。

（3）4 只中没有白球。

解:（1）所求概率为$\dfrac{C_5^2C_4^1C_3^1}{C_{12}^4}=\dfrac{8}{33}$；

（2） 所求概率为$\frac{C_4^2C_8^2+C_4^3C_8^1+C_4^4}{C_{12}^4}=\frac{201}{495}=\frac{67}{165}$；

（3）所求概率为$\frac{C_7^4}{C_{12}^4}=\frac{35}{495}=\frac{7}{165}$。

6，一公司向M个销售点分发$n(n<M)$张提货单，设每张提货单分发给每一销售点是等可能的，每一销售点得到的提货单不限，求其中某一特定的销售点得到$k(k\le n)$张提货单的概率。

解：根据题意，$n(n<M)$张提货单分发给M个销售点的总的可能分法有M^n种，某一特定的销售点得到$k(k\le n)$张提货单的可能分法有$C_n^k(M-1)^{n-k}$种，所以某一特定的销售点得到$k(k\le n)$张提货单的概率为

$$\frac{C_n^k(M-1)^{n-k}}{M^n}。$$

7，将 3 只球（1~3 号）随机地放入 3 只盒子（1~3 号）中，一只盒子装一只球。若一只球装入与球同号的盒子，称为一个配对。

（1）求 3 只球至少有 1 只配对的概率。

（2）求没有配对的概率。

解：根据题意，将 3 只球随机地放入 3 只盒子的总的放法有 3！=6 种：123，132，213，231，312，321；没有 1 只配对的放法有 2 种：312，231。至少有 1 只配对的放法当然就有 6-2=4 种。所以

（2）没有配对的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$；

（1）至少有 1 只配对的概率为$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$。

8，（1）设 $P(A)=0.5, P(B)=0.3, P(AB)=0.1,$，求 $P(A|B), P(B|A), P(A|A\cup B)$，$P(AB|A\cup B), P(A|AB)$.

（2）袋中有 6 只白球，5 只红球，每次在袋中任取 1 只球，若取到白球，放回，并放入 1 只白球；若取到红球不放回也不放入另外的球。连续取球 4 次，求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率。

解：（1）由题意可得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$，所以

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3},\qquad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.5}=\frac{1}{5},$$

$$P(A|A\cup B)=\frac{P[A(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{5}{7},$$

$$P(AB|A\cup B)=\frac{P[AB(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{1}{7},$$

$$P(A|AB)=\frac{P[A(AB)]}{P(AB)}=\frac{P(AB)}{P(AB)}=1。$$

（2）设 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示“第 i 次取到白球”这一事件，而取到红球可以用它的补来表示。那么第一、二次取到白球且第三、四次取到红球可以表示为 $A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4$，它的概率为（根据乘法公式）

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A}_3|A_1A_2)P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3)$$
$$=\frac{6}{11}\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}=\frac{840}{20592}=0.0408。$$

9，一只盒子装有 2 只白球，2 只红球，在盒中取球两次，每次任取一只，做不放回抽样，已知得到的两只球中至少有一只是红球，求另一只也是红球的概率。

解：设“得到的两只球中至少有一只是红球”记为事件 A，“另一只

也是红球”记为事件B。则事件A的概率为

$$P(A)=2\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$ （先红后白，先白后红，先红后红）

所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{5}$$

10，一医生根据以往的资料得到下面的讯息，他的病人中有 5%的人以为自己患癌症，且确实患癌症；有 45%的人以为自己患癌症，但实际上未患癌症；有 10%的人以为自己未患癌症，但确实患了癌症；最后 40%的人以为自己未患癌症，且确实未患癌症。以A表示事件“一病人以为自己患癌症”，以B表示事件“病人确实患了癌症”，求下列概率。

（1）$P(A),P(B)$；（2）$P(B\mid A)$；（3）$P(B\mid\overline{A})$；（4）$P(A\mid\overline{B})$；（5）$P(A\mid B)$。

解：（1）根据题意可得

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=5\%+45\%=50\%;$$

$$P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})=5\%+10\%=15\%;$$

（2）根据条件概率公式：$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{5\%}{50\%}=0.1$；

（3）$P(B\mid\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{10\%}{1-50\%}=0.2$；

（4）$P(A\mid\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{45\%}{1-15\%}=\dfrac{9}{17}$；

（5）$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{5\%}{15\%}=\dfrac{1}{3}$。

11，在 11 张卡片上分别写上 engineering 这 11 个字母，从中任意连抽 6 张，求依次排列结果为 ginger 的概率。

解：根据题意，这 11 个字母中共有 2 个 g，2 个 i，3 个 n，3 个 e，1 个 r。从中任意连抽 6 张，由独立性，第一次必须从这 11 张中抽出 2 个 g 中的任意一张来，概率为 2/11；第二次必须从剩余的 10 张中抽出 2 个 i 中的任意一张来，概率为 2/10；类似地，可以得到 6 次抽取的概率。最后要求的概率为

$$\frac{2}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{36}{332640}=\frac{1}{9240}；\quad 或者 \frac{C_2^1C_2^1C_3^1C_1^1C_3^1C_1^1}{A_{11}^6}=\frac{1}{9240}。$$

12，据统计，对于某一种疾病的两种症状：症状 A、症状 B，有 20%的人只有症状 A，有 30%的人只有症状 B，有 10%的人两种症状都有，其他的人两种症状都没有。在患这种病的人群中随机地选一人，求

（1）该人两种症状都没有的概率；

（2）该人至少有一种症状的概率；

（3）已知该人有症状 B，求该人有两种症状的概率。

解：（1）根据题意，有 40%的人两种症状都没有，所以该人两种症状都没有的概率为$1-20\%-30\%-10\%=40\%$；

（2）至少有一种症状的概率为$1-40\%=60\%$；

（3）已知该人有症状 B，表明该人属于由只有症状 B 的 30%人群或者两种症状都有的 10%的人群，总的概率为 30%+10%=40%，所以在已知该人有症状 B 的条件下该人有两种症状的概率为$\frac{10\%}{30\%+10\%}=\frac{1}{4}$。

13，一在线计算机系统，有 4 条输入通讯线，其性质如下表，求一随机选择的进入讯号无误差地被接受的概率。

通讯线	通讯量的份额	无误差的讯息的份额
1	0.4	0.9998
2	0.3	0.9999
3	0.1	0.9997
4	0.2	0.9996

解：设“讯号通过通讯线 i 进入计算机系统”记为事件 $A_i (i=1,2,3,4)$，“进入讯号被无误差地接受”记为事件 B。则根据全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.4\times0.9998+0.3\times0.9999+0.1\times0.9997+0.2\times0.9996$$

=0.99978

14，一种用来检验 50 岁以上的人是否患有关节炎的检验法，对于确实患关节炎的病人有 85%的给出了正确的结果；而对于已知未患关节炎的人有 4%会认为他患关节炎。已知人群中有 10%的人患有关节炎，问一名被检验者经检验，认为他没有关节炎，而他却有关节炎的概率。

解：设“一名被检验者经检验认为患有关节炎”记为事件 A，“一名被检验者确实患有关节炎”记为事件 B。根据全概率公式有

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=10\%\times85\%+90\%\times4\%=12.1\%,$$

所以，根据条件概率得到所要求的概率为

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)P(\overline{A}|B)}{1-P(A)}=\frac{10\%(1-85\%)}{1-12.1\%}=17.06\%$$

即一名被检验者经检验认为没有关节炎而实际却有关节炎的概率为 17.06%.

15，计算机中心有三台打字机 A,B,C，程序交与各打字机打字的概率依次为 0.6, 0.3, 0.1，打字机发生故障的概率依次为 0.01, 0.05, 0.04。已知一程序因打字机发生故障而被破坏了，求该程序是在 A,B,C 上打字的概率分别为多少？

解: 设"程序因打字机发生故障而被破坏"记为事件 M，"程序在 A,B,C 三台打字机上打字"分别记为事件 N_1, N_2, N_3。则根据全概率公式有

$$P(M)=\sum_{i=1}^{3}P(N_i)P(M\mid N_i)=0.6\times 0.01+0.3\times 0.05+0.1\times 0.04=0.025,$$

根据 Bayes 公式，该程序是在 A,B,C 上打字的概率分别为

$$P(N_1\mid M)=\frac{P(N_1)P(M\mid N_1)}{P(M)}=\frac{0.6\times 0.01}{0.025}=0.24,$$

$$P(N_2\mid M)=\frac{P(N_2)P(M\mid N_2)}{P(M)}=\frac{0.3\times 0.05}{0.025}=0.60,$$

$$P(N_3\mid M)=\frac{P(N_3)P(M\mid N_3)}{P(M)}=\frac{0.1\times 0.04}{0.025}=0.16。$$

16，在通讯网络中装有密码钥匙，设全部收到的讯息中有 95%是可信的。又设全部不可信的讯息中只有 0.1%是使用密码钥匙传送的，而全部可信讯息是使用密码钥匙传送的。求由密码钥匙传送的一讯息是可信讯息的概率。

解: 设"一讯息是由密码钥匙传送的"记为事件 A，"一讯息是可信的"记为事件 B。根据 Bayes 公式，所要求的概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}=\frac{95\%\times 1}{95\%\times 1+5\%\times 0.1\%}=99.9947\%$$

17，将一枚硬币抛两次，以 A,B,C 分别记事件“第一次得 H”，“第二次得 H”，“两次得同一面”。试验证 A 和 B，B 和 C，C 和 A 分别相互独立（两两独立），但 A,B,C 不是相互独立。

解：根据题意，求出以下概率为

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}, \qquad P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

$$P(AB)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}, \quad P(BC)=P(CA)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}, \quad P(ABC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}。$$

所以有

$$P(AB)=P(A)P(B), \quad P(AC)=P(A)P(C), \quad P(BC)=P(B)P(C)。$$

即表明 A 和 B，B 和 C，C 和 A 两两独立。但是

$$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$$

所以 A,B,C 不是相互独立。

18，设 A,B,C 三个运动员自离球门 25 码处踢进球的概率依次为 0.5, 0.7, 0.6，设 A,B,C 各在离球门 25 码处踢一球，设各人进球与否相互独立，求（1）恰有一人进球的概率；（2）恰有二人进球的概率；（3）至少有一人进球的概率。

解：设“A,B,C 进球”分别记为事件 $N_i(i=1,2,3)$。

（1）设恰有一人进球的概率为 p_1，则

$$p_1=P\{N_1\overline{N}_2\overline{N}_3\}+P\{\overline{N}_1N_2\overline{N}_3\}+P\{\overline{N}_1\overline{N}_2N_3\}$$

$$=P(N_1)P(\overline{N}_2)P(\overline{N}_3)+P(\overline{N}_1)P(N_2)P(\overline{N}_3)+P(\overline{N}_1)P(\overline{N}_2)P(N_3) \quad \text{（由独立性）}$$

$$=0.5\times0.3\times0.4+0.5\times0.7\times0.4+0.5\times0.3\times0.6$$
$$=0.29$$

（2）设恰有二人进球的概率为p_2，则

$$p_2 = P\{N_1N_2\overline{N}_3\} + P\{\overline{N}_1N_2N_3\} + P\{N_1\overline{N}_2N_3\}$$

$$= P(N_1)P(N_2)P(\overline{N}_3) + P(\overline{N}_1)P(N_2)P(N_3) + P(N_1)P(\overline{N}_2)P(N_3)$$ （由独立性）

$$= 0.5\times0.7\times0.4 + 0.5\times0.7\times0.6 + 0.5\times0.3\times0.6$$
$$= 0.44$$

（3）设至少有一人进球的概率为p_3，则

$p_3 = 1 - P\{\overline{N}_1\overline{N}_2\overline{N}_3\} = 1 - P(\overline{N}_1)P(\overline{N}_2)P(\overline{N}_3) = 1 - 0.5\times0.3\times0.4 = 0.94$。

19，有一危重病人，仅当在 10 分钟之内能有一供血者供给足量的 A-RH$^+$血才能得救。设化验一位供血者的血型需要 2 分钟，将所需的血全部输入病人体内需要 2 分钟，医院只有一套验血型的设备，且供血者仅有 40%的人具有该型血，各人具有什么血型相互独立。求病人能得救的概率。

解：根据题意，医院最多可以验血型 4 次，也就是说最迟可以第 4 个人才验出是 A-RH$^+$型血。问题转化为最迟第 4 个人才验出是 A-RH$^+$型血的概率是多少？因为

第一次就检验出该型血的概率为 0.4；

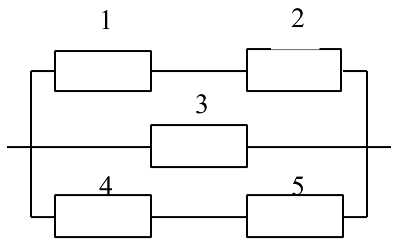
第二次才检验出该型血的概率为 $0.6\times0.4=0.24$；

第三次才检验出该型血的概率为 $0.6^2\times0.4=0.144$；

第四次才检验出该型血的概率为 $0.6^3\times0.4=0.0864$；

所以病人得救的概率为 $0.4+0.24+0.144+0.0864=0.8704$

20，一元件（或系统）能正常工作的概率称为元件（或系统）的可靠性。如图设有 5 个独立工作的元件 1，2，3，4，5 按先串联再并联的方式连接，设元件的可靠性均为 p，试求系统的可靠性。



第 20 题

解：设“元件 i 能够正常工作”记为事件 $A_i (i=1,2,3,4,5)$。

那么系统的可靠性为

$$P\{(A_1A_2)\cup(A_3)\cup(A_4A_5)\}=P(A_1A_2)+P(A_3)+P(A_4A_5)$$

$$-P(A_1A_2A_3)-P(A_1A_2A_4A_5)-P(A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)$$

$$=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)P(A_5)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)-P(A_1)P(A_2)P(A_4)P(A_5)$$

$$-P(A_3)P(A_4)P(A_5)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)$$

$$=p^2+p+p^2-p^3-p^4-p^3+p^5$$

$$=p+2p^2-2p^3-p^4+p^5$$

21，用一种检验法检测产品中是否含有某种杂质的效果如下。若真含有杂质检验结果为含有的概率为 0.8；若真不含有杂质检验结果为不含有的概率为 0.9，据以往的资料知一产品真含有杂质或真不含有杂质的概率分别为 0.4，0.6。今独立地对一产品进行了 3 次检验，结果是 2 次检验认为含有杂质，而一次检验认为不含有杂质，求此产品真含有杂质的概率。（注：本题较难，灵活应用全概率公式和 Bayes 公式）

解：设“一产品真含有杂质”记为事件 A，“对一产品进行 3 次检验，结果是 2 次检验认为含有杂质，而 1 次检验认为不含有杂质”记为事件 B。则要求的概率为 $P(A|B)$，根据 Bayes 公式可得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

又设“产品被检出含有杂质”记为事件 C，根据题意有 $P(A)=0.4$，而且 $P(C|A)=0.8$， $P(\overline{C}|\overline{A})=0.9$，所以

$P(B|A)=C_3^2\times0.8^2\times(1-0.8)=0.384$； $P(B|\overline{A})=C_3^2\times(1-0.9)^2\times0.9=0.027$

故，

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.4\times0.384}{0.4\times0.384+0.6\times0.027}=\frac{0.1536}{0.1698}=0.9046$$

（第 1 章习题解答完毕）

第 2 章　　　随机变量及其分布

1，设在某一人群中有 40%的人血型是 A 型，现在在人群中随机地选人来验血，直至发现血型是 A 型的人为止，以 Y 记进行验血的次数，求 Y 的分布律。

解：显然，Y 是一个离散型的随机变量，Y 取 k 表明第 k 个人是 A 型血而前 $k-1$ 个人都不是 A 型血，因此有

$$P\{Y=k\}=0.4\times(1-0.4)^{k-1}=0.4\times0.6^{k-1},\qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

上式就是随机变量 Y 的分布律（这是一个几何分布）。

2，水自 A 处流至 B 处有 3 个阀门 1，2，3，阀门联接方式如图所示。当信号发出时各阀门以 0.8 的概率打开，以 X 表示当信号发出时水自 A 流至 B 的通路条数，求 X 的分布律。设各阀门的工作相互独立。

解：X 只能取值 0，1，2。设以 $A_i\ (i=1,2,3)$ 记第 i 个阀门没有打开这一事件。则

$P\{X=0\}=P\{A_1(A_2\cup A_3)\}=P\{(A_1A_2)\cup(A_1A_3)\}$

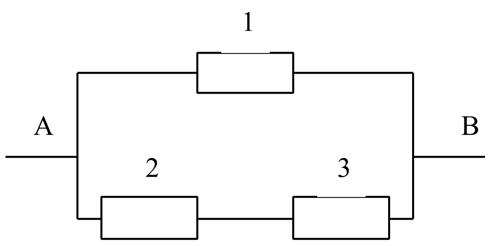
$=P\{A_1A_2\}+P\{A_1A_3\}-P\{A_1A_2A_3\}=P(A_1)P(A_2)+P(A_1)P(A_3)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=(1-0.8)^2+(1-0.8)^2-(1-0.8)^3=0.072$，

类似有 $P\{X=2\}=P\{\overline{A}_1(\overline{A}_2\overline{A}_3)\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0.8^3=0.512$，

$P\{X=1\}=1-P\{X=0\}-P\{X=2\}=0.416$,综上所述，可得分布律为

X	0	1	2
$P\{X=k\}$	0.072	0.512	0.416



3,据信有 20%的美国人没有任何健康保险，现任意抽查 15 个美国人，以 X 表示 15 个人中无任何健康保险的人数（设各人是否有健康保险相互独立）。问 X 服从什么分布？写出分布律。并求下列情况下无任何健康保险的概率：（1）恰有 3 人；（2）至少有 2 人；（3）不少于 1 人且不多于 3 人；（4）多于 5 人。

解：根据题意，随机变量 X 服从二项分布 B(15, 0.2)，分布律为

$$P(X=k)=C_{15}^{k}\times 0.2^{k}\times 0.8^{15-k},\quad k=0,1,2,\cdots 15\text{。}$$

（1）$P(X=3)=C_{15}^{3}\times 0.2^{3}\times 0.8^{12}=0.2501,$

（2）$P(X\ge 2)=1-P(X=1)-P(X=0)=0.8329$；

（3）$P(1\le X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0.6129$；

（4）$P(X>5)=1-P(X=5)-P(X=4)-P(X=3)-P(X=2)$

$$-P(X=1)-P(X=0)=0.0611$$

4，设有一由 n 个元件组成的系统，记为 $k/n[G]$，这一系统的运行方式是当且仅当 n 个元件中至少有 $k\ (0<k\le n)$ 个元件正常工作时，系统正常工作。现有一 $3/5[G]$ 系统，它由相互独立的元件组成，设每个元件的可靠性均为 0.9，求这一系统的可靠性。

解：对于 $3/5[G]$ 系统，当至少有 3 个元件正常工作时，系统正常工作。而系统中正常工作的元件个数 X 服从二项分布 B(5, 0.9)，所以系统正常工作的概率为

$$\sum_{k=3}^{5}P(X=k)=\sum_{k=3}^{5}C_{5}^{k}\times 0.9^{k}\times 0.1^{5-k}=0.99144$$

5，某生产线生产玻璃制品，生产过程中玻璃制品常出现气泡，以至产品成为次品，设次品率为 0.001，现取 8000 件产品，用泊松近似，求其中次品数小于 7 的概率。（设各产品是否为次品相互独立）

解：根据题意，次品数 X 服从二项分布 B(8000, 0.001)，所以

$$P(X<7)=P(X\le 6)=\sum_{k=0}^{6}C_{8000}^{k}0.001^{k}\times 0.999^{8000-k}$$

$$\approx\sum_{k=0}^{6}\frac{(8000\times 0.001)^{k}e^{-8000\times 0.001}}{k!}=\sum_{k=0}^{6}\frac{8^{k}e^{-8}}{k!}=0.3134\text{（查表得）。}$$

6，（1）设一天内到达某港口城市的油船的只数 X~$\pi(10)$，求 $P\{X>15\}$

（2）已知随机变量 X~$\pi(\lambda)$，且有 $P\{X>0\}=0.5$，求 $P\{X\ge 2\}$。

解：（1）$P\{X>15\}=1-P\{X\le 15\}=1-0.9513=0.0487$；

（2）根据 $P\{X>0\}=1-P\{X=0\}=1-e^{-\lambda}=0.5$，得到 $\lambda=\ln 2$。所以

$P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-0.5-\lambda e^{-\lambda}=(1-\ln 2)/2\approx 0.1534$。

7，一电话公司有 5 名讯息员，各人在 t 分钟内收到讯息的次数 $X\sim\pi(2t)$（设各人收到讯息与否相互独立）。（1）求在一给定的一分钟内第一个讯息员未收到讯息的概率。（2）求在给定的一分钟内 5 个讯息员恰有 4 人未收到讯息的概率。（3）写出在一给定的一分钟内，所有 5 个讯息员收到相同次数的讯息的概率。

解：在给定的一分钟内，任意一个讯息员收到讯息的次数 $X\sim\pi(2)$。

（1） $P\{X=0\}=e^{-2}\approx 0.1353$；

（2）设在给定的一分钟内 5 个讯息员中没有收到讯息的讯息员人数用 Y 表示，则 Y~ B(5, 0.1353)，所以

$$P\{Y=4\}=C_5^4 0.1353^4\times(1-0.1353)=0.00145\ 。$$

（3）每个人收到的讯息次数相同的概率为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^k e^{-2}}{k!}\right)^5=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{32^k e^{-10}}{(k!)^5}\right)$$

8，一教授当下课铃打响时，他还不结束讲解。他常结束他的讲解在铃响后的一分钟以内，以 X 表示铃响至结束讲解的时间。设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}kx^2 & 0\leq x\leq 1\\ 0 & 其\quad 他\end{cases}$，（1）确定 k；（2）求 $P\{X\leq\frac{1}{3}\}$；（3）求 $P\{\frac{1}{4}\leq X\leq\frac{1}{2}\}$；（4）求 $P\{X>\frac{2}{3}\}$。

解：（1）根据 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx^2dx=\frac{k}{3}$，得到 $k=3$；

（2） $P\{X\leq\frac{1}{3}\}=\int_0^{1/3}3x^2dx=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$；

（3） $P\{\frac{1}{4}\leq X\leq\frac{1}{2}\}=\int_{1/4}^{1/2}3x^2dx=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{64}$；

（4） $P\{X>\frac{2}{3}\}=\int_{2/3}^{1}3x^2dx=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$。

9，设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0.003x^2 & 0\leq x\leq 10\\ 0 & 其\quad 他\end{cases}$，求 t 的方程 $t^2+2Xt+5X-4=0$ 有实根的概率。

解：方程$t^2+2Xt+5X-4=0$有实根表明$\Delta=4X^2-4(5X-4)\ge 0$，即$X^2-5X+4\ge 0$，从而要求$X\ge 4$或者$X\le 1$。因为

$$P\{X\le 1\}=\int_0^1 0.003x^2dx=0.001,\quad P\{X\ge 4\}=\int_4^{10}0.003x^2dx=0.936$$

所以方程有实根的概率为 0.001+0.936=0.937.

10，设产品的寿命 X（以周计）服从瑞利分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{100}e^{-x^2/200} & x\ge 0\\ 0 & \text{其　他}\end{cases}$$

（1）　求寿命不到一周的概率；

（2）　求寿命超过一年的概率；

（3）　已知它的寿命超过 20 周，求寿命超过 26 周的条件概率。

解：（1）$P\{X<1\}=\int_0^1\dfrac{x}{100}e^{-x^2/200}dx=1-e^{-1/200}\approx 0.00498$；

（2）$P\{X>52\}=\int_{52}^{+\infty}\dfrac{x}{100}e^{-x^2/200}dx=e^{-2704/200}\approx 0.000001$；

（3）$P\{X>26|X>20\}=\dfrac{P\{X>26\}}{P\{X>20\}}=\dfrac{\int_{26}^{+\infty}\frac{x}{100}e^{-x^2/200}dx}{\int_{20}^{+\infty}\frac{x}{100}e^{-x^2/200}dx}=e^{-276/200}\approx 0.25158$。

11，设实验室的温度 X（以$^\circ C$计）为随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}(4-x^2) & -1\le x\le 2\\ 0 & \text{其　他}\end{cases}$$

（1）　某种化学反应在温度 X >1 时才能发生，求在实验室中这种化学反应发生的概率。

（2）　在 10 个不同的实验室中，各实验室中这种化学反应是否会发生时相互独立的，以 Y 表示 10 个实验室中有这种化学反应的实验室的个数，求 Y 的分布律。

（3）　求$P\{Y=2\}$，$P\{X\ge 2\}$。

解：（1）$P\{X>1\}=\int_1^2\dfrac{1}{9}(4-x^2)dx=\dfrac{5}{27}$；

（2）根据题意$Y\sim B(10,\dfrac{5}{27})$，所以其分布律为

$$P(Y=k)=C_{10}^{k}\times\left(\frac{5}{27}\right)^{k}\times\left(\frac{22}{27}\right)^{10-k},\quad k=0,1,2,\cdots10$$

（3） $P(Y=2)=C_{10}^{2}\times\left(\frac{5}{27}\right)^{2}\times\left(\frac{22}{27}\right)^{8}=0.2998$，

$P(Y\geq 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=0.5778$。

12，（1）设随机变量 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}0.2 & -1<y\leq 0\\ 0.2+Cy & 0<y\leq 1\\ 0 & \text{其　他}\end{cases}$$

试确定常数 C，求分布函数 $F(y)$，并求 $P\{0\leq Y\leq 0.5\}$，$P\{Y>0.5\mid Y>0.1\}$。

（2）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/8 & 0<x<2\\ x/8 & 2\leq x\leq 4\\ 0 & \text{其　他}\end{cases}$$

求分布函数 $F(x)$，并求 $P\{1\leq x\leq 3\}$，$P\{X\geq 1\mid X\leq 3\}$。

解：（1）根据 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)dy=\int_{-1}^{0}0.2dy+\int_{0}^{1}(0.2+Cy)dy=0.4+\frac{C}{2}$，得到 $C=1.2$。

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y}f(y)dy=\begin{cases}0 & y<-1\\ \int_{-1}^{y}0.2dy & -1\leq y<0\\ \int_{-1}^{0}0.2dy+\int_{0}^{y}(0.2+1.2y)dy & 0\leq y<1\\ \int_{-1}^{0}0.2dy+\int_{0}^{1}(0.2+1.2y)dy & y\geq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & y<-1\\ 0.2(y+1) & -1\leq y<0\\ 0.6y^{2}+0.2y+0.2 & 0\leq y<1\\ 1 & y\geq 1\end{cases}$$

$P\{0\leq Y\leq 0.5\}=P\{Y\leq 0.5\}-P\{Y\leq 0\}=F(0.5)-F(0)=0.45-0.2=0.25$;

$$P\{Y>0.5\mid Y>0.1\}=\frac{P\{Y>0.5\}}{P\{Y>0.1\}}=\frac{1-P\{Y\le 0.5\}}{1-P\{Y\le 0.1\}}=\frac{1-F(0.5)}{1-F(0.1)}=\frac{1-0.45}{1-0.226}=0.7106$$

（2）$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_0^x\frac{1}{8}dx & 0\le x<2\\ \int_0^2\frac{1}{8}dx+\int_2^x\frac{x}{8}dx & 2\le x<4\\ \int_0^2\frac{1}{8}dx+\int_2^4\frac{x}{8}dx & x\ge 4\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ x/8 & 0\le x<2\\ x^2/16 & 2\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

$P\{1\le x\le 3\}=F(3)-F(1)=9/16-1/8=7/16$；

$P\{X\ge 1\mid X\le 3\}=\dfrac{P\{\le 1X\le 3\}}{P\{X\le 3\}}=\dfrac{F(3)-F(1)}{F(3)}=7/9$。

13，在集合 A={1,2,3,….,n}中取数两次，每次任取一数，作不放回抽样，以 X 表示第一次取到的数，以 Y 表示第二次取到的数，求 X 和 Y 的联合分布律。并用表格形式写出当 n=3 时 X 和 Y 的联合分布律。

解：根据题意，取两次且不放回抽样的总可能数为 n(n-1)，因此

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{n(n-1)}，（i\ne j，且 1\le i,j\le n）$$

当 n 取 3 时，$P\{X=i,Y=j\}=\dfrac{1}{6}$，（$i\ne j$，且 $1\le i,j\le 3$），表格形式为

X \ Y	1	2	3
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

14,设一加油站有两套用来加油的设备，设备 A 是加油站的工作人员操作的，设备 B 是有顾客自己操作的。A，B 均有两个加油管。随机取一时刻，A，B 正在使用的软管根数分别记为 X，Y，它们的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0.10	0.08	0.06
1	0.04	0.20	0.14
2	0.02	0.06	0.30

（1）　求 $P\{X=1,Y=1\}$，$P\{X\le 1,Y\le 1\}$；

（2）　求至少有一根软管在使用的概率；

（3）　求 $P\{X=Y\}$，$P\{X+Y=2\}$。

解：（1）由表直接可得 $P\{X=1,Y=1\}$=0.2，

$P\{X \le 1, Y \le 1\}$=0.1+0.08+0.04+0.2=0.42

（2）至少有一根软管在使用的概率为

$$P\{X+Y \ge 1\} = 1 - P\{X=0, Y=0\} = 1 - 0.1 = 0.9$$

（3）$P\{X=Y\} = P\{X=Y=0\} + P\{X=Y=1\} + P\{X=Y=2\}$=0.1+0.2+0.3=0.6

$$P\{X+Y=2\} = P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=0\} = 0.28$$

15,设随机变量（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-(2x+4y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其 他} \end{cases}$$

试确定常数 C，并求 $P\{X>2\}$，$P\{X>Y\}$，$P\{X+Y<1\}$。

解：根据 $\iint\limits_{x>0,\, y>0} f(x,y)\,dxdy = 1$，可得

$$1 = \iint\limits_{x>0,\, y>0} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} Ce^{-(2x+4y)}\,dy = C\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-4y}\,dy = \frac{C}{8},$$

所以 $C=8$。

$$P\{X>2\} = \iint\limits_{x>2} f(x,y)\,dxdy = \int_2^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} 8e^{-(2x+4y)}\,dy = \int_2^{+\infty} 2e^{-2x}\,dx \int_0^{+\infty} 4e^{-4y}\,dy = e^{-4};$$

$$P\{X>Y\} = \iint\limits_{x>y} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x} 8e^{-(2x+4y)}\,dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx \int_0^{x} 4e^{-4y}\,dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x}(1-e^{-4x})\,dx = \frac{2}{3}$$

$$P\{X+Y<1\} = \iint\limits_{x+y<1} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{1} dx \int_0^{1-x} 8e^{-(2x+4y)}\,dy = \int_0^{1} 2e^{-2x}\,dx \int_0^{1-x} 4e^{-4y}\,dy = (1-e^{-2})^2。$$

16，设随机变量（X，Y）在由曲线 $y=x^2, y=x^2/2, x=1$ 所围成的区域 G 均匀分布。

（1） 求（X，Y）的概率密度；

（2） 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$。

解:（1）根据题意，（X，Y）的概率密度 $f(x,y)$ 必定是一常数，故由

$1 = \iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{1} dx \int_{x^2/2}^{x^2} f(x,y)\,dy = \frac{1}{6} f(x,y)$，得到 $f(x,y) = \begin{cases} 6, & (x,y) \in G \\ 0, & \text{其 他} \end{cases}$。

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2/2}^{x^2}6dy=3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}}6dx, & 0<y<0.5\\ \int_{\sqrt{y}}^{1}6dx, & 0.5\le y<1\\ 0，其\quad 他 & \end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{2y}-\sqrt{y}), & 0<y<0.5\\ 6(1-\sqrt{y}), & 0.5<y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

18，设 X,Y 是两个随机变量，它们的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{2}e^{-x(1+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其\quad 他\end{cases},$$

（1） 求 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$；

（2） 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$，写出当 $x=0.5$ 时的条件概率密度；

（3） 求条件概率 $P\{Y\ge 1\,|\,X=0.5\}$。

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{2}e^{-x(1+y)}dy=\frac{x^2}{2}e^{-x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$。

（2）当 $x>0$ 时，

$$f_{Y|X}(y|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}xe^{-xy}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}。$$

特别地，当 $x=0.5$ 时

$$f_{Y|X}(y\,|\,x=0.5)=\begin{cases}0.5e^{-0.5y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}。$$

（3）$P\{Y\ge 1\,|\,X=0.5\}=\int_1^{+\infty}f_{Y|X}(y\,|\,x=0.5)dy=\int_1^{+\infty}0.5e^{-0.5y}dy=e^{-0.5}$。

19，（1）在第 14 题中求在 $X=0$ 的条件下 Y 的条件分布律；在 $Y=1$ 的条件下 X 的条件分布律。

（2）在 16 题中求条件概率密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$，$f_{X|Y}(x\,|\,y)$，$f_{X|Y}(x|\,0.5)$。

解：（1）根据公式 $P\{Y=i \mid X=0\}=\dfrac{P\{Y=i, X=0\}}{P\{X=0\}}$，得到在 $X=0$ 的条件下 Y 的条件分布律为

Y	0	1	2
$P\{Y \mid X=0\}$	5/12	1/3	1/4

类似地，在 $Y=1$ 的条件下 X 的条件分布律为

X	0	1	2
$P\{X \mid Y=1\}$	4/17	10/17	3/17

（2）因为 $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$。

$f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2/2}^{x^2} 6dy=3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$；$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{2y}-\sqrt{y}), & 0<y<0.5\\ 6(1-\sqrt{y}), & 0.5<y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$。

所以，当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y \mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}, & x^2/2<y<x^2\\ 0, & 其他\end{cases}$；

当 $0<y<0.5$ 时，$f_{X|Y}(x \mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2y}-\sqrt{y}}, & \sqrt{y}<x<\sqrt{2y}\\ 0, & 其他\end{cases}$；

当 $0.5 \le y<1$ 时，$f_{X|Y}(x \mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\sqrt{y}}, & \sqrt{y}<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$；

当 $y=0.5$ 时，$f_{X|Y}(x \mid y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\sqrt{0.5}}, & \sqrt{0.5}<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$。

20，设随机变量（X，Y）在由曲线 $y=x^2, y=\sqrt{x}$ 所围成的区域 G 均匀分布。

（1）　写出（X，Y）的概率密度；

（2）　求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

（3）　求条件概率密度 $f_{Y|X}(y \mid x)$，并写出当 $x=0.5$ 时的条件概率密度。

解:（1）根据题意，（X，Y）的概率密度 $f(x,y)$ 必定是一常数，故由

$1=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=\frac{1}{3}f(x,y)$，得到 $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in G\\ 0, & 其\quad他\end{cases}$。

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其\quad他\end{cases}$；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y^2}^{\sqrt{y}} 3dx, & 0<y<1\\ 0，其\quad他\end{cases}=\begin{cases}3(\sqrt{y}-y^2), & 0<y<1\\ 0, & 其\quad他\end{cases}。$$

（3）当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}-x^2}, & x^2<y<\sqrt{x}\\ 0, & 其他\end{cases}$。

特别地，当 $x=0.5$ 时的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|0.5)=\begin{cases}\dfrac{4}{2\sqrt{2}-1}, & 1/4<y<\sqrt{2}/2\\ 0, & 其他\end{cases}。$$

21，设 (X,Y) 是二维随机变量，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2+x}{6}, & 0<x<2\\ 0, & 其\quad他\end{cases}$$

且当 $X=x(0<x<2)$ 时 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{1+x/2}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

（1） 求 (X,Y) 联合概率密度；

（2） 求 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度；

（3） 求在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。

解：（1）$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{3} & 0<x<2,0<y<1\\ 0 & 其\quad 他\end{cases}$；

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^2\dfrac{1+xy}{3}dx=\dfrac{2}{3}(1+y) & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$；

（3）当$0<y<1$时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{2(1+y)}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$。

22，（1）设一离散型随机变量的分布律为

Y	-1	0	1
p_k	$\dfrac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\dfrac{\theta}{2}$

又设Y_1,Y_2是两个相互独立的随机变量，且Y_1,Y_2都与Y有相同的分布律。求Y_1,Y_2的联合分布律。并求$P\{Y_1=Y_2\}$。

（2）问在 14 题中X,Y是否相互独立？

解：（1）由相互独立性，可得Y_1,Y_2的联合分布律为

$$P\{Y_1=i,Y_2=j\}=P\{Y_1=i\}P\{Y_2=j\}，\ i,j=-1,0,1$$

结果写成表格为

Y_1 \ Y_2	-1	0	1
-1	$\theta^2/4$	$\theta(1-\theta)/2$	$\theta^2/4$
0	$\theta(1-\theta)/2$	$(1-\theta)^2$	$\theta(1-\theta)/2$
1	$\theta^2/4$	$\theta(1-\theta)/2$	$\theta^2/4$

$P\{Y_1=Y_2\}=P\{Y_1=Y_2=-$

。

（2）14 题中，求出边缘分布律为

X \ Y	0	1	2	$P\{X=i\}$
0	0.10	0.08	0.06	0.24
1	0.04	0.20	0.14	0.38
2	0.02	0.06	0.30	0.38
$P\{Y=j\}$	0.16	0.34	0.50	1

很显然，$P\{X=0,Y=0\} \neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$，所以 X,Y 不是相互独立。

23，设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，$X \sim U(0,1)$，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 8y & 0<y<1/2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

试写出 X,Y 的联合概率密度，并求 $P\{X>Y\}$。

解：根据题意，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

所以根据独立定，X,Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 8y & 0<x<1,0<y<1/2 \\ 0 & 其他 \end{cases}。$$

$$P\{X>Y\}=\iint_{x>y} f(x,y)dxdy=\int_0^{1/2}dx\int_y^1 8ydx=\frac{2}{3}$$

24，设随机变量 X 具有分布律

X	-2	-1	0	1	3
p_k	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

求 $Y=X^2+1$ 的分布律。

解：根据定义立刻得到分布律为

Y	1	2	5	10
p_k	1/5	7/30	1/5	11/30

25，设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $U=|X|$ 的概率密度。

解：设 X,U 的概率密度分别为 $f_X(x),f_U(u)$，U 的分布函数为 $F_U(u)$。则

当 $u \le 0$ 时，$F_U(u)=P\{U\le u\}=P\{|X|\le u\}=0$，$f_U(u)=0$；

当 $u>0$ 时，$F_U(u)=P\{U\le u\}=P\{|X|\le u\}=P\{-u\le X\le u\}=2\Phi(u)-1$，

$$f_U(u)=\left[F_U(u)\right]'=2f_X(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-u^2/2}。$$

所以，$f_U(u)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-u^2/2} & u>0\\ 0 & u\le 0\end{cases}$。

26，（1）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求 $Y=\sqrt{X}$ 的概率密度。

（2）设随机变量 $X\sim U(-1,1)$，求 $Y=(X+1)/2$ 的概率密度。

（3）设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

解：设 X,Y 的概率密度分别为 $f_X(x),f_Y(y)$，分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$。则

（1）当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sqrt{X}\le y\}=0$，$f_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sqrt{X}\le y\}=P\{X\le y^2\}=F_X(y^2)$，

$$f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=2yf_X(y^2)=2ye^{-y^2}。$$

所以，$f_Y(y)=\begin{cases}2ye^{-y^2} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$。

（2）此时 $f_X(x)=\begin{cases}1/2 & -1<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$。

因为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{(X+1)/2\le y\}=P\{X\le 2y-1\}=F_X(2y-1)$，

故，$f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=2f_X(2y-1)=1,\quad -1<2y-1<1$，

所以，$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$。

（3）当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$$=\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1,$$

故， $f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=2f_X(\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}$。

所以，$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$。

27，设一圆的半径 X 是随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(3x+1)/8 & 0<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求圆面积 A 的概率密度。

解：圆面积 $A=\pi X^2$，设其概率密度和分布函数分别为 $g(y),G(y)$。则

$G(y)=P\{\pi X^2\le y\}=P\{X\le\sqrt{y/\pi}\}=F_X(\sqrt{y/\pi})$， 故

$$g(y)=\left[G(y)\right]'=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}f(\sqrt{y/\pi})=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\times\frac{3\sqrt{y}+\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\pi}}=\frac{3\sqrt{y}+\sqrt{\pi}}{16\pi\sqrt{y}},\quad 0<\sqrt{y/\pi}<2$$

所以，$g(y)=\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{y}+\sqrt{\pi}}{16\pi\sqrt{y}} & 0<y<4\pi\\ 0 & 其他\end{cases}$。

28，设随机变量 X,Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，验证 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/(2\sigma^2)} & z\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}。$$

解：因为随机变量 X,Y 相互独立，所以它们的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}。$$

先求分布函数，当 $z>0$ 时， $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z^2\}$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},$$

故， $f_Z(z)=\left[F_Z(z)\right]'=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/(2\sigma^2)} & z\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$。

29，设随机变量 $X\sim U(-1,1)$，随机变量 Y 具有概率密度 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$，$-\infty<y<+\infty$，设 X,Y 相互独立，求 $Z=X+Y$的概率密度。

解：因为$f_X(x)=\begin{cases}1/2 & -1<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，所以 $Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)f_X(z-y)dy=\int_{z-1}^{z+1}\frac{1}{2\pi(1+y^2)}dy=\frac{1}{2\pi}\left[\arctan(z+1)-\arctan(z-1)\right]。$$

30 随机变量 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}，f_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2 ye^{-\lambda y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$\lambda>0$，X,Y 相互独立。求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解： 根据卷积公式，得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)f_X(z-y)dy=\int_0^z\lambda^3ye^{-\lambda z}dy=\frac{\lambda^3}{2}z^2e^{-\lambda z}，\ z>0。$$

所以$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^3}{2}z^2e^{-\lambda z} & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}。$$

31，设随机变量 X,Y 都在(0,1)上服从均匀分布，且 X,Y 相互独立，求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解：因为 X,Y 都在(0,1)上服从均匀分布，所以

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}，f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

根据卷积公式，得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)f_X(z-y)dy=\begin{cases}\int_{z-1}^{1}1dy, & z\ge 1\\ \int_0^z 1dy, & 0\le z<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2-z, & 1\le z<2\\ z, & 0\le z<1\\ 0, & 其他\end{cases}。$$

32，设随机变量 X,Y 相互独立，它们的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}e^{-3x}, & x>0,0\le y\le 2\\ 0, & \text{其　他}\end{cases}$$

（1）　求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$。

（2）　求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数。

（3）　求概率 $P\{1/2<Z\le 1\}$。

解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2 3e^{-3x}/2dy=3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & \text{其　他}\end{cases}$；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^\infty 3e^{-3x}/2dx, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其　他}\end{cases}=\begin{cases}1/2, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其　他}\end{cases}。$$

（2）$Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$$

因为 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-3x}, & x>0\end{cases}$； $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y/2 & 0\le y\le 2\\ 1 & y>2\end{cases}$，

所以，$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z}{2}\left(1-e^{-3z}\right), & 0\le z\le 2\\ 1-e^{-3z}, & z>2\end{cases}$。

（3）$P\{1/2<Z\le 1\}=F_Z(1)-F_Z(1/2)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}e^{-3}+\dfrac{1}{4}e^{-3/2}$。

33，（1）一条绳子长为 $2l$，将它随机地分为两段，以 X 表示短的一段的长度，写出 X 的概率密度。

（2）两条绳子长度均为 $2l$，将它们独立地各自分成两段，以 Y 表示四段绳子中最短的一段的长度，验证 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}2(l-y)/l^2, & 0<y<l\\ 0, & \text{其　他}\end{cases}。$$

解:（1）根据题意，随机变量 $X \sim U(0,l)$，所以概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{l} & 0<x<l \\ 0 & 其他\end{cases}。$$

（2）设这两条绳子被分成两段以后较短的那一段分别记为 X_1, X_2，则它们都在 $(0,l)$ 上服从均匀分布。

$Y=\min\{X_1,X_2\}$，其分布函数为

$$F_Y(y)=1-\left[1-F_{X_1}(y)\right]\left[1-F_{X_2}(y)\right]=1-(1-\frac{y}{l})^2,\quad 0<y<l,$$

所以密度函数为

$$f_Y(y)=\left(F_Y(y)\right)'=\begin{cases}2(l-y)/l^2, & 0<y<l \\ 0, & 其\ 他\end{cases}。$$

34，设随机变量 X 和 Y 的联合分布律为

（1） 求 $U=\max(X,Y)$ 的分布律。

（2） 求 $V=\min(X,Y)$ 的分布律。

（3） 求 $W=X+Y$ 的分布律。

X \ Y	0	1	2
0	1/12	1/6	1/24
1	1/4	1/4	1/40
2	1/8	1/20	0
3	1/120	0	0

解:（1） $U=\max(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{U=k\}=P\{\max(X,Y)=k\}=P\{X=k,Y\le k\}+P\{Y=k,X<k\},\quad k=0,1,2,3$$

如，$P\{U=2\}=P\{X=2,Y\le 2\}+P\{Y=2,X<2\}$

$$=1/8+1/20+0+1/24+1/40=29/120,$$

其余类似。结果写成表格形式为

U	0	1	2	3
p_k	1/12	2/3	29/120	1/120

（2）$V=\min(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{V=k\}=P\{\min(X,Y)=k\}=P\{X=k,Y\geq k\}+P\{Y=k,X>k\},\quad k=0,1,2$$

如，$P\{V=2\}=P\{X=2,Y\geq 2\}+P\{Y=2,X>2\}=0+0=0$，

其余类似。结果写成表格形式为

U	0	1
p_k	27/40	13/40

（3）$W=X+Y$ 的分布律为

$$P\{W=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\},\quad k=0,1,2,3,4,5$$

如，$P\{W=2\}=\sum_{i=0}^{2}P\{X=i,Y=2-i\}=1/24+1/4+1/8=5/12$，

其余类似。结果写成表格形式为

W	0	1	2	3
p_k	1/12	5/12	5/12	1/12

（第 2 章习题解答完毕）

第 3 章　随机变量的数字特征

1，**解**：根据题意，有 1/5 的可能性取到 5 个单词中的任意一个。它们的字母数分别为 4，5，6，7，7。所以分布律为

X	4	5	6	7
p_k	1/5	1/5	1/5	2/5

$E(X)=\frac{1}{5}(4+5+6+7+7)=29/5$.

2，**解**：5 个单词字母数还是 4，5，6，7，7。这时，字母数更

多的单词更有可能被取到。分布律为

Y	4	5	6	7
p_k	4/29	5/29	6/29	14/29

$E(Y)=\frac{1}{29}(4\times4+5\times5+6\times6+7\times14)=175/29$.

3，**解**：根据古典概率公式，取到的电视机中包含的次品数分别为 0，1，2 台的概率分别为

$$p_0=\frac{C_{10}^3}{C_{12}^3}=\frac{6}{11},\qquad p_1=\frac{C_2^1C_{10}^2}{C_{12}^3}=\frac{9}{22},\qquad p_2=\frac{C_2^2C_{10}^1}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}。$$

所以取到的电视机中包含的次品数的数学期望为

$$E=\frac{6}{11}\times0+\frac{9}{22}\times1+\frac{1}{22}\times2=\frac{1}{2}(台)。$$

4，**解**：根据题意，有 1/6 的概率得分超过 6，而且得分为 7 的概率为两个 1/6 的乘积（第一次 6 点，第 2 次 1 点），其余类似；有 5/6 的概率得分小于 6。分布律为

Y	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

得分的数学期望为

$$E=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5)+\frac{1}{36}(7+8+9+10+11+12)=\frac{49}{12}(点)。$$

5，**解**：（1）根据 $X\sim\pi(\lambda)$，可得 $P\{X=5\}=\frac{\lambda^5e^{-\lambda}}{5!}=\frac{\lambda^6e^{-\lambda}}{6!}=P\{X=6\}$，因此计算得到 $\lambda=6$，即 $X\sim\pi(6)$。所以 $E(X)$=6。

（2）根据题意，按照数学期望的公式可得

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}k\frac{6}{\pi^2k^2}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\frac{6\ln 2}{\pi^2},$$

因此期望存在。（利用了 $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1},\quad -1<x\le 1$）（不符书上答案）

6，**解**：（1）一天的平均耗水量为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x/3}}{9}dx=\int_0^{+\infty}-\frac{x^2}{3}d(e^{-x/3})=0+\int_0^{+\infty}\frac{2xe^{-x/3}}{3}dx=\int_0^{+\infty}-2xd(e^{-x/3})$$

$$=0+\int_0^{+\infty}2e^{-x/3}dx=6$$ （百万升）。

（2）这种动物的平均寿命为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)=\int_5^{+\infty}xd(1-\frac{25}{x^2})=\int_5^{+\infty}\frac{50}{x^2}dx=10$$ （年）。

7，**解**：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 42x^2(1-x)^5dx=\int_0^1-7x^2d\left[(1-x)^6\right]$

$$=-7x^2\left[(1-x)^6\right]_0^1+\int_0^1 14x\left[(1-x)^6\right]dx=\int_0^1-2xd\left[(1-x)^7\right]=-2x(1-x)^7\Big|_0^1+\int_0^1 2(1-x)^7dx$$

=1/4。

8，**解**：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_1^2 2x(1-1/x^2)dx=(x^2-2\ln x)\Big|_1^2=3-2\ln 2$。

9，**解**：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^0\frac{3x}{2}(1+x)^2dx+\int_0^1\frac{3x}{2}(1-x)^2dx$

$$=\int_1^0 \frac{3x}{2}(1-x)^2dx+\int_0^1 \frac{3x}{2}(1-x)^2dx=0。$$

（对第一个积分进行变量代换 $x=-y$）

10， 解： $E(\sin\frac{\pi X}{2})=\sum_{k=0}^{4}\left[\sin\frac{k\pi}{2}\times C_4^k\times p^k\times(1-p)^{4-k}\right]$

$=C_4^1\times p^1\times(1-p)^3+C_4^3\times p^3\times(1-p)^1=4p(1-p)(1-2p+2p^2)$。（不符书上答案）

11，**解**：R 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1/a, & 0\le x\le a\\ 0, & 其他\end{cases}$，所以

$$E(V)=\int_0^a \frac{\pi r^3}{6}\times\frac{1}{a}dr=\frac{\pi a^3}{24}。$$

12，**解**： $E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_0^4 x^2\times 0.3e^{-0.3x}dx+\int_4^{+\infty}16\times 0.3e^{-0.3x}dx$

$$=\frac{1}{9}(200-584e^{-1.2})$$ （不符书上答案）

13，**解**：因为 $X_i(i=1,2,\cdots n)$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$，所以可以

求出 Y_1,Y_n 的分布函数为

$$F_{\min}(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-(1-y)^n, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}，\qquad F_{\max}(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y^n, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}。$$

Y_1,Y_n 的密度函数为

$$f_{\min}(y)=\begin{cases}n(1-y)^{n-1}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}，\quad f_{\max}(y)=\begin{cases}ny^{n-1}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}。$$

所以 Y_1,Y_n 的数学期望为

$$E(Y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\min}(y)dy=\int_0^1 ny(1-y)^{n-1}dy=\int_0^1 n(1-y)^{n-1}dy-\int_0^1 n(1-y)^n dy=\frac{1}{n+1},$$

$$E(Y_n)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\max}(y)dy=\int_0^1 ny^n dy=\frac{n}{n+1}。$$

14，**解**：求出边缘分布律如下

X \ Y	0	1	2	$P\{X=k\}$
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	3/14	3/14	0	12/28
2	1/28	0	0	1/28
$P\{Y=k\}$	10/28	15/28	3/28	1

$$E(X)=\sum_{k=0}^{2}kP\{X=k\}=1/2,\qquad E(Y)=\sum_{k=0}^{2}kP\{Y=k\}=3/4,$$

$$E(XY)=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}ijP\{X=i\}P\{Y=j\}=1\times1\times3/14=3/14,$$

$$E(X-Y)=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}(i-j)P\{X=i\}P\{Y=j\}=-7/28=-1/4,$$

$$E(3X+2Y)=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}(3i+2j)P\{X=i\}P\{Y=j\}=84/28=3。$$

15，**解**：$E[\min(X,Y)]=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\min(i,j)P\{X=i\}P\{Y=j\}=1\times3/14=3/14$，

$$E[Y/(X+1)]=\sum_{j=0}^{2}\sum_{i=0}^{2}\frac{j}{i+1}P\{X=i\}P\{Y=j\}=18/28=9/14。$$

16，**解**：$E(X)=\iint\limits_{R\times R} xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} 24x^2 ydx=2/5$，

$E(Y)=\iint\limits_{R\times R} yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} 24y^2 xdx=2/5$，

$E(XY)=\iint\limits_{R\times R} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} 24x^2 y^2 dx=2/15$。

17，**解**：根据题意，可得利润的分布律为

Y	2000	1000	0	-1000	-2000
p_k	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

因此，

$E(Y)=2000\times 0.2+1000\times 0.3-1000\times 0.1-2000\times 0.1=400$（元）

$E(Y^2)=2000^2\times 0.2+1000^2\times 0.3+(-1000)^2\times 0.1+(-2000)^2\times 0.1=1600000$

$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=1440000$。

18 **解** $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}dx=-xe^{-x^2/(2\sigma^2)}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x^2/(2\sigma^2)}dx=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}dx=-x^2e^{-x^2/(2\sigma^2)}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2/(2\sigma^2)}dx$

$=-2\sigma^2e^{-x^2/(2\sigma^2)}\Big|_0^{+\infty}=2\sigma^2$，

$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=(2-\pi/2)\sigma^2$，$\sqrt{D(X)}=\sqrt{(2-\pi/2)}\sigma$。

（本题积分利用了$\int_0^{+\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，这个结果可以从标准正态分布密度函数中得到）

19，**解**：$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP\{X=k\}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}=p\times\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$，

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P\{X=k\}=p\sum_{k=1}^{+\infty}k^2(1-p)^{k-1}=p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1)(1-p)^{k-1}-\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}\right)$$

$$=p(\frac{2}{p^3}-\frac{1}{p^2})=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p},$$

所以，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1-p}{p^2}$。

本题利用了幂级数求和中先积分再求导的方法。设 $s(p)=\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}$，则 $\int_1^p s(p)dp=-\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k=1-\frac{1}{p}$，所以 $s(p)=\left(\int_1^p s(p)dp\right)'=\frac{1}{p^2}$。类似的，设 $S(p)=\sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1)(1-p)^{k-1}$，则经过两次积分以后可得到 $\frac{(1-p)^2}{p}$，在经过两次求导得到 $S(p)=\frac{2}{p^3}$。

20，**解**：（1）当 $k>1$ 时，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}\frac{k\theta^k}{x^k}dx=k\theta^k\int_{\theta}^{+\infty}\frac{1}{x^k}dx=\frac{k\theta}{k-1}$。

（2）当 $k=1$ 时，$E(X)=\theta\int_{\theta}^{+\infty}\frac{1}{x}dx=+\infty$，即 $E(X)$ 不存在。

（3），当 $k>2$ 时，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}\frac{k\theta^k}{x^{k-1}}dx=\frac{k\theta^2}{k-2}$，

所以，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=k\theta^2\left[\frac{1}{k-2}-\frac{k}{(k-1)^2}\right]=\frac{k\theta^2}{(k-1)^2(k-2)}$。

（4）当 $k=2$ 时，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}\frac{2\theta^2}{x}dx=+\infty$，所以 $D(X)$ 不存在。

21，**解**：（1）根据 14 题中结果，得到

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=3/14-1/2\times3/4=-9/56;$$

因为 $E(X^2)=\sum_{k=0}^{2}k^2P\{X=k\}=4/7$， $E(Y^2)=\sum_{k=0}^{2}k^2P\{Y=k\}=27/28$，

所以 $D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=9/28$， $D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=45/112$，

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}。$$

（2）根据 16 题结果可得：

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2/15-(2/5)^2=-2/75;$$

因为 $E(X^2)=\iint\limits_{R\times R}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dy\int_0^{1-y}24x^3ydx=1/5$，

$$E(Y^2)=\iint\limits_{R\times R}y^2f(x,y)dxdy=\int_0^1dy\int_0^{1-y}24y^3xdx=1/5，$$

所以， $D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=1/25$， $D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=1/25$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=2/75，$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{2}{3}。$$

（3）在第 2 章 14 题中，由以下结果

X \ Y	0	1	2	$P\{X=k\}$
0	0.10	0.08	0.06	0.24
1	0.04	0.20	0.14	0.38
2	0.02	0.06	0.30	0.38
$P\{Y=k\}$	0.16	0.34	0.50	1

得到， $E(X)=1.14$， $E(Y)=1.34$， $E(XY)=1.8$， $E(X^2)=1.9$， $E(Y^2)=2.34$，

所以， $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.2724;$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=0.6004\text{，}\quad D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=0.5444,$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{0.2724}{0.5717}=0.4765.$$

22，**解**：根据题意有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

$$=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=9+4+2\times(-1/6)\times6=11\text{。}$$

$$D(X-3Y+4)=D(X+4)+D(3Y)-2Cov(X+4,3Y)$$

$$=D(X)+9D(Y)-6Cov(X,Y)=9+36-6\times(-1/6)\times6=51\text{。}$$

23，**解**：（1）因为 X_1,X_2,X_3 相互独立，所以

$$E\left[X_1^{\,2}(X_2-4X_3)^2\right]=E(X_1^{\,2})E[(X_2-4X_3)^2]=E[X_2^{\,2}-8X_2X_3+16X_3^{\,2}]$$

$$=E[X_2^{\,2}-8X_2X_3+16X_3^{\,2}]=E[X_2^{\,2}]-8E[X_2]E[X_3]+16E[X_3^{\,2}]$$

$$=1-0+16=17\text{。}$$

（2）根据题意，可得 $E(X_i)=1/2,\quad E(X_i^2)=D(X_i)+\left[E(X_i)\right]^2=1/3$，$i=1,2,3$。

$$E\left[(X_1-2X_2+X_3)^2\right]=E[X_1^{\,2}+4X_2^{\,2}+X_3^{\,2}-4X_1X_2+2X_1X_3-4X_3X_2]$$

$$=E[X_1^{\,2}]+4E[X_2^{\,2}]+E[X_3^{\,2}]-4E[X_1]E[X_2]+2E[X_1]E[X_3]-4E[X_3]E[X_2]$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}\text{。}$$

24，**解**：因为 $E(X)=\iint\limits_{R\times R}xf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}xdy=2/3$，

$$E(Y)=\iint\limits_{R\times R}yf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}ydy=0\text{，}$$

$$E(XY)=\iint\limits_{R\times R}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}xydy=0\text{，}$$

所以，$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，

即，验证了 X,Y 不相关。

又因为，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1dx, & -1<y<0\\ \int_{y}^{1}1dx, & 0\le y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}=\begin{cases}1+y, & 0<y<0.5\\ 1-y, & 0.5<y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}，$$

显然，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以验证了 X,Y 不是相互独立的。

25，**解**：引入随机变量定义如下

$$X_i=\begin{cases}1 & 第i个球落入第i个盒子\\ 0 & 第i个球未落入第i个盒子\end{cases}$$

则总的配对数 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，而且因为 $P\{X_i=1\}=\frac{1}{n}$，所以，$X\sim N(n,\frac{1}{n})$。

故所以，$E(X)=n\times\frac{1}{n}=1$。

第 4 章　正态分布

1，（1）设 $Z\sim N(0,1)$，求 $P\{Z\le 1.24\}$，$P\{1.24<Z\le 2.37\}$，$P\{-2.37<Z\le -1.24\}$；

（2）设 $Z\sim N(0,1)$，且 $P\{Z\le a\}=0.9147$，$P\{Z\ge b\}=0.0526$，求 a,b。

解：（1）$P\{Z\le 1.24\}=\Phi(1.24)=0.8925$，

$$P\{1.24<Z\le 2.37\}=P\{Z\le 2.37\}-P\{Z\le 1.24\}=\Phi(2.37)-\Phi(1.24)=0.9911-0.8925=0.0986$$

$$P\{-2.37<Z\le -1.24\}=\Phi(-1.24)-\Phi(-2.37)=[1-\Phi(1.24)]-[1-\Phi(2.37)]=0.0986$$

（2）$P\{Z\le a\}=0.9147=\Phi(1.37)$，所以 $a=1.37$；

$P\{Z \ge b\} = 0.0526 = 1 - P\{Z < b\}$，所以 $P\{Z < b\} = 0.9474 = \Phi(1.62)$，即 $b = 1.62$ 。

2，设 $X \sim N(3,16)$ ，求 $P\{4 < X \le 8\}$， $P\{0 \le X \le 5\}$ 。

解：因为 $X \sim N(3,16)$，所以 $\frac{X-3}{4} \sim N(0,1)$。

$$P\{4 < X \le 8\} = P\{\frac{4-3}{4} < \frac{X-3}{4} \le \frac{8-3}{4}\} = \Phi(1.25) - \Phi(0.25) = 0.8944 - 0.5987 = 0.2957$$

$$P\{0 \le X \le 5\} = \Phi(\frac{5-3}{4}) - \Phi(\frac{0-3}{4}) = 0.6915 - (1 - 0.7734) = 0.4649$$ 。

3，（1）设 $X \sim N(25,36)$ ，试确定 C，使得 $P\{|X-25| \le C\} = 0.9544$ 。

（2）设 $X \sim N(3,4)$，试确定 C，使得 $P\{X > C\} \ge 0.95$。

解:（1）因为 $P\{|X-25| \le C\} = P\{-C \le X - 25 \le C\} = \Phi(\frac{C}{6}) - \Phi(-\frac{C}{6}) = 2\Phi(\frac{C}{6}) - 1$

所以得到 $\Phi(\frac{C}{6}) = 0.9772$,即 $\frac{C}{6} = 2.0$， $C = 12.0$ 。

（2）因为 $\frac{X-3}{2} \sim N(0,1)$，所以 $P\{X > C\} = 1 - \Phi(\frac{C-3}{2}) \ge 0.95$ ，即

$\Phi(\frac{C-3}{2}) \le 0.05$,或者 $\Phi(\frac{3-C}{2}) \ge 0.95$ ，从而 $\frac{3-C}{2} \ge 1.645$ ， $C \le -0.29$ 。

4，已知美国新生儿的体重（以 g 计） $X \sim N(3315,575^2)$ 。

（1）求 $P\{2587.75 \le X \le 4390.25\}$；

（2）在新生儿中独立地选 25 个，以 Y 表示 25 个新生儿的体重小于 2719 的个数，求 $P\{Y \le 4\}$ 。

解：根据题意可得 $\frac{X-3315}{575} \sim N(0,1)$ 。

（1） $P\{2587.75 \le X \le 4390.25\} = \Phi(\frac{4390.25-3315}{575}) - \Phi(\frac{2587.75-3315}{575})$

$= \Phi(1.87) - \Phi(-1.2648) \approx 0.9693 - (1 - 0.8962) = 0.8655$（或 0.8673）

（2） $P\{X \le 2719\} = \Phi(\frac{2719-3315}{575}) = 1 - \Phi(1.04) = 0.1492$ ，

根据题意 $Y \sim B(25,0.1492)$，所以

$$P\{Y \le 4\} = \sum_{k=0}^{4} C_{25}^{k} \times 0.1492^{k} \times 0.8508^{25-k} \approx 0.6664\text{。}$$

5，设洗衣机的寿命（以年计）$X \sim N(6.4,2.3)$，一洗衣机已使用了 5 年，求其寿命至少为 8 年的条件概率。

解：所要求的概率为

$$P\{X \ge 8 \mid X \ge 5\} = \frac{P\{X \ge 8\}}{P\{X \ge 5\}} = \frac{1-\Phi(\frac{8-6.4}{\sqrt{2.3}})}{1-\Phi(\frac{5-6.4}{\sqrt{2.3}})} \approx \frac{1-\Phi(1.06)}{1-\Phi(-0.92)} = \frac{1-0.8554}{0.8212} = 0.1761$$

6，一电路要求装两只设计值为 12 欧的电阻器，而实际上装的电阻器的电阻值（以欧计）服从均值为 11.9 欧，标准差为 0.2 欧的正态分布。求（1）两只电阻器的电阻值都在 11.7 欧和 12.3 欧之间的概率；（2）至少有一只电阻器大于 12.4 欧的概率（设两电阻器的电阻值相互独立）

解：设两个电阻器的电阻值分别记为随机变量 $X,Y,$ 则 $X \sim N(11.9,0.04)$，$Y \sim N(11.9,0.04)$

（1）$P\{11.7 \le X \le 12.3, 11.7 \le Y \le 12.3\} = P\{11.7 \le X \le 12.3\}P\{11.7 \le Y \le 12.3\}$

$$= \left[\Phi(\frac{12.3-11.9}{0.2}) - \Phi(\frac{11.7-11.9}{0.2})\right]^2 = \left[\Phi(2)-\Phi(-1)\right]^2 = 0.8185^2 = 0.6699\text{；}$$

（2）至少有一只电阻器大于 12.4 欧的概率为

$$1-P\{X \le 12.4,\ Y \le 12.4\} = 1-P\{X \le 12.4\}P\{Y \le 12.4\} = 1-\left[\Phi(\frac{12.4-11.9}{0.2})\right]^2$$

$$= 1-0.9938^2 \approx 0.0124\text{。}$$

7，一工厂生产的某种元件的寿命 X（以小时计）服从均值 $\mu=160$，均方差为σ 的正态分布，若要求 $P\{120<X<200\}\geq 0.80$，允许 σ 最大为多少？

解：根据题意，$\dfrac{X-160}{\sigma}\sim N(0,1)$。所以有

$P\{120<X<200\}=\Phi(\dfrac{200-160}{\sigma})-\Phi(\dfrac{120-160}{\sigma})=2\Phi(\dfrac{40}{\sigma})-1\geq 0.80$，

即，$\Phi(\dfrac{40}{\sigma})\geq 0.9\approx\Phi(1.28)$，从而 $\dfrac{40}{\sigma}\geq 1.28,\quad \sigma\leq 31.25$。

故允许σ 最大不超过 31.25。

8，将一温度调节器放置在储存着某种液体的容器内，调节器整定在$d^{\circ}C$，液体的温度 X（以$^{\circ}C$计）是一个随机变量，且 $X\sim N(d,0.5^2)$，

（1）若 $d=90$，求 X 小于 89 的概率；

（2）若要求保持液体的温度至少为 80 的概率不低于 0.99，问 d 至少为多少？

解：因为 $X\sim N(d,0.5^2)$，所以 $\dfrac{X-d}{0.5}\sim N(0,1)$。

（1）$P\{X<89\}=\Phi(\dfrac{89-90}{0.5})=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=0.0228$；

（2）若要求 $P\{X\geq 80\}\geq 0.99$，那么就有 $P\{X\geq 80\}=1-\Phi(\dfrac{80-d}{0.5})\geq 0.99$，

即 $\Phi(\dfrac{80-d}{0.5})\leq 0.01$ 或者 $\Phi(\dfrac{d-80}{0.5})\geq 0.99=\Phi(2.326)$，从而 $\dfrac{d-80}{0.5}\geq 2.326$，

最后得到 $d\geq 81.163$，即 d 至少应为 81.163。

9，设 X,Y 相互独立，且 X 服从数学期望为 150，方差为 9 的正态分布，Y 服从数学期望为 100，方差为 16 的正态分布。

（1）求$W_1 = X+Y$，$W_2 = -2X+Y$，$W_3 = (X+Y)/2$的分布；

（2）求$P\{X+Y<242.6\}$，$P\{|(X+Y)/2-125|>5\}$。

解：根据题意$X \sim N(150,9),\quad Y \sim N(100,16)$。

（1）根据正态分布的线性组合仍为正态分布（本书 101 页定理 2）的性质，立刻得到

$$W_1 \sim N(250,25)，\quad W_2 \sim N(-200,52)，\quad W_3 \sim N(125,\frac{25}{4})$$

（2）因为 $W_1 \sim N(250,25)$，$W_3 \sim N(125,\frac{25}{4})$，所以

$$\frac{X+Y-250}{5} \sim N(0,1)，\quad \frac{(X+Y)/2-125}{5/2} \sim N(0,1)。$$

因此$P\{X+Y<242.6\} = \Phi(\frac{242.6-250}{5}) = 1-\Phi(1.48) = 0.0694$，

$$\begin{aligned}P\{|(X+Y)/2-125|>5\} &= 1-P\{-5 \le (X+Y)/2-125 \le 5\}\\ &= 1-\left[\Phi(\frac{5}{2.5})-\Phi(-\frac{5}{2.5})\right]\\ &= 2-2\Phi(2)\\ &= 0.0456\end{aligned}$$

10,(1)某工厂生产螺栓和垫圈。螺栓直径(以 mm 计) $X \sim N(10,0.2^2)$，垫圈直径（以 mm 计）$Y \sim N(10.5,0.2^2)$，X,Y相互独立。随机地取一只螺栓，一只垫圈，求螺栓能装入垫圈的概率。

（2）在（1）中若$X \sim N(10,0.2^2)$，$Y \sim N(10.5,\sigma^2)$，问控制σ至多为多少才能使螺栓能装入垫圈的概率不小于 0.90。

解:（1）根据题意可得$X-Y \sim N(-0.5,0.08)$。螺栓能装入垫圈的概率为$P\{X<Y\} = P\{X-Y<0\} = \Phi\left(\frac{0-(-0.5)}{\sqrt{0.08}}\right) \approx \Phi(1.77) = 0.9616$。

（2） $X-Y \sim N(-0.5,0.04+\sigma^2)$，所以若要控制

$$P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}=\Phi\left(\frac{0-(-0.5)}{\sqrt{0.04+\sigma^2}}\right)\ge 0.90=\Phi(1.282)\text{，}$$

即要求 $\frac{0.5}{\sqrt{0.04+\sigma^2}}\ge 1.282$，计算可得 $\sigma\le 0.3348$。表明 σ 至多为 0.3348 才能使螺栓能装入垫圈的概率不小于 0.90。

11,设某地区女子的身高（以 m 计）$W\sim N(1.63,0.025^2)$，男子身高（以 m 计）$M\sim N(1.73,0.05^2)$。设各人身高相互独立。（1）在这一地区随机选一名女子，一名男子，求女子比男子高的概率；（2）在这一地区随机选 5 名女子，求至少有 4 名的身高大于 1.60 的概率；（3）在这一地区随机选 50 名女子，求这 50 名女子的平均身高达于 1.60 的概率。

解：（1）因为 $M-W\sim N(0.1,\ \ 0.003125)$，所以

$$P\{W>M\}=P\{M-W<0\}=\Phi(\frac{0-0.1}{\sqrt{0.003125}})\approx\Phi(-1.79)=1-0.9633=0.0367\text{；}$$

（2）随机选择的女子身高达于 1.60 的概率为

$$P\{W>1.60\}=1-\Phi(\frac{1.60-1.63}{0.025})=\Phi(1.2)=0.8849\text{，}$$

随机选择的 5 名女子，身高大于 1.60 的人数服从二项分布 $B(5,0.8849)$，所以至少有 4 名的身高大于 1.60 的概率为

$$C_5^4\times 0.8849^4\times(1-0.8849)+C_5^5\times 0.8849^5=0.8955$$

（3）设这 50 名女子的身高分别记为随机变量 $W_1,\cdots W_{50}$，$\overline{W}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}W_i$。则 $\overline{W}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}W_i\sim N(1.63,\frac{0.025^2}{50})$，所以这 50 名女子的平均身高达于 1.60 的概率为

$$P\{\overline{W}>1.60\}=1-\Phi(\frac{1.60-1.63}{0.025/\sqrt{50}})=\Phi(8.49)\approx 1$$

12，（1）设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 $P\{X<16\}=0.20$，$P\{X<20\}=0.90$，求μ和σ；

（2）X,Y,Z相互独立且都服从标准正态分布，求$P\{3X+2Y<6Z-7\}$。

解：（1）由 $P\{X<16\}=\Phi(\frac{16-\mu}{\sigma})=0.20=\Phi(-0.84)$，得到$16-\mu=-0.84\sigma$；

$P\{X<20\}=\Phi(\frac{20-\mu}{\sigma})=0.90=\Phi(1.282)$，得到 $20-\mu=1.282\sigma$；

联立$16-\mu=-0.84\sigma$和$20-\mu=1.282\sigma$，计算得到$\mu=17.5834,\sigma=1.8850$。

（2）由 X,Y,Z 相互独立且都服从标准正态分布，得到 $3X+2Y-6Z\sim N(0,49)$。

故所以

$$P\{3X+2Y<6Z-7\}=P\{3X+2Y-6Z<-7\}=\Phi(\frac{-7-0}{7})=1-\Phi(1)=0.1587$$

13，一食品厂用纸质容器灌装饮料，容器的重量为30g，灌装时将容器放在台秤上，将饮料注入直到秤上刻度指到$m(g)$时结束。以$Z(g)$记容器中饮料的重量。设台秤的误差为$X\sim N(0,7.5^2)$，X以 g 计。（此处约定台秤显示值大于真值时误差为正）

（1）写出Z,X,m的关系式；

（2）求Z的分布；

（3）确定m使容器中所装饮料至少为450g 的概率不小于 0.95。

解：（1）根据题意Z,X,m有关系式$m=Z+30+X$或者$Z=m-30-X$；

（2）因为$X\sim N(0,7.5^2)$，所以$Z\sim N(m-30,7.5^2)$；

（3）要使得$P\{Z \ge 450\} \ge 0.95$，即要

$$P\{Z \ge 450\} = 1 - \Phi\left(\frac{450-(m-30)}{7.5}\right) \ge 0.95,$$

所以要求$\Phi\left(\frac{m-480}{7.5}\right) \ge 0.95 = \Phi(1.645)$，即$\frac{m-480}{7.5} \ge 1.645$，$m \ge 492.3375$。

所以，要使容器中所装饮料至少为450g的概率不小于0.95，m至少为492.4g。

14,在上题中若容器的重量$Y(g)$也是一个随机变量，$Y \sim N(30,9)$，设X,Y相互独立。

（1）求Z的分布；

（2）确定m使容器中所装饮料至少为450g的概率不小于0.90。

解：（1）此时$Z = m - Y - X$，根据$Y \sim N(30,9)$，$X \sim N(0,7.5^2)$，可得

$$Z \sim N(m-30, 65.25)。$$

（2）$P\{Z \ge 450\} = 1 - \Phi\left(\frac{450-(m-30)}{\sqrt{65.25}}\right) = \Phi\left(\frac{m-480}{\sqrt{65.25}}\right) \ge 0.90 = \Phi(1.282)$，

可得 $\frac{m-480}{\sqrt{65.25}} \ge 1.282$，即 $m \ge 490.36$。

15，某种电子元件的寿命X（以年计）服从数学期望为2的指数分布，各元件的寿命相互独立。随机取100只元件，求这100只元件的寿命之和大于180的概率。

解：设这100只元件的寿命分别记为随机变量$X_1,\cdots X_{100}$，$\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$。则$E(\overline{X}) = 2$，$D(\overline{X}) = 0.04$。根据独立同分布的中心极

限定理可得

$$P\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 180\} = P\{\overline{X} > 1.8\} = P\{\frac{\overline{X}-2}{0.2} > \frac{1.8-2}{0.2}\} \approx 1-\Phi(\frac{1.8-2}{0.2}) = \Phi(1) = 0.8413$$

16，以 $X_1,\cdots X_{100}$ 记 100 袋额定重量为 25（kg）的袋装肥料的真实的净重， $E(X_i)=25(kg), D(X_i)=1, i=1,2,\cdots 100.\ X_1,\cdots X_{100}$ 服从同一分布，且相互独立。$\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$，求 $P\{24.75\le \overline{X}\le 25.25\}$ 的近似值。

解：根据题意可得 $E(\overline{X})=25(kg),\quad D(\overline{X})=\frac{1}{100}$。由独立同分布的中心极限定理可得

$$P\{24.75\le \overline{X}\le 25.25\} = P\{\frac{24.75-25}{0.1}\le \frac{\overline{X}-25}{0.1}\le \frac{25.25-25}{0.1}\} \approx \Phi(2.5)-\Phi(-2.5)$$

$$=2\Phi(2.5)-1=0.9876$$

17，有 400 个数据相加，在相加之前，每个数据被舍入到最接近它的数，其末位为 10^{-7}。设舍入误差相互独立，且在区间 $(-0.5\times 10^{-7}, 0.5\times 10^{-7})$ 服从均匀分布。求误差总和的绝对值小于 0.5×10^{-6} 的概率。（例如 45.345678419 舍入到 45.3456784）

解：以 $X_1,\cdots X_{400}$ 记这 400 个数据的舍入误差，$\overline{X}=\frac{1}{400}\sum_{i=1}^{400}X_i$。则

$E(\overline{X})=0,\quad D(\overline{X})=\frac{10^{-14}}{4800}$。利用独立同分布的中心极限定理可得

$$P\{\left|\sum_{i=1}^{400}X_i\right| < 0.5\times 10^{-6}\} = P\{-0.125\times 10^{-8} < \overline{X} < 0.125\times 10^{-8}\}$$

$$=P\{\frac{-0.125\times10^{-8}}{\sqrt{\frac{10^{-14}}{4800}}}<\frac{\overline{X}}{\sqrt{\frac{10^{-14}}{4800}}}<\frac{0.125\times10^{-8}}{\sqrt{\frac{10^{-14}}{4800}}}\}$$

$$\approx\Phi(0.25\sqrt{12})-\Phi(-0.25\sqrt{12})$$

$$=2\Phi(0.866)-1=0.6156$$

18，据调查某一地区的居民有20%喜欢白颜色的电话机，（1）若在该地区安装 1000 部电话机，记需要安装白色电话机的部数为 X，求 $P\{170\le X\le185\}$， $P\{X\ge190\}$， $P\{X\le180\}$；（2）问至少需要安装多少部电话，才能使其中含有白色电话机的部数不少于 50 部的概率大于 0.95。

解：（1）根据题意， $X\sim B(1000,0.2)$，且 $E(X)=200,D(X)=160$ 。

由 De Moivre-Laplace 定理，计算得

$$P\{170\le X\le185\}\approx\Phi(\frac{185+0.5-200}{\sqrt{160}})-\Phi(\frac{170-0.5-200}{\sqrt{160}})$$

$$\approx\Phi(-1.15)-\Phi(-2.41)=(1-0.8749)-(1-0.9920)=0.1171；$$

$$P\{X\ge190\}\approx1-\Phi(\frac{190-0.5-200}{\sqrt{160}})=1-\Phi(-0.83)=0.7967；$$

$$P\{X\le180\}\approx\Phi(\frac{180+0.5-200}{\sqrt{160}})\approx\Phi(-1.54)=1-0.9382=0.0618 。$$

（2）设要安装 n 部电话。则要使得

$$P\{X\ge50\}\approx1-\Phi(\frac{50-0.5-0.2n}{\sqrt{0.16n}})=1-\Phi(\frac{49.5-0.2n}{\sqrt{0.16n}})>0.95$$

就要求 $\Phi(\frac{0.2n-49.5}{\sqrt{0.16n}})>0.95=\Phi(1.645)$， 即 $\frac{0.2n-49.5}{\sqrt{0.16n}}>1.645$， 从而

$0.04n^2-20.232964n+2450.25>0$，解出$n>304.95$或者$n<201$（舍去）。所以最少要安装 305 部电话。

19，一射手射击一次的得分X是一个随机变量，具有分布律

X	8	9	10
p_k	0.01	0.29	0.70

（1）求独立射击 10 次总得分小于等于 96 的概率。

（2）求在 900 次射击中得分为 8 分的射击次数大于等于 6 的概率。

解：根据题意，$E(X)=9.69$，$D(X)=94.13-9.69^2=0.2339$。

（1）以$X_1,\cdots X_{10}$分别记 10 次射击的得分，则

$$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i\le 96\}=P\{\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i-96.9}{\sqrt{2.339}}\le\frac{96-96.9}{\sqrt{2.339}}\}\approx\Phi(\frac{96-96.9}{\sqrt{2.339}})=\Phi(-0.59)=0.2776$$

（2）设在 900 次射击中得分为 8 分的射击次数为随机变量Y，则$Y\sim B(900,0.01)$。由 De Moivre-Laplace 定理，计算得

$$P\{Y\ge 6\}\approx 1-\Phi(\frac{6-0.5-900\times 0.01}{\sqrt{900\times 0.01\times 0.99}})\approx 1-\Phi(-1.17)=0.8790。$$

（第 4 章习题解答完毕）

第 5 章　样本及抽样分布

1,设总体 X 服从均值为 1/2 的指数分布，X_1,X_2,X_3,X_4是来自总体的容量为 4 的样本，求

（1）X_1,X_2,X_3,X_4的联合概率密度；（2）$P\{0.5<X_1<1,0.7<X_2<1.2\}$；

（3）$E(\overline{X}),D(\overline{X})$；（4）$E(X_1X_2)$，$E[X_1(X_2-0.5)^2]$；（5）$D(X_1X_2)$。

解：因为 X 的概率密度为$f(x)=2e^{-2x}$，$x>0$，所以

（1）联合概率密度为$g(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)$

$=16e^{-2(x_1+x_2+x_3+x_4)}$，（$X_1,X_2,X_3,X_4>0$）

（2）X_1,X_2的联合概率密度为$2e^{-2(x_1+x_2)}$，所以

$$P\{0.5<X_1<1,0.7<X_2<1.2\}=\int_{0.5}^{1}\int_{0.7}^{1.2}4e^{-2x_1-2x_2}dx_1dx_2=\int_{0.5}^{1}2e^{-2x_1}dx_1\int_{0.7}^{1.2}2e^{-2x_2}dx_2$$

$$=(e^{-1}-e^{-2})(e^{-1.4}-e^{-2.4})$$

（3）$E(\overline{X})=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}E(X_i)=\frac{1}{2},\quad D(\overline{X})=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{4}D(X_i)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$；

（4）$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)=\frac{1}{4}$，（由独立性）

$$E[X_1(X_2-0.5)^2]=E(X_1)E[(X_2-0.5)^2]=\frac{1}{2}E[X_2{}^2-X_2+\frac{1}{4}]=\frac{1}{2}[E(X_2{}^2)-E(X_2)+\frac{1}{4}]$$

$$=\frac{1}{2}[D(X_2)+E^2(X_2)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}]=\frac{1}{8}；$$

（5）$D(X_1X_2)=E[(X_1X_2)^2]-E^2(X_1X_2)=E(X_1{}^2)E(X_2{}^2)-\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$=[D(X_1)+E^2(X_1)][D(X_2)+E^2(X_2)]-\frac{1}{16}=(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}。$$

2，设总体$X\sim N(75,100)$，X_1,X_2,X_3是来自X的容量为 3 的样本，求

（1）$P\{\max(X_1,X_2,X_3)<85\}$，（2）$P\{(60<X_1<80)\cup(75<X_3<90)\}$， （3） $E(X_1^2X_2^2X_3^2)$，（4） $D(X_1X_2X_3)$， $D(2X_1-3X_2-X_3)$，

（5） $P\{X_1+X_2\le 148\}$。

解：（1） $P\{\max(X_1,X_2,X_3)<85\}=P\{X_1<85,X_2<85,X_3<85\}=$

$$P\{X_1<85\}P\{X_2<85\}P\{X_3<85\}=\left(P\{X_1<85\}\right)^3=\left(P\{\frac{X_1-75}{10}<\frac{85-75}{10}\}\right)^3$$

$$=[\Phi(1)]^3=0.8413^3=0.5955;$$

（2） $P\{(60<X_1<80)\cup(75<X_3<90)\}=P(60<X_1<80)+P(75<X_3<90)$

$$-P\{60<X_1<80\}P\{75<X_3<90\}=P\{\frac{60-75}{10}<\frac{X_1-75}{10}<\frac{80-75}{10}\}+P\{\frac{75-75}{10}<\frac{X_3-75}{10}<\frac{90-75}{10}\}$$

$$-P\{\frac{60-75}{10}<\frac{X_1-75}{10}<\frac{80-75}{10}\}P\{\frac{75-75}{10}<\frac{X_3-75}{10}<\frac{90-75}{10}\}$$

$$=[\Phi(0.5)-\Phi(-0.5)]+[\Phi(1.5)-\Phi(0)]-[\Phi(0.5)-\Phi(-0.5)][\Phi(1.5)-\Phi(0)]$$

$$=[2\Phi(0.5)-1]+[0.9332-0.5]-[2\Phi(0.5)-1][0.9332-0.5]=0.383+0.4332-0.383\times0.4332=0.6503$$

（本题与答案不符）

（3） $E(X_1^2X_2^2X_3^2)=E(X_1^2)E(X_2^2)E(X_3^2)=[D(X_1)+E^2(X_1)]^3=[100+75^2]^3$

$$=1.8764\times10^{11};$$

（4） $D(X_1X_2X_3)=E[(X_1X_2X_3)^2]-E^2(X_1X_2X_3)=1.8764\times10^{11}-E^6(X_1)$

$$=1.8764\times10^{11}-75^6=9.662\times10^9;$$

$$D(2X_1-3X_2-X_3)=4D(X_1)+9D(X_2)+D(X_3)=1400;$$

（5）因为 $X_1+X_2\sim N(150,200)$，所以

$$P\{X_1+X_2\le148\}=\Phi(\frac{148-150}{\sqrt{200}})=1-\Phi(\frac{\sqrt{2}}{10})=1-0.5557=0.4443。$$

3，设总体 $X\sim\pi(5)$， X_1,X_2,X_3是来自 X的容量为 3 的样本，求

（1） $P\{X_1=1,X_2=2,X_3=3\}$；（2） $P\{X_1+X_2=1\}$。

解：（1）因为 X_1,X_2,X_3 相互独立，所以

$$P\{X_1=1,X_2=2,X_3=3\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=3\}=5e^{-5}\times\frac{25e^{-5}}{2}\times\frac{125e^{-5}}{6}$$

$$=\frac{15625\mathrm{e}^{-15}}{12}=0.000398；$$

（2） $P\{X_1+X_2=1\}=p\{X_1=0,X_2=1\}+p\{X_1=1,X_2=0\}$

$$=e^{-5}\times5e^{-5}+5e^{-5}\times e^{-5}=10e^{-10}。$$

4，（1）设总体 $X\sim N(52,6.3^2)$， $X_1,X_2,\cdots,X_{36}$ 是来自 X 的容量为 36 的样本，求 $P\{50.8<\overline{X}<53.8\}$；

（2）设总体 $X\sim N(12,4)$， $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是来自 X 的容量为 5 的样本，求样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率。

解：（1）根据题意得 $\overline{X}\sim N(52,6.3^2/36)$，所以

$$P\{50.8<\overline{X}<53.8\}=P\{\frac{50.8-52}{6.3/6}<\frac{\overline{X}-52}{6.3/6}<\frac{53.8-52}{6.3/6}\}=\Phi(\frac{53.8-52}{6.3/6})-\Phi(\frac{50.8-52}{6.3/6})$$

$$=\Phi(1.7143)-\Phi(-1.143)\approx0.9564-(1-0.8729)=0.8293;$$

（2）因为 $\overline{X}\sim N(12,4/5)$， $P\{|\overline{X}-12|\le1\}=P\{11\le\overline{X}\le13\}$

$$=P\{\frac{11-12}{\sqrt{0.8}}\le\frac{\overline{X}-14}{\sqrt{0.4}}\le\frac{13-12}{\sqrt{0.8}}\}=\Phi(1.118)-\Phi(-1.118)=0.8686-(1-0.8686)=0.7372$$

所以 $P\{|\overline{X}-12|>1\}=1-P\{|\overline{X}-12|\le1\}=1-0.7372=0.2628$。

5，求总体 $N(20,3)$ 的容量分别为 10 和 15 的两独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率。

解: 设容量分别为 10 和 15 的两独立样本的样本均值分别记为$\overline{X}$和$\overline{Y}$，

则$\overline{X} \sim N(20,0.3)$， $\overline{Y} \sim N(20,0.2)$，所以$\overline{X}-\overline{Y} \sim N(0,0.5)$，

$$P\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right| > 0.3\} = 1 - P\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right| \le 0.3\} = 1 - P\{-0.3 \le \overline{X}-\overline{Y} \le 0.3\} = 1 - [\Phi(\frac{0.3}{\sqrt{0.5}}) - \Phi(-\frac{0.3}{\sqrt{0.5}})]$$

$$= 2 - 2\times\Phi(0.42) = 0.6744。$$

6，下面给出了 50 个学生概率论课程的一次考试成绩，试求样本均值和样本方差，样本标准差，并作出频率直方图（将区间（35.5，105.5）分为 7 等份）。

解： 易得$\bar{x} = \sum_{i=1}^{50} x_i = 74.92$， $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{50}(x_i - \bar{x})^2 = 201.5037$， $s = 14.1952$，

处理数据得到以下表格

组　限	频数 f_i	频率 f_i/n
35.5~45.5	2	0.04
45.5~55.5	3	0.06
55.5~65.5	6	0.12
65.5~75.5	14	0.28
75.5~85.5	11	0.22
85.5~95.5	12	0.24
95.5~105.5	2	0.04

根据以上数据，画出直方图（略）

7，设总体$X \sim N(76.4, 383)$， $X_1, X_2, \cdots, X_4$是来自X的容量为 4 的样本，

s^2是样本方差。（1）问$U=\sum_{i=1}^{4}\frac{(X_i-76.4)^2}{383}$，$W=\sum_{i=1}^{4}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{383}$分别服从什么分布，并求$D(s^2)$。（2）求$P\{0.711<U\le 7.779\}$，$P\{0.352<W\le 6.251\}$

解：（1）因为$\frac{X-76.4}{\sqrt{383}}\sim N(0,1)$，

所以，$U=\sum_{i=1}^{4}\frac{(X_i-76.4)^2}{383}=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{X_i-76.4}{\sqrt{383}}\right)^2\sim\chi^2(4)$

而根据定理 2 ，$W=\sum_{i=1}^{4}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{383}=\frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i-\overline{X})^2}{383}=\frac{3s^2}{383}\sim\chi^2(3)$

因为$D(W)=D(\frac{3s^2}{383})=6$，所以$D(s^2)=6\times 383^2/9=293378/3$。

（2）$P\{0.711<U\le 7.779\}=P\{U\le 7.779\}-P\{U\le 0.711\}=(1-0.1)-(1-0.95)$

=0.85（第二步查表）

$P\{0.352<W\le 6.251\}=P\{W\le 6.251\}-P\{W\le 0.352\}=(1-0.1)-(1-0.95)=0.85$

8，已知$X\sim t(n)$，求证$X^2\sim F(1,n)$。

证明：因为$X\sim t(n)$，所以存在随机变量$Y\sim N(0,1),Z\sim\chi^2(n)$

使得 $X=\frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$， 也即 $X^2=\frac{Y^2}{Z/n}$，

而根据定义$Y^2\sim\chi^2(1)$,所以$X^2=\frac{Y^2/1}{Z/n}\sim F(1,n)$，证毕。

（第 5 章习题解答完毕）

第 6 章　参数估计

1，设总体 $X \sim U(0,b), B>0$ 未知， $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自 X 的样本。求 b 的矩估计量。今测得一个样本值 0.5，0.6，0.1，1.3，0.9，1.6，0.7，0.9，1.0，求 b 的矩估计值。

解：因为总体 $X \sim U(0,b)$，所以总体矩 $E(X)=b/2$。根据容量为 9 的样本得到的样本矩 $\bar{X}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i$。令总体矩等于相应的样本矩：$E(X)=\bar{X}$，得到 b 的矩估计量为 $\hat{b}=2\bar{X}$。

把样本值代入得到 b 的矩估计值为 $\hat{b}=1.69$。

2，设总体 X 具有概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x) & 0<x<\theta \\ 0 & \text{其　他}\end{cases}$，参数 θ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求 θ 的矩估计量。

解：总体 X 的数学期望为 $E(X)=\int_0^{\theta}\frac{2x}{\theta^2}(\theta-x)dx=\frac{\theta}{3}$，令 $E(X)=\bar{X}$ 可得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=3\bar{X}$。

3，设总体 $X \sim B(m,p)$，参数 $m,p(0<p<1)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，求 m,p 的矩估计量（对于具体样本值，若求得的 $\hat{m}$ 不是整数，则取与 $\hat{m}$ 最接近的整数作为 m 的估计值）。

解：总体 X 的数学期望为　$E(X)=mp$，　$D(X)=mp(1-p)$，

二阶原点矩为 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=mp(mp-p+1)$。

令总体矩等于相应的样本矩：

$$E(X)=\overline{X}，\quad E(X^2)=A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

得到$\hat{p}=1+\overline{X}-\dfrac{A_2}{\overline{X}}$，$\hat{m}=\dfrac{\left(\overline{X}\right)^2}{\overline{X}+\left(\overline{X}\right)^2-A_2}$。

4，（1）设总体$X\sim\pi(\lambda),\lambda>0$未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自$X$的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应的样本值。求$\lambda$的矩估计量，求$\lambda$的最大似然估计值。

（2）元素碳-14在半分钟内放射出到达计数器的粒子数$X\sim\pi(\lambda)$，下面是X的一个样本：

6	4	9	6	10	11	6	3	7	10

求λ的最大似然估计值。

解：（1）因为总体的数学期望为λ，所以矩估计量为$\hat{\lambda}=\overline{X}$。

似然函数为 $L(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{(x_i)!}=\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}e^{-n\lambda}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i)!}$，相应的对数似然函数为

$$\ln L(\lambda)=(\ln\lambda)\sum_{i=1}^{n}x_i-n\lambda-\ln\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i)!\right]。$$

令对数似然函数对λ的一阶导数为零，得到λ的最大似然估计值为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}。$$

（2）根据（1）中结论，λ的最大似然估计值为$\hat{\lambda}=\bar{x}=7.2$。

5，（1）设X服从参数为$p(0<p<1)$的几何分布，其分布律为$P\{X=x\}=(1-p)^{x-1}p,x=1,2,\cdots$。参数$p$未知。设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一个样本值，

求 p 的最大似然估计值。

（2）一个运动员，投篮的命中率为 $p(0<p<1,\text{未知})$，以 X 表示他投篮直至投中为止所需的次数。他共投篮 5 次得到 X 的观察值为

5　1　7　4　9

求 p 的最大似然估计值。

解：（1）似然函数为 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}\left[(1-p)^{x_i-1}p\right]=(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}p^n$，相应的对数似然函数为

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\ln(1-p)+n\ln p\text{。}$$

令对数似然函数对 p 的一阶导数为零，得到 p 的最大似然估计值为

$$\hat{p}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}\text{。}$$

（2）根据（1）中结论，p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{5}{26}$。

6,（1）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，参数 σ^2 已知，$\mu(-\infty<\mu<\infty)$ 未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自 X 一个样本值。求 μ 的最大似然估计值。

（2）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，参数 μ 已知，σ^2（$\sigma^2>0$）未知，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一相应的样本值。求 σ^2 的最大似然估计值。

解：（1）似然函数为 $L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，相应的对数似然函数为

$$\ln L(\mu)=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n。$$

令对数似然函数对μ的一阶导数为零，得到μ的最大似然估计值为

$$\hat{\mu}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}。$$

（2）似然函数为 $L(\sigma^2)=\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]=\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，相应的对数似然函数为

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)。$$

令对数似然函数对σ^2的一阶导数为零，得到σ^2的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2。$$

7，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体X的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为一相应的样本值。

（1）总体X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-x/\theta} & x>0\\ 0 & 其\quad 他\end{cases}$，$0<\theta<\infty$，

求参数θ的最大似然估计量和估计值。

（2）总体X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2\theta^3}e^{-x/\theta} & x>0\\ 0 & 其\quad 他\end{cases}$，$0<\theta<\infty$，

求参数θ的最大似然估计值。

（3）设$X\sim B(m,p)$, m已知，$0<p<1$未知，求p的最大似然估计值。

解：（1）似然函数为 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i}{\theta^2}e^{-x_i/\theta}\right]=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta^{2n}}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i/\theta}$，相应的对数似

然函数为

$$\ln L(\theta)=\sum_{i-1}^{n}\ln x_i-2n\ln\theta-\sum_{i=1}^{n}x_i/\theta\text{。}$$

令对数似然函数对θ的一阶导数为零，得到θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{\bar{x}}{2}\text{。}$$

相应的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{2}$。

（2）似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\dfrac{x_i^{\ 2}}{2\theta^3}e^{-x_i/\theta}\right]=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}}{2\theta^{3n}}e^{-\sum_{i=1}^{n}x_i/\theta}$，相应的对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=\sum_{i-1}^{n}2\ln x_i-3n\ln(2\theta)-\sum_{i=1}^{n}x_i/\theta\text{。}$$

令对数似然函数对θ的一阶导数为零，得到θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{\bar{x}}{3}\text{。}$$

（3）因为$X\sim B(m,p)$,其分布律为$P\{X=x\}=C_m^x p^x(1-p)^{m-x},\quad x=0,1,2,\cdots m$

所以，似然函数为 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}\left[C_m^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}\right]=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}\times p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\times(1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}$，

相应的对数似然函数为

$$L(p)=(\ln p)\sum_{i=1}^{n}x_i+\left(mn-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)+\sum_{i=1}^{n}\ln C_m^{x_i}\text{。}$$

令对数似然函数对p的一阶导数为零，得到p的最大似然估计值为

$$\hat{p}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{\bar{x}}{m}\text{。}$$

8，设总体X具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中参数$\theta(0<\theta<1)$未知。已知取得样本值$x_1=1, x_2=2, x_3=1$，试求θ的最大似然估计值。

解：根据题意，可写出似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P\{X=x_i\}=\theta^2\times 2\theta(1-\theta)\times\theta^2=2\theta^5(1-\theta)，$$

相应的对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)。$$

令对数似然函数对θ的一阶导数为零，得到θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=5/6。$$

9，设总体$X\sim N(\alpha+\beta,\sigma^2)$，$Y\sim N(\alpha-\beta,\sigma^2)$，$\alpha,\beta$未知，$\sigma^2$已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$分别是总体$X$和$Y$的样本，设两样本独立。试求$\alpha,\beta$最大似然估计量。

解：根据题意，写出对应于总体X和Y的似然函数分别为

$$L(\alpha+\beta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(X_i-\alpha-\beta)^2}{2\sigma^2}}\right]=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha-\beta)^2}{2\sigma^2}}，$$

$$L(\alpha-\beta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(Y_i-\alpha+\beta)^2}{2\sigma^2}}\right]=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\alpha+\beta)^2}{2\sigma^2}}，$$

相应的对数似然函数为

$$\ln L(\alpha+\beta)=-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha-\beta)^2}{2\sigma^2}-\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n,$$

$$\ln L(\alpha-\beta)=-\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\alpha+\beta)^2}{2\sigma^2}-\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n,$$

令对数似然函数分别对$\alpha+\beta$和$\alpha-\beta$的一阶导数为零，得到

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\overline{X}\\ \alpha-\beta=\overline{Y}\end{cases},$$

算出α,β最大似然估计量分别为$\hat{\alpha}=\dfrac{\overline{X}+\overline{Y}}{2}$，$\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{2}$。

10，（1）验证均匀分布$U(0,\theta)$中的未知参数θ的矩估计量是无偏估计量。

（2）设某种小型计算机一星期中的故障次数$Y\sim\pi(\lambda)$，设$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$是来自总体Y的样本。①验证$\overline{Y}$是λ的无偏估计量。②设一星期中故障维修费用为$Z=3Y+Y^2$，求$E(Z)$。

（3）验证$U=3\overline{Y}+\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$是$E(Z)$的无偏估计量。

解：（1）均匀分布$U(0,\theta)$中的未知参数θ的矩估计量为

$$\hat{\theta}=2\overline{X}。$$

由于$E(\hat{\theta})=2E(\overline{X})=2\times\dfrac{\theta}{2}=\theta$，所以$\hat{\theta}=2\overline{X}$是$\theta$的无偏估计量。

（2）①因为$E(\overline{Y})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)=\dfrac{1}{n}\times n\lambda=\lambda$，所以$\overline{Y}$是$\lambda$的无偏估计量。

② $E(Z)=3E(Y)+E(Y^2)=3\lambda+(\lambda+\lambda^2)=4\lambda+\lambda^2$。

（3）因为$E(U)=3E(\overline{Y})+\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^2)=3\lambda+\dfrac{1}{n}\times n(\lambda+\lambda^2)=4\lambda+\lambda^2=E(Z)$，

所以，U是$E(Z)$的无偏估计量。

11，已知X_1,X_2,X_3,X_4是来自均值为θ的指数分布总体的样本，其中θ未知。设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)\text{，}$$

$$T_2=(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)/5\text{，}$$

$$T_3=(X_1+X_2+X_3+X_4)/4\text{。}$$

（1）指出T_1,T_2,T_3中哪几个是θ的无偏估计量。

（2）在上述θ的无偏估计量中哪一个较为有效?

解:（1）因为

$$E(T_1)=\frac{1}{6}(E(X_1)+E(X_2))+\frac{1}{3}(E(X_3)+E(X_4))=\frac{1}{6}(\theta+\theta)+\frac{1}{3}(\theta+\theta)=\theta$$

$$E(T_2)=(E(X_1)+2E(X_2)+3E(X_3)+4E(X_4))/5=2\theta\text{，}$$

$$E(T_3)=(E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4))/4=\theta\text{。}$$

所以，T_1,T_3是θ的无偏估计量。

（2）根据简单随机样本的独立同分布性质，可以计算出

$$D(T_1)=\frac{1}{36}(D(X_1)+D(X_2))+\frac{1}{9}(D(X_3)+D(X_4))=\frac{1}{36}(\theta^2+\theta^2)+\frac{1}{9}(\theta^2+\theta^2)=5\theta^2/18$$

$$D(T_3)=(D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4))/16=\theta^2/4<D(T_1)\text{，}$$

所以，T_3是比T_1更有效的无偏估计量。

12，以 X 表示某一工厂制造的某种器件的寿命（以小时计），设$X\sim N(\mu,1296)$，今取得一容量为$n=27$的样本，测得其样本均值为$\bar{x}=1478$，求（1）μ的置信水平为 0.95 的置信区间，（2）μ的置信水平为 0.90 的置信区间。

解: 这是一个方差已知的正态总体均值的区间估计问题。根据标准的

结论，μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{x}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$。

（1）μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(1478\pm\frac{\sqrt{1296}}{\sqrt{27}}Z_{0.025}\right)=\left(1478\pm\sqrt{48}\times1.96\right)=\left(1478\pm13.58\right)=\left(1464.42,1491.58\right)。$$

（2）μ 的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$\left(1478\pm\frac{\sqrt{1296}}{\sqrt{27}}Z_{0.05}\right)=\left(1478\pm\sqrt{48}\times1.645\right)=\left(1478\pm11.40\right)=\left(1466.60,1489.40\right)。$$

13，以 X 表示某种小包装糖果的重量（以 g 计），设 $X\sim N(\mu,4)$，今取得样本（容量为 $n=10$）：

55.95, 56.54, 57.58, 55.13, 57.48, 56.06, 59.93, 58.30, 52.57, 58.46

（1）求 μ 的最大似然估计值。

（2）求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：（1）根据已知结论，正态分布均值 μ 的最大似然估计量和矩估计量相同：$\hat{\mu}=\bar{X}$。所以 μ 的最大似然估计值为 $\hat{\mu}=\bar{x}=56.8$。

（2）μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(56.8\pm\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}}Z_{0.025}\right)=\left(56.8\pm\sqrt{0.4}\times1.96\right)=\left(56.8\pm1.24\right)=\left(55.56,58.04\right)。$$

14，一农场种植生产果冻的葡萄，以下数据是从 30 车葡萄中采样测得的糖含量（以某种单位计）

16.0, 15.2, 12.0, 16.9, 14.4, 16.3, 15.6, 12.9, 15.3, 15.1

15.8, 15.5, 12.5, 14.5, 14.9, 15.1, 16.0, 12.5, 14.3, 15.4

15.4, 13.0, 12.6, 14.9, 15.1, 15.3, 12.4, 17.2, 14.7, 14.8

设样本来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2均未知。

（1）求μ,σ^2的无偏估计值。

（2）求μ的置信水平为90%的置信区间。

解：（1） μ,σ^2的无偏估计值为

$$\hat{\mu}=\bar{x}=14.72\text{，}\quad s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=1.9072\text{。}$$

（2） μ的置信水平为90%的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)\right)=\left(14.72\pm\frac{1.38075}{\sqrt{30}}\times1.6991\right)=\left(14.72\pm0.428\right)=\left(14.292,\quad 15.148\right)$$

15，一油漆商希望知道某种新的内墙油漆的干燥时间。在面积相同的12块内墙上做试验，记录干燥时间（以分计），得样本均值$\bar{x}=66.3$分，样本标准差$s=9.4$分。设样本来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2均未知。求干燥时间的数学期望的置信水平为0.95的置信区间。

解：这是一个方差未知的正态总体均值的区间估计问题。根据已知结论，干燥时间的数学期望的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)=\left(66.3\pm\frac{9.4}{\sqrt{12}}\times2.2010\right)=\left(66.3\pm5.97\right)=\left(60.33,\quad 72.27\right)\text{。}$$

16，Macatawa湖（位于密歇根湖的东侧）分为东、西两个区域。下面的数据是取自西区的水的样本，测得其中的钠含量（以ppm计）如下：13.0, 18.5, 16.4, 14.8, 19.4, 17.3, 23.2, 24.9,

20.8, 19.3, 18.8, 23.1, 15.2, 19.9, 19.1, 18.1, 25.1, 16.8, 20.4, 17.4, 25.2, 23.1, 15.3, 19.4,

16.0, 21.7, 15.2, 21.3, 21.5, 16.8, 15.6, 17.6

设样本来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2均未知。求μ的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：根据题中数据，计算可得样本均值$\bar{x}=19.07$，样本方差$s=3.245$。

μ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)=\left(19.07\pm\frac{3.245}{\sqrt{32}}\times2.0395\right)=(19.07\pm1.17)=(17.90,\quad 20.24)$$

17，设 X 是春天捕到的某种鱼的长度（以 cm 计），设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知。下面是 X 的一个容量为$n=13$的样本：

13.1, 5.1, 18.0, 8.7, 16.5, 9.8, 6.8, 12.0, 17.8, 25.4, 19.2, 15.8, 23.0

（1）求σ^2的无偏估计；

（2）求σ的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：根据题中数据计算可得$s^2=37.75$。

（1）方差σ^2的无偏估计即为样本方差$s^2=37.75$。

（2）σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\quad\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)=\left(\frac{12\times37.75}{23.337},\quad\frac{12\times37.75}{4.404}\right)=(19.41,\quad 102.86),$$

所以σ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}},\quad\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}}\right)=(\sqrt{19.41},\quad\sqrt{102.86})=(4.406,\quad 10.142)。$$

18，为比较两个学校同一年级学生数学课程的成绩，随机地抽取学校 A 的 9 个学生，得分数的平均值为 $\bar{x}_A = 81.31$，方差为 $s_A^2 = 60.76$；随机地抽取学校 B 的 15 个学生，得分数的平均值为 $\bar{x}_B = 78.61$，方差为 $s_B^2 = 48.24$。设样本均来自正态总体且方差相等，参数均未知，两样本独立。求均值差 $\mu_A - \mu_B$ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：根据两个正态总体均值差的区间估计的标准结论，均值差 $\mu_A - \mu_B$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left((\bar{x}_A - \bar{x}_B) \pm s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{0.025}(n_1 + n_2 - 2)\right) = \left(2.7 \pm s_w \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{15}} t_{0.025}(22)\right)$$

$$= \left(2.7 \pm s_w \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{15}} t_{0.025}(22)\right) = \left(2.7 \pm 7.266 \times \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{15}} \times 2.0739\right)$$

$$= (2.7 \pm 6.35) = (-3.65,\quad 9.05)$$

19，设以 X,Y 分别表示有过滤嘴和无过滤嘴的香烟含煤焦油的量（以 mg 计），设 $X \sim N(\mu_X, \sigma^2{}_X)$，$Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2{}_Y)$，$\mu_X, \mu_Y, \sigma^2{}_X, \sigma_Y{}^2$ 均未知。下面是两个样本

X: 0.9, 1.1, 0.1, 0.7, 0.3, 0.9, 0.8, 1.0, 0.4

Y: 1.5, 0.9, 1.6, 0.5, 1.4, 1.9, 1.0, 1.2, 1.3, 1.6, 2.1

两样本独立。求 $\sigma^2{}_X / \sigma^2{}_Y$ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：根据题中数据计算可得 $s^2{}_X =$， $s^2{}_Y =$。（未完）根据两个正态总体方差比的区间估计的标准结论，$\sigma^2{}_X / \sigma^2{}_Y$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{s_X^2}{s_Y^2} \times \frac{1}{F_{0.025}(8,10)}, \frac{s_X^2}{s_Y^2} \times \frac{1}{F_{0.975}(8,10)}\right) = \left(\frac{s_X^2}{s_Y^2} \times \frac{1}{3.85}, \frac{s_X^2}{s_Y^2} \times 4.30\right) = (0.148,\quad 2.446)。$$

20，设以 X,Y 分别表示健康人与怀疑有病的人的血液中铬的含量（以 10 亿份中的份数计），设 $X\sim N(\mu_X,\sigma^2{}_X)$，$Y\sim N(\mu_Y,\sigma^2{}_Y)$，$\mu_X,\mu_Y,\sigma^2{}_X,\sigma_Y{}^2$ 均未知。下面是分别来自 X 和 Y 的两个独立样本：

X:　15, 23, 12, 18, 9, 28, 11, 10

Y:　25, 20, 35, 15, 40, 16, 10, 22, 18, 32

求$\sigma^2{}_X/\sigma^2{}_Y$的置信水平为 0.95 的单侧置信上限，以及$\sigma_X$的置信水平为 0.95 的单侧置信上限。

解：根据题中数据计算得到$s_X^2=6.8^2=46.24$，$s_Y^2=9.627^2=92.68$。

$\sigma^2{}_X/\sigma^2{}_Y$的置信水平为 0.95 的单侧置信上限为

$$\overline{\left(\frac{\sigma^2{}_X}{\sigma^2{}_Y}\right)}=\frac{s_X^2}{s_Y^2}\times\frac{1}{F_{0.95}(7,9)}=\frac{46.24}{92.68}\times 3.68=1.836。$$

$\sigma^2{}_X$的置信水平为 0.95 的单侧置信上限为

$$\overline{\sigma_X^2}=\frac{(8-1)s_X{}^2}{\chi^2_{0.95}(8-1)}=\frac{7\times 46.24}{2.167}=149.37，$$

所以，σ_X的置信水平为 0.95 的单侧置信上限为

$$\overline{\sigma_X}=\sqrt{\frac{(8-1)s_X{}^2}{\chi^2_{0.95}(8-1)}}=\sqrt{149.37}=12.22。$$

21，在第 17 题中求鱼长度的均值μ的置信水平为 0.95 的单侧置信下限。

解：根据单侧区间估计的结论，正态总体均值μ的置信水平为 0.95 的单侧置信下限为

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)=14.71-\frac{6.144}{\sqrt{13}}\times 1.7823=11.67。$$

22，在第 18 题中求$\mu_A-\mu_B$的置信水平为 0.90 的单侧置信上限。

解：两个正态总体的均值差$\mu_A-\mu_B$的置信水平为 0.90 的单侧置信上限为

$$\overline{\mu_A-\mu_B}=\left(\bar{x}_A-\bar{x}_B\right)+s_w\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{15}}t_{0.1}(22)=2.7+7.266\times 0.422\times 1.3212=6.75。$$

（第 6 章习题解答完毕）

第 7 章　假设检验

1，一车床工人需要加工各种规格的工件，已知加工一工件所需的时间服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，均值为 18 分，标准差为 4.62 分。现希望测定，是否由于对工作的厌烦影响了他的工作效率。今测得以下数据：

21.01, 19.32, 18.76, 22.42, 20.49, 25.89, 20.11, 18.97, 20.90

试依据这些数据（取显著性水平$\alpha=0.05$），检验假设：

$$H_0:\mu\le 18,\quad H_1:\mu>18。$$

解：这是一个方差已知的正态总体的均值检验，属于右边检验问题，检验统计量为

$$Z=\frac{\bar{x}-18}{\sigma/\sqrt{n}}。$$

代入本题具体数据，得到$Z=\dfrac{20.874-18}{4.62/\sqrt{9}}=1.8665$。

检验的临界值为$Z_{0.05}=1.645$。

因为$Z=1.8665>1.645$，所以样本值落入拒绝域中，故拒绝原假设

H_0，即认为该工人加工一工件所需时间显著地大于 18 分钟。

2，《美国公共健康》杂志（1994 年 3 月）描述涉及 20143 个个体的一项大规模研究。文章说从脂肪中摄取热量的平均百分比是 38.4%（范围是 6%到 71.6%），在某一大学医院进行一项研究以判定在该医院中病人的平均摄取量是否不同于 38.4%，抽取了 15 个病人测得平均摄取量为 40.5%，样本标准差为 7.5%。设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知。试取显著性水平 $\alpha=0.05$ 检验假设：$H_0:\mu=38.4,\quad H_1:\mu\neq 38.4$。

解：这是一个方差未知的正态总体的均值检验，属于双边检验问题，检验统计量为

$$t=\frac{\bar{x}-38.4}{s/\sqrt{n}}。$$

代入本题具体数据，得到 $t=\dfrac{40.5-38.4}{7.5/\sqrt{15}}=1.0844$。

检验的临界值为 $t_{0.025}(14)=2.1448$。

因为 $|t|=1.0844<2.1448$，所以样本值没有落入拒绝域中，故接受原假设 H_0，即认为平均摄取量显著地为 38.4%。

3，自某种铜溶液测得 9 个铜含量的百分比的观察值为 8.3，标准差为 0.025。设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知。试依据这一样本取显著性水平 $\alpha=0.01$ 检验假设：$H_0:\mu\geq 8.42,\quad H_1:\mu<8.42$。

解：这是一个方差未知的正态总体的均值检验，属于左边检验问题，

检验统计量为

$$t=\frac{\overline{x}-8.42}{s/\sqrt{n}}\text{。}$$

代入本题具体数据，得到$t=\dfrac{8.3-8.42}{0.025/\sqrt{9}}=-14.4$。

检验的临界值为$-t_{0.01}(8)=-2.8965$。

因为$t=-14.4<-2.8965$（或者说$|t|=14.4>2.8965$），所以样本值落入拒绝域中，故拒绝原假设H_0，即认为铜含量显著地小于 8.42%。

4，测得某地区 16 个成年男子的体重（以公斤计）为

77.18, 80.81, 65.83, 66.28, 71.28, 79.45, 78.54, 62.20

69.01, 77.63, 74.00, 77.18, 61.29, 72.19, 90.35, 59.47

设样本来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知，试取$\alpha=0.05$检验假设:

$H_0:\mu=72.64,\quad H_1:\mu\neq72.64$。

解：这是一个方差未知的正态总体的均值检验，属于双边检验问题，检验统计量为

$$t=\frac{\overline{x}-72.64}{s/\sqrt{n}}\text{。}$$

代入本题具体数据，得到$t=\dfrac{72.668-72.64}{8.338/\sqrt{16}}=0.0134$。

检验的临界值为$t_{0.025}(15)=2.1315$。

因为$|t|=0.0134<2.1315$，所以样本值没有落入拒绝域中，故接受原假设H_0，即认为该地区成年男子的平均体重为 72.64 公斤。

5，一工厂的经理主张一新来的雇员在参加某项工作之前至少需要培

训 200 小时才能成为独立工作者，为了检验这一主张的合理性，随机选取 10 个雇员询问他们独立工作之前所经历的培训时间（小时）记录如下

208， 180，232，168，212，208，254，229，230，181

设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2 均未知。试取 $\alpha=0.05$ 检验假设：$H_0:\mu\le 200,\quad H_1:\mu>200$。

解：这是一个方差未知的正态总体的均值检验，属于右边检验问题，检验统计量为

$$t=\frac{\bar{x}-200}{s/\sqrt{n}}。$$

代入本题具体数据，得到 $t=\dfrac{210.2-200}{27.28/\sqrt{10}}=1.1824$。

检验的临界值为 $t_{0.05}(9)=1.8331$。

因为 $t=1.1824<1.8331$，所以样本值没有落入拒绝域中，故接受原假设 H_0，即认为培训时间不超过 200 小时。

6，一制造商声称他的工厂生产的某种牌号的电池的寿命的方差为 5000（小时 ^{2}），为了检验这一主张，随机地取 26 只电池测得样本方差为 7200 小时 ^{2}，有理由认为样本来自正态总体。现需取 $\alpha=0.02$ 检验假设 $H_0:\sigma^2=5000,\quad H_1:\sigma^2\ne 5000$。

解：这是一个正态总体的方差检验问题，属于双边检验。

检验统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{5000}。$$

代入本题中的具体数据得到$\chi^2=\dfrac{(26-1)\times 7200}{5000}=36$。

检验的临界值为$\chi^2_{0.01}(25)=44.313$。

因为$\chi^2=36<44.313$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设H_0，即认为电池寿命的方差为5000小时^2。

7，某种标准类型电池的容量（以安-时计）的标准差$\sigma=1.66$，随机地取10只新类型的电池测得它们的容量如下

146，141，135，142，140，143，138，137，142，136

设样本来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知，问标准差是否有变动，即需检验假设（取$\alpha=0.05$）：$H_0:\sigma^2=1.66^2$，$H_1:\sigma^2\neq 1.66^2$。

解：这是一个正态总体的方差检验问题，属于双边检验问题。

检验统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{1.66^2}。$$

代入本题中的具体数据得到$\chi^2=\dfrac{(10-1)\times 12}{1.66^2}=39.193$。

检验的临界值为$\chi^2_{0.025}(9)=19.022$。

因为$\chi^2=39.193>19.022$，所以样本值落入拒绝域，因此拒绝原假设H_0，即认为电池容量的标准差发生了显著的变化，不再为1.66。

8，设X是一头母牛生了小牛之后的305天产奶期内产出的白脱油磅数。又设X~$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知。今测得以下数据：

425，710，661，664，732，714，934，761，744，

653，725，657，421，573，535，602，537，405，

874，791，721，849，567，468，975

试取显著性水平$\alpha = 0.05$检验假设$H_0: \sigma \le 140,\quad H_1: \sigma > 140$。

解：题中所要求检验的假设实际上等价于要求检验假设

$$H_0: \sigma^2 \le 140^2,\quad H_1: \sigma^2 > 140^2$$

这是一个正态总体的方差检验问题，属于右边检验。

检验统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{140^2}。$$

代入本题中的具体数据得到$\chi^2 = \dfrac{(25-1)\times 23827.49}{140^2} = 29.177$。

检验的临界值为$\chi^2_{0.05}(24) = 36.415$。

因为$\chi^2 = 29.177 < 36.415$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设H_0，即认为标准差不大于 140。

9，由某种铁的比热的 9 个观察值得到样本标准差$s = 0.0086$。设样本来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知。试检验假设（$\alpha = 0.05$）$H_0: \sigma \ge 0.0100,\quad H_1: \sigma < 0.0100$。

解：题中所要求检验的假设实际上等价于要求检验假设

$$H_0: \sigma^2 \ge 0.0100^2,\quad H_1: \sigma^2 < 0.0100^2$$

这是一个正态总体的方差检验问题，属于左边检验。

检验统计量为

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{0.01^2}。$$

代入本题中的具体数据得到$\chi^2 = \dfrac{(9-1)\times 0.0086^2}{0.01^2} = 5.9168$。

检验的临界值为$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$。

因为$\chi^2=5.9168>2.733$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设H_0，即认为标准差不小于0.0100。

10，以X表示耶路撒冷新生儿的体重（以克计），设X~$N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知。现测得一容量为30的样本，得样本均值为3189，样本标准差为488。试检验假设（$\alpha=0.1$）：

（1）$H_0:\mu\geq 3315,\quad H_1:\mu<3315$。

（2）$H'_0:\sigma\leq 525,\quad H'_1:\sigma>525$。

解：（1）这是一个方差未知的正态总体的均值检验，属于左边检验问题，检验统计量为

$$t=\frac{\bar{x}-3315}{s/\sqrt{n}}。$$

代入本题具体数据，得到$t=\dfrac{3189-3315}{488/\sqrt{30}}=-1.4142$。

检验的临界值为$-t_{0.1}(29)=-1.3114$。

因为$t=-1.4142<-1.3114$，所以样本值落入拒绝域中，故拒绝原假设H_0，即认为$\mu<3315$。

（2）题中所要求检验的假设实际上等价于要求检验假设

$$H'_0:\sigma^2\leq 525^2,\quad H'_1:\sigma^2>525^2$$

这是一个正态总体的方差检验问题，属于右边检验。

检验统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{525^2}。$$

代入本题中的具体数据得到$\chi^2 = \dfrac{(30-1)\times 488^2}{525^2} = 25.0564$。

检验的临界值为$\chi^2_{0.05}(29) = 42.557$。

因为$\chi^2 = 25.0564 < 42.557$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为标准差不大于 525。

11，两个班级 A 和 B，参加数学课的同一期终考试。分别在两个班级中随机地取 9 个，4 个学生，他们的得分如下：

A 班	65	68	72	75	82	85	87	91	95
B 班	50	59	71	80					

设 A 班、B 班考试成绩的总体分别为$N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$，μ_1,μ_2,σ^2均未知，两样本独立。试取$\alpha = 0.05$检验假设$H_0:\mu_1 \le \mu_2$，$H_1:\mu_1 > \mu_2$。

解：这是两个正态总体（方差相等但未知）均值之差的检验问题，属于右边检验。检验统计量为

$$t = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 0}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$$

代入本题中的具体数据得到$t = \dfrac{(80-65)-0}{11.3\times\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}}} = 2.21$。

检验的临界值为$t_{0.05}(11) = 1.7959$。因为$t = 2.21 > 1.7959$，所以样本值落入了拒绝域，因此拒绝原假设，即认为 A 班的考试成绩显著地大于 B 班的成绩。

12，溪流混浊是由于水中有悬浮固体，对一溪流的水观察了 26 天，

一半是在晴天，一半是在下过中到大雨之后，分别以 X,Y 表示晴天和雨天水的混浊度（以 NTU 单位计）的总体，设 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，$\mu_1, \mu_2, \sigma^2$均未知。今取到 X 和 Y 的样本分别为

X: 2.9, 14.9, 1.0, 12.6, 9.4, 7.6, 3.6, 3.1, 2.7, 4.8, 3.4, 7.1, 7.2

Y: 7.8, 4.2, 2.4, 12.9, 17.3, 10.4, 5.9, 4.9, 5.1, 8.4, 10.8, 23.4, 9.7

设两样本独立。试取$\alpha = 0.05$检验假设$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$，$H_1: \mu_1 < \mu_2$。

解：这是两个正态总体（方差相等但未知）均值之差的检验问题，属于左边检验。检验统计量为

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - 0}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

代入本题中的具体数据得到$t = \frac{(6.177 - 9.477) - 0}{5.047 \times \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{13}}} = -1.667$。

检验的临界值为$t_{0.05}(24) = 1.7109$。因为$t = -1.667 > -1.7105$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接收原假设，即认为雨天的混浊度不必晴天的高。

13，用包装机包装产品，将产品分别装入包装机上编号为 1~24 的 24 个注入口，奇数号的注入口在机器的一边，偶数号的在机器的另一边。以 X,Y 分别表示自奇数号和偶数号注入口注入包装机的产品的质量（以 g 计）。设 $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$，$\mu_X, \mu_Y, \sigma^2$ 均未知。在总体 X 和 Y 中分别取到样本:

X: 1071,1076,1070,1083,1082,1067,1078,1080,1084,1075,1080,1075

Y:　1074,1069,1067,1068,1079,1075,1082,1064,1073,1070,1072,1075

设两样本独立。试检验假设$H_0: \mu_1 = \mu_2$，$H_1: \mu_1 \neq \mu_2\ (\alpha = 0.10)$。

解：这是两个正态总体（方差相等但未知）均值之差的检验问题，属于双边检验。检验统计量为

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - 0}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

代入本题中的具体数据得到$t = \dfrac{(1076.75 - 1072.33) - 0}{5.27 \times \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = 2.0546$。

检验的临界值为$t_{0.05}(22) = 1.7171$。因为$t = 2.0546 > 1.7171$，所以样本值落入拒绝域，因此拒绝原假设，即认为产品均值有显著差异。

14，测定家庭中的空气污染。令 X 和 Y 分别为房间中无吸烟者和有一名吸烟者在 24 小时内的悬浮颗粒量（以$\mu g/m^3$计）。设$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$，$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$，$\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$均未知。今取到总体 X 的容量$n_1 = 9$的样本，算得样本均值为$\bar{x}$=93，样本标准差为$s_X = 12.9$；取到总体 Y 的容量为 11 的样本，算得样本均值为$\bar{y}$=132，样本标准差为$s_Y = 7.1$，两样本独立。（1）试检验假设$(\alpha = 0.05)$：　$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$，$H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$。

（2）如能接受H_0，接着检验假设$(\alpha = 0.05)$：$H'_0: \mu_X \geq \mu_Y$，$H'_1: \mu_X < \mu_Y$。

解：（1）这是一个两个正态总体的方差之比的检验问题，属于双边检验。检验统计量为　$F = \dfrac{s_X^2}{s_Y^2}$

代入本题中的具体数据得到$F = \dfrac{12.9^2}{7.1^2} = 3.301$。

检验的临界值为 $F_{0.025}(8,10)=3.85$， $F_{0.975}(8,10)=\frac{1}{4.3}=0.2326$ 。因为 $0.2326<F=3.301<3.85$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为两总体方差相等。

（2）因为两总体方差相等，所以这是一个方差相等的两个正态总体的均值之差的检验问题，属于左边检验。检验统计量为

$$t=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-0}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

代入本题中的具体数据得到$t=\frac{(93-132)-0}{10.1\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}}}=-8.5929$。

检验的临界值为$t_{0.025}(18)=2.1009$。因为$t=-8.5929<-2.1009$，所以样本值落入拒绝域，因此拒绝原假设，即认为有吸烟者的房间悬浮颗粒显著大于没有吸烟者的房间。

15，分别在两种牌号的灯泡中各取样本容量为$n_1=7,n_2=10$的样本，测得灯泡的寿命（以小时计）的样本方差分别为$s_1^2=9201,s_2^2=4856$。设两样本独立，两总体分别为$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$分布，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$均未知。试检验假设($\alpha=0.05$)：　　$H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$。

解：这是一个两个正态总体的方差之比的检验问题，属于右边检验。

检验统计量为　$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$

代入本题中的具体数据得到$F=\frac{9201}{4856}=1.8948$。

检验的临界值为$F_{0.05}(6,9)=3.37$。因为$F=1.8948<3.37$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为第一个总体的方差不比第二个

总体的方差大。

16，在第 13 题中检验假设（取$\alpha=0.05$）

$$H_0:\sigma_X^2=\sigma_Y^2,\quad H_1:\sigma_X^2\neq\sigma_Y^2。$$

以说明在该题中我们假设$\sigma_X^2=\sigma_Y^2$是合理的。

解： 这是一个两个正态总体的方差之比的检验问题，属于双边检验。

检验统计量为 $F=\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$，代入第 13 题中的具体数据得到 $F=\dfrac{29.295}{26.242}=1.1163$。

检验的临界值为$F_{0.025}(11,11)=3.48,\quad F_{0.975}(11,11)=\dfrac{1}{3.48}=0.2874$。因为 $0.2874<F=1.1163<3.48$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为两总体方差相等。

17，将双胞胎分开来抚养，一个由父母亲自带大，另一个不是由父母亲自带大。现取 14 对双胞胎测试他们的智商，智商测试得分如下，

双胞胎序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
父母亲代大x_i	23	31	25	18	19	25	28	18	25	28	22	14	34	36
非父母带大y_i	22	31	29	24	28	31	27	15	23	27	26	19	30	28

设各对数据的差$D_i=X_i-Y_i(i=1,2,\cdots 14)$是来自正态总体$N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，$\mu_D,\sigma_D^2$均未知。问是否可以认为在两种不同的环境中长大的孩子，其智商得分是不一样的。即检验假设$H_0:\mu_D=0,H_1:\mu_D\neq 0$（取$\alpha=0.05$）

解： 本题要求一个基于成对数据的检验，双边检验。检验统计量为

$$t=\frac{\overline{D}-0}{s_D/\sqrt{n}}$$

代入本题中的具体数据得到$t=\dfrac{-1-0}{4.74/\sqrt{14}}=-0.7895$

检验的临界值为$t_{0.975}(13)=-2.1604$。因为$t=-0.7895>-2.1604$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为两种环境中长大的孩子智商没有显著差异。

18，医生对于慢走是否能降低血压（以 Hg-mm 计）这一问题的研究感兴趣。随机地选取 8 个病人慢走一个月，得到以下数据。

病人序号	1	2	3	4	5	6	7	8
慢走前 x_i	134	122	118	130	144	125	127	133
慢走后 y_i	130	120	123	127	138	121	132	135

设各对数据的差$D_i=X_i-Y_i(i=1,2,\cdots 8)$是来自正态总体$N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，$\mu_D,\sigma_D^2$均未知。问是否可以认为慢走后比慢走前血压有了降低。即检验假设$H_0:\mu_D\le 0,H_1:\mu_D>0$（取$\alpha=0.05$）。并求$\mu_D$的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：本题要求对一组成对数据进行t检验，且为右边检验。检验统计量为$t=\dfrac{\overline{D}-0}{s_D/\sqrt{n}}$。

代入本题中的具体数据得到$t=\dfrac{0.875-0}{4.29/\sqrt{8}}=0.5768$

检验的临界值为$t_{0.025}(7)=2.3646$。因为$t=0.5768<2.3646$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为慢走对于血压的下降没

有显著效果。

μ_D的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\overline{D} \pm \frac{t_{0.025}(7)}{\sqrt{8}} \times s_D) = (0.875 \pm \frac{2.3646}{\sqrt{8}} \times 4.29) = (0.875 \pm 3.587)。$$

19，统计了日本西部地震在一天中发生的时间段，共观察了 527 次地震，这些地震在一天中的四个时间段的分布如下表

时间段	0 点—6 点	6 点—12 点	12 点—18 点	18 点—24 点
次　数	123	135	141	128

试取$\alpha = 0.05$检验假设：地震在各个时间段内发生时等可能的。

解：根据题意，要检验以下假设：

H_0: 地震的发生时间在（0,24）内是均匀分布的

检验统计量为$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{f_i^2}{np_i} - n$，其中 $p_i = 6/24 = 0.25$。

代入本题中的数据得到$\chi^2 = \frac{123^2 + 135^2 + 141^2 + 128^2}{527 \times 0.25} - 527 = 1.417$，检验的临界值为$\chi^2{}_{0.05}(4-1) = 7.815$。因为$\chi^2 = 1.417 < 7.815$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为地震在各个时间段内发生时等可能的。

20，美国《教育统计文摘》1993 年版给出该国 18 岁或以上的人持有学士或更高学位的年龄分布如下

年　龄	18~24	25~34	35~44	45~54	55~64	65 或以上
百分比	5	29	30	16	10	10

在阿拉斯加州随机选择500个18岁或以上的持有学士或更高学位的一项调查给出如下数据

年　龄	18~24	25~34	35~44	45~54	55~64	65 或以上
人　数	30	150	155	75	35	55

试取$\alpha = 0.1$检验该地区年龄分布是否和全国一样。

解：根据题意，要检验以下假设：

H_0:　阿拉斯加州的年龄分布律为

年　龄	18~24	25~34	35~44	45~54	55~64	65 或以上
概　率	0.05	0.29	0.30	0.16	0.10	0.10

检验统计量为$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{f_i^2}{np_i} - n$。所需计算列表如下：

A_i	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/(np_i)$
A_1	30	0.05	25	36
A_2	150	0.29	145	155.172
A_3	155	0.30	150	160.167
A_4	75	0.16	80	70.313
A_5	35	0.10	50	24.5
A_6	55	0.10	50	60.5

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{f_i^2}{np_i} - n = 506.652 - 500 = 6.652$，检验的临界值为$\chi^2_{0.1}(6-1) = 9.236$。

因为$\chi^2 = 6.652 < 9.236$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为阿拉斯加州的年龄分布与全国的分布一样。

21 以下是某地区 100 个月中各月发生的较大的地震次数

一个月的较大的地震次数	0	1	2	3	4
月　数	57	31	8	3	1

试取$\alpha = 0.05$检验假设H_0:数据来自泊松分布的总体。

解：以随机变量X表示该地区一个月的较大的地震次数，则要检验假设$H_0: X \sim \pi(\lambda)$，利用极大似然估计可以得到

$$\hat{\lambda} = \frac{0\times 57 + 1\times 31 + 2\times 8 + 3\times 3 + 4\times 1}{100} = 0.6\text{。}$$

检验统计量为$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5}\frac{f_i^2}{np_i} - n$，所需计算列表如下：

A_i	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/(np_i)$
A_1	57	$e^{-0.6} = 0.5488$	54.88	59.202
A_2	31	$0.6e^{-0.6} = 0.3293$	32.93	29.183
A_3	8	$0.18e^{-0.6} = 0.0988$	9.88	6.478
A_4	3	$0.036e^{-0.6} = 0.0198$	1.98	4.545
A_5	1	$0.0054e^{-0.6} = 0.0030$	0.30	3.333

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5}\frac{f_i^2}{np_i} - n = 102.741 - 100 = 2.741$，检验的临界值为$\chi^2_{0.05}(5-1-1) = 7.815$。因为$\chi^2 = 2.741 < 7.815$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为数据来自泊松分布的总体。

22，一供货商声称他们厂生产的电子元件的寿命（以小时计）服从均值为$\theta = 200$的指数分布。现随机地取 1000 只此种元件，测得如下数

据。试取$\alpha = 0.05$检验假设H_0:这些数据来自均值为$\theta = 200$的指数分布总体。

寿命x	$x \le 150$	$150 < x \le 300$	$300 < x \le 450$	$450 < x \le 600$	$600 < x \le 750$	$x > 750$
只 数	543	258	120	48	20	11

解：要检验假设H_0:这些数据来自均值为$\theta = 200$的指数分布总体。检验统计量为$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{f_i^2}{np_i} - n$，所需计算列表如下：

A_i	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/(np_i)$
A_1	543	$1 - e^{-\frac{150}{200}} = 0.5276$	527.6	558.8495
A_2	258	$e^{-\frac{150}{200}} - e^{-\frac{300}{200}} = 0.2492$	249.2	267.1108
A_3	120	$e^{-\frac{300}{200}} - e^{-\frac{450}{200}} = 0.1177$	117.7	122.3449
A_4	48	$e^{-\frac{450}{200}} - e^{-\frac{600}{200}} = 0.0556$	55.6	41.4388
A_5	20	$e^{-\frac{600}{200}} - e^{-\frac{750}{200}} = 0.0263$	26.3	15.2091
A_6	11	$e^{-\frac{750}{200}} = 0.0235$	23.5	5.1489

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{f_i^2}{np_i} - n = 1010.147 - 1000 = 10.147$，检验的临界值为$\chi^2_{0.05}(6-1) = 11.070$。因为$\chi^2 = 10.147 < 11.070$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为数据来自均值为$\theta = 200$的指数分布总体。

23，一计算机程序用来产生在区间（0，10）均匀分布的随机变量的简单随机样本值（即产生区间（0，10）上的随机数），以下是相继得到的 250 个数据的分布情况。试取$\alpha=0.05$检验这些数据是否来自均匀分布 U(0,10)的总体。亦即检验这一程序是否符合要求。

数据所在区间	0~1.99	2~3.99	4~5.99	6~7.99	8~9.99
频　数	38	55	54	41	62

解：要检验假设H_0:这些数据来自均匀分布 U(0,10)的总体。检验统计量为$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{f_i^2}{np_i}-n$，所需计算列表如下：

A_i	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/(np_i)$
A_1	38	0.2	50	28.88
A_2	55	0.2	50	60.5
A_3	54	0.2	50	58.32
A_4	41	0.2	50	33.62
A_5	62	0.2	50	76.88

$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{f_i^2}{np_i}-n=258.2-250=8.2$,检验的临界值为$\chi^2_{0.05}(5-1)=9.488$。因为$\chi^2=8.2<9.488$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为这些数据来自均匀分布 U(0,10)的总体。这一程序符合要求。

24，下面给出了某医院在 1978 年统计的 70 位孕妇的怀孕期（以日计），试取$\alpha=0.1$检验这些数据是否来自正态总体。

251， 264， 234， 283， 226， 244， 269， 241， 276， 274

263，　243，　254，　276，　241，　232，　260，　248，　284，　253

265，　235，　259，　279，　256，　256，　254，　256，　250，　269

怀孕天数	人　数	怀孕天数	人　　数
219.5~229.5	1	259.5~269.5	23
229.5~239.5	5	269.5~279.5	7
239.5~249.5	10	279.5~289.5	6
249.5~259.5	16	289.5~299.5	2

240，　261，　263，　262，　259，　230，　268，　284，　259，　261

268，　268，　264，　271，　263，　259，　294，　259，　263，　278

267，　293，　247，　244，　250，　266，　286，　263，　274，　253

281，　286，　266，　249，　255，　233，　245，　266，　265，　264

解：本题要求检验H_0：数据来自正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。根据极大似然估计计算出$\hat{\mu}=\frac{1}{70}\sum_{i=1}^{70}x_i=260.3$，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{69}\sum_{i=1}^{70}(x_i-\overline{x})^2=232.8$，$\hat{\sigma}=15.258$。

使用分布拟合检验，检验统计量为$\chi^2=\sum_{i=1}^{8}\frac{f_i^2}{np_i}-n$。数据被分成 8 组，频数表如下。

检验过程中所需计算列表如下：

A_i	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/(np_i)$
A_1	1	$\Phi(\frac{229.5-260.3}{15.258})=0.0217$	1.519	0.65833
A_2	5	$\Phi(\frac{239.5-260.3}{15.258})-\Phi(\frac{229.5-260.3}{15.258})=0.0652$	4.564	5.47765
A_3	10	$\Phi(\frac{249.5-260.3}{15.258})-\Phi(\frac{239.5-260.3}{15.258})=0.1520$	10.64	9.39850
A_4	16	$\Phi(\frac{259.5-260.3}{15.258})-\Phi(\frac{249.5-260.3}{15.258})=0.2412$	16.884	15.16228
A_5	23	$\Phi(\frac{269.5-260.3}{15.258})-\Phi(\frac{259.5-260.3}{15.258})=0.2456$	17.192	30.77013
A_6	7	$\Phi(\frac{279.5-260.3}{15.258})-\Phi(\frac{269.5-260.3}{15.258})=0.1705$	11.935	4.10557
A_7	6	$\Phi(\frac{289.5-260.3}{15.258})-\Phi(\frac{279.5-260.3}{15.258})=0.0757$	5.299	6.79373
A_8	2	$1-\Phi(\frac{289.5-260.3}{15.258})=0.0281$	1.967	2.03355

$\chi^2=\sum_{i=1}^{8}\frac{f_i^2}{np_i}-n=74.39974-70=4.3997$，检验的临界值为 $\chi^2_{0.1}(8-2-1)=9.236$。因为$\chi^2=4.3997<9.236$，所以样本值没有落入拒绝域，因此接受原假设，即认为这些数据来自正态总体。（本章习题解答完毕）