南平市 2019—2020 学年高中毕业班第一次综合质量检查

文 科 数 学

（满分：150 分　　考试时间：120 分钟）

出题意图

总体指导思想是由于是第一次综合质量检测，以考查基础知识和基础能力为主，考通性通法。设置的题目兼顾到二类校学生的情况，容易和较容易题比例大。

注意事项：

1．本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。

2．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

3．全部答案答在答题卡上，答在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x\geq 1\}, B=\{x|x\geq -2\}$, 则 $B\cap \complement_R A=$

A. $\{x|-2<x<1\}$　　B. $\{x|-2\leq x<1\}$　　C. $\{x|-2<x\leq 1\}$　　D. $\{x|-2\leq x\leq 1\}$

【解析】$\complement_R A=\{x|x<1\}$，$B\cap \complement_R A=\{x|-2\leq x<1\}$，故选 B

【考查意图】本题以集合为载体，考查补集与交集等知识，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

2. 若复数 $z=\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$为纯虚数，则实数 a 的值为

A． 2　　B． 1　　C． -1　　D． -2

【解析】$z=\dfrac{a-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(a-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{a+1}{2}\mathrm{i}$，由已知 $a-1=0$ 且 $a+1\neq 0$，解得 $a=1$，故选 B

【考查意图】本题以复数为载体，考查复数的概念和复数的除法运算等知识，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

3. 已知 $a=\dfrac{1}{\ln 2}$，$b=\ln\dfrac{1}{2}, c=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$(其中 e 为自然对数的底数)，则

A． $c<a<b$　　B． $a<c<b$　　C． $b<c<a$　　D． $c<b<a$

【解析】$a=\dfrac{1}{\ln 2}>1$，$b=\ln\dfrac{1}{2}<0$，$0<c=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<1$，可得：$b<c<a$,故选 B

【考查意图】本题以对数、指数为为载体，考查对数、指数的运算及比较大小等知识，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

4. 已知平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$，$|\vec{b}|=4$，且 $(\vec{a}-2\vec{b})\perp\vec{a}$，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=$

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【解析】由 $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，又 $(\vec{a}-2\vec{b})\perp\vec{a}$ 得：$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{2-2+4^2}=4$，故选 C.

【考查意图】本题以平面向量为载体，考查平面向量的坐标运算，模及数量积运算等知识，考查运算求解能力，考查数学运算核心素养.

5．一个盒子中装有 4 个大小、形状完全相同的小球，其中 1 个白球，2 个红球，1 个黄球，若从中随机取出 1 个球，记下颜色后放回盒子，均匀搅拌后，再随机取出 1 个球，则两次取出小球颜色不同的概率是

A．$\frac{5}{8}$　　　　B．$\frac{1}{8}$　　　　C．$\frac{5}{6}$　　　　D．$\frac{1}{6}$

【解析】基本事件为共 16 个，两次取出小球颜色相同的事件有 6 个，所以，两次取出小球颜色相同的概率是 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，两次取出小球颜色不同的概率是 $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 故选 A.

【考查意图】本题以古典概型为载体，考查用列举法求基本事件的总数、对立事件概率等知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力，考查直观想象、逻辑推理、数学运算核心素养.

6. 已知椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 P（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则椭圆 E 的焦距为

A．1　　　B．2　　　C．$\sqrt{2}$　　　D. $2\sqrt{2}$

【解析】由已知得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\frac{1}{2}}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{b^2}=1$，又 $a^2=b^2+c^2$，联立解得 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，$b=1$，因此焦距为 2，故选 B

【考查意图】本题以椭圆为载体，考查椭圆及其几何性质等知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力，考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想，考查直观想象、逻辑推理、数学运算核心素养.

7. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$，把函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象．下列关于函数 $g(x)$ 的说法正确的是

A．在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上是减函数　　　　B．在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $\left[-1,1\right]$

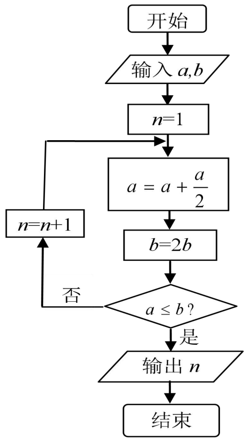
C．函数 $g(x)$ 是奇函数　　　　D．其图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

【解析】$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，$g(x)=2\sin\left[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$.

$g(x)$是偶函数,在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上不单调，在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上的值域为$[-2,1]$，其图像关于直线$x=\frac{\pi}{2}$ 对称. 故选 D.

【考查意图】本题以三角函数为载体，考查三角函数图象变换与性质等知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力，考查化归与转化思想、数形结合思想，考查直观想象、逻辑推理、数学运算核心素养.

8. 宋元时期数学名著《算学启蒙》中有关于“松竹并生”的问题：
“松长六尺，竹长两尺，松日自半，竹日自倍，何日竹逾松长？”
右图是解决此问题的一个程序框图，其中a为松长、b为竹长，则输出的$n=$

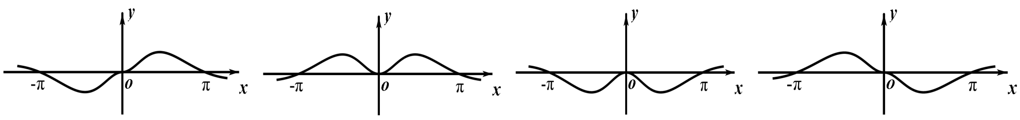


A. 5　　B.3　　C. 4　　D. 2

【解析】n=1 时，a=9, b=4；n=2 时，a=13.5, b=8；n=3 时，a=20.25, b=16；n=4 时，a=30.375, b=32, 此时输出 n=4。故选 C.

【考查意图】利用程序框图的顺序结构、循环结构 ,结合实际问题的已知条件求出输出的 n 的值。考查程序框图的三种基本逻辑结构及应用，考查学生的文化素养和计算能力。

9. 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin x}{\cos x+x^2}$ 在$[-\pi，\pi]$上的图像大致为



A.　　B.　　C.　　D.

【解析】$f(x)$为奇函数，排除 B、C，当$0\le x\le\pi$时，$f(x)\ge 0$，排除 D，故选 A

【考查意图】本题以函数的大致图像为载体，主要考查从函数的奇偶性判断图像的对称性和从函数取值判断图像的变化趋势等知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数形结合思想，考查逻辑推理、直观想象核心素养.

10. 给出下列四个命题：

①$\exists x_0\in N^*$，使得$\sin\frac{\pi x_0}{2}=1$；②$a\le 0$是$ax^2+ax-1<0$恒成立的充分条件；

③函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$在点$(\mathrm{e},\frac{1}{\mathrm{e}})$处不存在切线；④函数$f(x)=9\ln x-x^2$存在零点.

其中正确命题个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】①$\exists x_0=1$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，正确；②$ax^2+ax-1<0$恒成立，需$a=0$或$\begin{cases}a<0\\a^2+4a<0\end{cases}$解得：$-4<a\le 0$，错误；③函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$在点$(\mathrm{e},\frac{1}{\mathrm{e}})$处切线方程为$y=\frac{1}{\mathrm{e}}$，错误；

④函数$f(x)=9\ln x-x^2$，$f(1)=-1<0$，$f(3)=9\ln 3-9>0$

$f(1)\cdot f(3)<0$，所以$f(x)$在$\left(1,3\right)$存在零点，正确；故选 B.

【考查意图】本题以充分条件、简易逻辑、函数导数的应用等知识为载体，主要考查不等式恒成立、函数导数的几何意义、函数零点的判断等知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数形结合思想，考查逻辑推理、直观想象核心素养.

11. 在ΔABC中，$\angle ABC=120^0$，D是线段AC上的点，$\angle DBC=30^0$，若ΔABC的面积为$2\sqrt{3}$，则BD的最大值是

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

【解析】由$2\sqrt{3}=\frac{1}{2}ac\sin 120^\circ$得$ac=8$，因为$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}$，即

$2\sqrt{3}=\frac{1}{2}BDc\sin 90^\circ+\frac{1}{2}BDa\sin 30^\circ$，得$BD=\frac{8\sqrt{3}}{a+2c}\le\frac{8\sqrt{3}}{8}=\sqrt{3}$，当且仅当$a=2c$时，

即$a=4,c=2$时，BD取到最大值是$\sqrt{3}$. 故选 B.

【设计意图】本题以三角形为载体，考查学生运用三角形面积公式的综合能力,并能运用基本不等式求最值. 考查运算求解能力、逻辑推理能力，考查化归与转化思想、数形结合思想，考查直观想象、逻辑推理、数学抽象核心素养.

12. 已知定义在R上的连续函数$f(x)$满足$f(x)=f(4-x)$，且$f(-2)=0$，$f'(x)$为函数$f(x)$的导函数，当$x<2$时，有$f(x)+f'(x)>0$，则不等式$x\cdot f(x)>0$的解集为

A. $(0,6)$　　B. $(-2,0)$　　C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(0,6)$

【解析】构造函数$g(x)=e^x f(x),(x<2)$，

则$g(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]>0$，$\therefore g(x)$在$(-\infty,2)$单调递增，

$\therefore g(-2)=e^{-2}f(-2)=0$，$\therefore$当$x\in(-\infty,-2)$时，$g(x)<0$，当$x\in(-2,2)$时，$g(x)>0$，又$e^x>0$，$\therefore$当$x\in(-\infty,-2)$时，$f(x)<0$，当$x\in(-2,2)$时，$f(x)>0$，

又$f(x)$满足$f(x)=f(4-x)$，$\therefore f(x)$图象关于直线$x=2$对称，$\therefore$当$x\in(-2,6)$时，$f(x)>0$，当$x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$时，$f(x)<0$，

不等式$x\cdot f(x)>0$可化为：$\begin{cases}x<0\\ f(x)<0\end{cases}$或$\begin{cases}x>0\\ f(x)>0\end{cases}$，可解得：$x\in(-\infty,-2)\bigcup(0,6)$

故选 D

【考查意图】本题以函数性质、导数的应用等知识为载体，主要考查函数的对称性、函数导数应用于判断函数单调性，解不等式等知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数形结合思想，考查逻辑推理、直观想象核心素养.

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分.第 13～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求做答.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13. 已知$\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，则$\sin 2\alpha=$__________.

【解析】由$\sin 2\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)=\cos\left[2(\frac{\pi}{4}-\alpha)\right]=$

$=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1=2(\frac{\sqrt{2}}{4})^2-1=-\frac{3}{4}$.

【考查意图】本题以三角恒等变换公式为载体，考查学生运用角的变换的综合能力. 考查运算求解能力、逻辑推理能力，考查化归与转化思想，考查直观想象、逻辑推理、数学运算核心素养.

14. 已知数列$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列，若a_2+1，a_5+1，a_6+1成等比数列，则

$a_8=$ _________.

【解析】$(a_5+1)^2=(a_2+1)(a_6+1)$，即$(a_1+4d+1)^2=(a_1+d+1)(a_1+5d+1)$得$a_1=10$，

又$d=-2$，$a_8=-4$.

【考查意图】本题以等差数列、等比数列为载体，考查学生运算求解能力、逻辑推理能力，考查化归与转化思想，考查直观想象、逻辑推理、数学运算核心素养.

15. 已知直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$的高为$2\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{3}$，$\angle BAC=120^0$，则该三棱柱外接球的表面积为 __________.

解：底面外接圆半径为$r=\frac{BC}{2\sin A}=1$，外接球的半径$R^2=r^2+(\frac{1}{2}AA_1)^2=1+3=4$，外接球的表面积为$4\pi R^2=16\pi$.

【考查意图】考查余弦定理、正弦定理的应用，考查柱体体积、球的表面积计算公式，考查三棱柱与其外接球的结构关系，考查学生的计算能力、空间想象能力。

16. 已知点F_1,F_2分别为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$A$为直线$x=\frac{4}{3}a$与双曲线$C$的一个交点，若点$A$在以$F_1F_2$为直径的圆上，则双曲线$C$的离心率为_____.

解：设$A(\frac{4a}{3},y)$，代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$化简得$y^2=\frac{7}{9}b^2$，由已知得$F_1A\perp F_2A$，由向量知识得$(\frac{4}{3}a+c)(\frac{4}{3}a-c)=\frac{7}{9}b^2$，又$a^2+b^2=c^2$，整理得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{7}{2}$，则$C$的离心率$e=\sqrt{1+\frac{7}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【考查意图】本题以双曲线为载体，主要考查直线、双曲线及其几何性质等知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想,考查逻辑推理、直观想象、数学运算核心素养.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

国家大力提倡科技创新，某工厂为提升甲产品的市场竞争力，对生产技术进行创新改造，使甲产品的生产节能降耗。以下表格提供了节能降耗后甲产品的生产产量x(吨)与相应的生产能耗y(吨)的几组对照数据.

x (吨)	4	5	6	7
y (吨)	2.5	3	4	4.5

（1）请根据上表提供的数据，用最小二乘法求出y关于x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

$$(\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x})$$

（2）已知该厂技术改造前生产 8 吨甲产品的生产能耗为 7 吨，试根据（1）求出的线性回归方程，预测节能降耗后生产 8 吨甲产品的生产能耗比技术改造前降低多少吨？

17.（本小题满分 12 分）

【解析】

(1) $\overline{x}=\frac{4+5+6+7}{4}=5.5,\overline{y}=\frac{2.5+3+4+4.5}{4}=3.5$, …………2 分

$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 4\times 2.5 + 5\times 3 + 6\times 4 + 7\times 4.5 = 80.5,$ …………4 分

$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 126,$ …………5 分

$\therefore \hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 4\overline{x}^2} = \dfrac{80.5 - 4\times 5.5\times 3.5}{126 - 4\times 5.5^2} = 0.7,$ …………7 分

$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 3.5 - 0.7\times 5.5 = -0.35,$ …………8 分

$\therefore$ 所求的回归方程为$\hat{y} = 0.7x - 0.35.$ …………9 分

(2)把 $x = 8$ 代入回归方程可预测相应的生产能耗是

$y = 0.7\times 8 - 0.35 = 5.25$吨，…………10 分

7-5.25=1.75 吨，…………11 分

所以，预测生产 8 吨甲产品的生产能耗比技术改造前降低 1. 75 吨. …………12 分

【考查意图】本题以统计为载体，主要考查线性回归方程等知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查逻辑推理、直观想象、数学运算、数据分析核心素养.

18. （本小题满分 12 分）

已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n = a\cdot 2^n - 1(a\in R, n\in N^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设 $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n .

18. （本小题满分 12 分）

【解析】(1) 方法一: 当 $n=1$ 时，$a_1 = S_1 = 2a - 1$. …………1 分

当 $n\ge 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = a\cdot 2^{n-1}\ (*)$, …………3 分

因为$\{a_n\}$是等比数列，所以 $a_1 = 2a - 1$ 满足$(*)$式，所以 $2a - 1 = a$，即 $a = 1$，……5 分

因此等比数列$\{a_n\}$的首项为 1, 公比为 2,

所以等比数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n = 2^{n-1}$. …………6 分

方法二: 当 $n=1$ 时，$a_1 = S_1 = 2a - 1$. …………1 分

当 $n \geq 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = a \cdot 2^{n-1}$ …………3 分

于是 $a_2 = 2a, a_3 = 4a$, 由已知得 $a_2{}^2 = a_1 a_3$, 解得 $a = 1或a = 0(舍去)$, …………5 分

因此等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比为 2,

于是等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2^{n-1}$. …………6 分

（2）由（1）知 $S_n = 2^n - 1$， …………8 分

则 $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$, 即 $b_n = \dfrac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \dfrac{1}{2^n - 1} - \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}$， …………10 分

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{7}\right) + \left(\dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{15}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{2^n - 1} - \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}\right)$, 所以

$T_n = 1 - \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}$. …………12 分

方法二：$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \dfrac{s_{n+1} - s_n}{s_n s_{n+1}} = \dfrac{1}{s_n} - \dfrac{1}{s_{n+1}}$， …………8 分

于是 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(\dfrac{1}{s_1} - \dfrac{1}{s_2}\right) + \left(\dfrac{1}{s_2} - \dfrac{1}{s_3}\right) + \left(\dfrac{1}{s_3} - \dfrac{1}{s_4}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{s_n} - \dfrac{1}{s_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{s_1} - \dfrac{1}{s_{n+1}}$

……………………10 分

由（1）知 $S_n = 2^n - 1$，于是 $T_n = 1 - \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}$ …………12 分

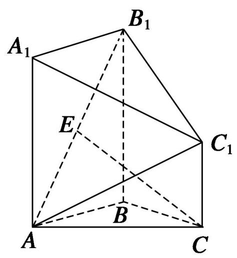
【考查意图】本题以等比数列为载体，考查学生求数列通项公式的方法、数列前 n 项和的方法，考查学生运算求解能力、逻辑推理能力，考查化归与转化思想，考查直观想象、逻辑推理、数学运算核心素养.

19. （本小题满分 12 分）

如图，在几何体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为矩形，$AA_1 /\!/ CC_1$ 且 $AA_1=2CC_1$，E 为 AB_1 的中点.

（1）求证：$CE /\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）若平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC，$AB \perp BC$，$AB=BC=CC_1=2$，求三棱锥 $E\text{-}ACC_1$ 的体积.



19. 【解析】（本小题满分 12 分）

(1)证明　如图，取 A_1B_1 中点 F，连接 EF，FC_1，

∵E 为 AB_1 中点，∴$EF /\!/ A_1A$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}A_1A$，…………2 分

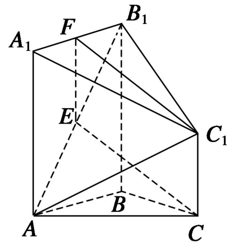
∵$AA_1 /\!/ CC_1$ 且 $AA_1=2CC_1$，

$\therefore EF// CC_1$ 且 $EF=CC_1$，即四边形 EFC_1C 为平行四边形，

$\therefore CE// C_1F$. ....4 分

$\because CE \not\subset$ 平面$A_1B_1C_1$， $C_1F \subset$ 平面$A_1B_1C_1$，

$\therefore CE//$ 平面 $A_1B_1C_1$. ....6 分



(2) $\because$ 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC，交线为 AB

又矩形 ABB_1A_1 中 $AA_1 \perp AB$，$\therefore AA_1 \perp$ 平面 ABC，............8 分

$\because AA_1 // CC_1$，$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC， ....9 分

$\because BB_1 // CC_1$， $BB_1 \not\subset$ 平面A_1C_1C， $CC_1 \subset$ 平面A_1C_1C，

$\therefore BB_1 //$ 平面A_1C_1C ....10 分

$\therefore V_{E-ACC_1} = \frac{1}{2}V_{B_1-ACC_1} = \frac{1}{2}V_{B-ACC_1} = \frac{1}{2}V_{C_1-ABC}$ ....11 分

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{2}{3}$ ....12 分

【考查意图】考查直线与平面平行、垂直的位置关系，考查平面与平面垂直的性质、锥体体积计算公式，考查学生的空间想象能力、逻辑推理能力、计算能力，考查化归转化的数学思想。

20．（本小题满分 12 分）

已知抛物线C：$y^2 = 4x$ ，抛物线C的准线为l，焦点为F，A点位于第一象限内且在抛物线C上运动，直线AO（O为坐标原点）交l于B点，直线BF交抛物线C于D、E两点，M为线段DE中点.

（1）若$|AF|$=5，求直线 BF 的方程；

（2）试问直线 AM 的斜率是否为定值,若是，求出该值；若不是，说明理由.

20.【解析】（本小题满分 12 分）

（1）抛物线C：$y^2 = 4x$的准线为$x=-1$，焦点为F（1，0）...........2 分

由$|AF|$=5 及抛物线定义得A点横坐标为 4，........................3 分

由A点位于第一象限内且在抛物线C：$y^2 = 4x$上得A点坐标为（4，4），...........4 分

于是k_{OA}=1，则直线 OA 的方程为$y = x$，与准线$x=-1$联立解得 B（-1，-1）......5 分

因此$k_{BF}=\frac{1}{2}$，所以直线 BF 的方程为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$，即$x-2y-1=0$.....................6 分

（说明：若通过几何法或其它方法得出$k_{BF}=\frac{1}{2}k_{OA}=\frac{1}{2}$，然后再求直线方程也一样给分）

（2）由已知直线 OA 的斜率存在，设直线 OA 的方程为$y=kx$，与准线$x=-1$联立解得 B

$(-1, -k)$，

于是 $k_{BF} = \dfrac{k}{2}$，……………………………………7 分

由已知 $k>0$，故设直线 BF 的方程为 $x=\dfrac{2}{k}y+1$，与 $y^2=4x$ 联立并消去 x 得

$y^2-\dfrac{8}{k}y-4=0$，……………………………………………8 分

由于 $\Delta=\dfrac{64}{k^2}+16>0$

设 $D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{8}{k}$，则 $x_1+x_2=\dfrac{16}{k^2}+2$ …………………9 分

由于 M 为线段 DE 中点，于是 M 点坐标为 $(\dfrac{8}{k^2}+1,\dfrac{4}{k})$，　…………………10 分

直线 OA 的方程 $y=kx$（$k>0$），与 $y^2=4x$ 联立解得 A（$\dfrac{4}{k^2},\dfrac{4}{k}$），…………11 分

所以直线 AM 的斜率为 0，综上可知直线 AM 的斜率为定值 0……………………12 分

【考查意图】本题以直线、抛物线为载体，考查直线、抛物线及其几何性质、直线与抛物线位置关系等知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想，考查直观想象、逻辑推理、数学运算核心素养.

21. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}$，其中 $a\in R$.

（1）试讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

（2）若 $a=1$，试证明：$f(x)<\dfrac{e^x+\cos x}{x}$.

20.（本小题满分 12 分）

【解析】（1）由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}\ (x>0)$ 知：　　　　…………1 分

（i）若 $a\le 0$，$f'(x)=\dfrac{x-a}{x^2}>0(x>0)$，∴ $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数. …2 分

（ii）若 $a>0$，

∴当 $x\in(0,a)$ 时，有 $f'(x)<0$，∴ $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上为减函数.

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，有 $f'(x)>0$，∴ $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上为增函数.　…………4 分

综上：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数;

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上为减函数；$f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上为增函数. …5 分

（2）若 $a=1$，则 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}(x>0)$

要证 $f(x)<\dfrac{e^x+\cos x}{x}$，只需证 $x\ln x+1<e^x+\cos x$，

即证： $x\ln x<e^x+\cos x-1$

（i）当 $0<x\le 1$ 时，$x\ln x\le 0$，而 $e^x+\cos x-1>1+\cos 1-1=\cos 1>0$

∴此时：$x\ln x<e^x+\cos x-1$ ……6 分

（ii）当 $x>1$ 时，令 $g(x)=e^x+\cos x-x\ln x-1$，$x\in(0,+\infty)$………7 分

∵ $g'(x)=e^x-\sin x-\ln x-1$ ………8 分

设 $h(x)=g'(x)=e^x-\sin x-\ln x-1$，

则 $h'(x)=e^x-\cos x-\dfrac{1}{x}$

∵ $x>1$，∴ $h'(x)=e^x-\cos x-\dfrac{1}{x}>e-1-1>0$ ……9 分

当 $x>1$ 时，$h(x)$ 单调递增，∴ $h(x)>h(1)=e-\sin 1-1>0$，即 $g'(x)>0$

∴ $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，∴ $g(x)>g(1)=e+\cos 1-1>0$ ……10 分

即：$g(x)=e^x+\cos x-x\ln x-1>0$

∴ $x\ln x<e^x+\cos x-1$

∴ $f(x)<\dfrac{e^x+\cos x}{x}$ ……11 分

综上：当 $x>0$ 时，有 $f(x)<\dfrac{e^x+\cos x}{x}$ …………12 分

【考查意图】本题以函数导数的应用知识为载体，主要考查函数导数应用于判断函数单调性，证明不等式等知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查分类讨论思想，构造新函数思想方法，考查逻辑推理核心素养.

请考生在第 22、23 二题中任选一题作答. 注意：只能做所选定的题目. 如果多做，则按所做第一个题目计分，做答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\dfrac{\pi}{4})=1$，曲线 C 的参数方程为：$\begin{cases}x=2(\cos\alpha+\sin\alpha),\\ y=\cos\alpha-\sin\alpha,\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），A,B 为直线 l 上距离为 2 的两动点，点 P 为曲线 C 上的动点且不在直线 l 上.

(1) 求曲线 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程.

(2) 求△PAB 面积的最大值.

【解析】法一：直线l的极坐标方程$\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=1$化成$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，$\therefore$直线$l$的直角坐标方程为$x+y-1=0$……………2 分

曲线C的参数方程化成：$\begin{cases}\frac{x}{2}=\cos\alpha+\sin\alpha \\ y=\cos\alpha-\sin\alpha\end{cases}$,($\alpha$为参数).

平方相加得$\frac{x^2}{4}+y^2=2$，即$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ ………………5 分

（2）设点P $(2\cos\alpha+2\sin\alpha,\cos\alpha-\sin\alpha)$,则$P$到直线$l$的距离为：

$d=\frac{|3\cos\alpha+\sin\alpha-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{10}\sin(\alpha+\varphi)-1|}{\sqrt{2}}$ ………………8 分

$d_{\max}=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$………………9 分

设ΔPAB的面积为S，则$S_{\max}=\frac{1}{2}\times|AB|\times(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……10 分

法二：也可设点P $(2\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数$f(x)=|2x+t|$，若$f(x)<1$的解集为$(-1,0)$.

（1）求t并解不等式$f(x)>x+2$；

（2）已知$a,b\in\mathrm{R}^+$，若$f(x)\ge 2a+b-|2x-2|$,对一切实数x都成立，求证：$a^2b\le 1$.

【解析】(1) 由$f(x)<1$可得：$-1<2x+t<1$，即$-\frac{t+1}{2}<x<\frac{1-t}{2}$

解集为（-1，0)，所以$t=1$ ……………………………………3 分

当$x\ge -\frac{1}{2}$时，不等式$f(x)>x+2$化成$2x+1>x+2$，解得：$x>1$

当$x<-\frac{1}{2}$时，不等式$f(x)>x+2$化成$-2x-1>x+2$，解得：$x<-1$

综上所述，解集为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$……………………………………5 分

（2） 由题意得$|2x+1|+|2x-2|\ge 2a+b$对一切实数x恒成立，

从而$2a+b\le(|2x+1|+|2x-2|)_{\min}$……………………………………6 分

$\because |2x+1|+|2x-2| \geq |(2x+1)-(2x-2)|=3$

$\therefore |2x+1|+|2x-2|$的最小值为 3 ……………………………………8 分

$\therefore 2a+b \leq 3$，又 $a,b \in R^{+}$

$\therefore a^{2}b \leq (\frac{a+a+b}{3})^{3} \leq 1$……………………………………10 分

22.【解析】（本小题满分 10 分）

直线l的极坐标方程$\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=1$化成$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，$\therefore$直线$l$的直角坐标方程为$x+y-1=0$……………2 分

曲线C的参数方程化成：$\begin{cases}\frac{x}{2}=\cos\alpha+\sin\alpha\\ y=\cos\alpha-\sin\alpha\end{cases}$,($\alpha$为参数）.

平方相加得$\frac{x^2}{4}+y^2=2$，即$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ ………………5 分

设点P $(2\cos\alpha+2\sin\alpha,\cos\alpha-\sin\alpha)$,则P到直线l的距离为：

$d=\frac{|3\cos\alpha+\sin\alpha-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{10}\sin(\alpha+\varphi)-1|}{\sqrt{2}}$ ………………8 分

$d_{\max}=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$………………9 分

设ΔPAB的面积为S，则$S_{\max}=\frac{1}{2}\times|AB|\times(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……10 分

法二：也可设点P $(2\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$

23.【解析】（本小题满分 10 分）

已知函数$f(x)=|2x+t|$，若$f(x)<1$的解集为$(-1,0)$.

（1）求t并解不等式$f(x)>x+2$；

（2）已知：$a,b\in R^{+}$，若$f(x)\geq 2a+b-|2x-2|$,对一切实数x都成立，求证：$a^2b\leq 1$.

解：（1）由$f(x)<1$可得：$-1<2x+t<1$，即$-\frac{t+1}{2}<x<\frac{1-t}{2}$

解集为（-1，0)，所以$t=1$ ………………………………………3 分

当$x\geq-\frac{1}{2}$时，不等式$f(x)>x+2$化成$2x+1>x+2$，解得：$x>1$

当$x<-\frac{1}{2}$时，不等式$f(x)>x+2$化成$-2x-1>x+2$，解得：$x<-1$

综上所述，解集为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ………………………………5 分

（3） 由题意得$|2x+1|+|2x-2|\geq 2a+b$对一切实数x恒成立，

从而$2a+b\le(|2x+1|+|2x-2|)_{\min}$ ······································6 分

$\because |2x+1|+|2x-2|\ge|(2x+1)-(2x-2)|=3$

$\therefore |2x+1|+|2x-2|$的最小值为 3 ······································8 分

$\therefore 2a+b\le3$，又$a,b\in R^{+}$

$\therefore a^{2}b\le(\dfrac{a+a+b}{3})^{3}\le1$ ······································10 分