

摘 要

在这篇文章中,我们首先介绍了一维自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换,接着介绍了一维自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换在一自旋链模型中的应用和一维自旋 $3/2$ Jordan-Wigner 变换。然后由一维推向二维,介绍了二维自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换。最后讨论了二维自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 在两种自旋模型中的应用。

第一章:首先介绍了用费米子表述的自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换,该变换将自旋模型转变为无自旋费米子模型,接着,基于无自旋费米子表象,我们讨论了自旋算符所遵循的统计关系。然后介绍了一维自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换在一维各向异性 XY 模型中的应用。

第二章:在自旋为 $3/2$ 的自旋算符和双费米子之间构建出了一种新的 Jordan-Wigner 变换。基于双费米子表象,我们讨论了自旋值为 $3/2$ 的自旋算符所遵循的统计关系。

第三章:在一维变换的基础上,分别讨论了 M.Azzouz 和 Y.R.Wang 关于自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换在二维中的延伸。

第四章:介绍了二维自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换在两种模型中的应用。首先详细讨论了各向同性 XY 模型中的 Jordan-Wigner 费米子平均场近似处理,然后单独给出了用费米子描述的考虑了易辛项在内的海森伯模型。

关键词:自旋算符, 一维, 二维, Jordan-Wigner 变换。

Abstract

In the thesis we firstly introduce one-dimensional spin $1/2$ Jordan-Wigner transformation. Then the application that one-dimensional spin $1/2$ Jordan-Wigner transformation is used for one spin chain model is displayed and one-dimensional spin $3/2$ Jordan-Wigner transformation is discussed. From one-dimensional to two-dimensional, we discuss two-dimensional spin $1/2$ Jordan-Wigner transformation. At last, two models in which two-dimensional spin $1/2$ Jordan-Wigner transformation have been applied are presented.

Chapter1: Firstly, one-dimensional spin $1/2$ Jordan-Wigner transformation that maps the spin operators into fermions is introduced, which maps spin model into spinless fermions model. Next, we discuss the statistical relations of spin operators by means of this mapping. Then the application that one-dimensional spin $1/2$ Jordan-Wigner transformation is used for one-dimensional anisotropic XY model is displayed.

Chapter2: New Jordan-Wigner-type transformation between spin $3/2$ and fermions of two type is shown. By using the double-fermion representation, we discuss the statistical relations of the $s = 3/2$ spin operator.

Chapter3: Based upon one-dimensional transformation, We discuss the extensions for two dimensions suggested by M. Azzouz and Y.R. Wang.

Chapter4: The application that two-dimensional spin $1/2$ Jordan-Wigner transformation are used for two spin chain models are displayed. Firstly, the mean-field-like treatment of the Jordan-Wigner fermions for the isotropic XY model is discussed in detail. Then the consideration of Heisenberg model with Ising term in fermionic language is given separately.

KeyWords: spin operator , one-dimensional, two-dimensional, Jordan-Wigner transformation.

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 **安徽大学** 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：**李长岭** 签字日期： 2006 年 4 月 25 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解**安徽大学**有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权**安徽大学**可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名：**李长岭**

导师签名：**娄平**

签字日期：2006 年 4 月 25 日

签字日期：2006 年 4 月 25 日

学位论文作者毕业去向：无

工作单位：无

电话：13856076959

通讯地址：安徽大学物理与材料科学学院 03 级研究生 邮编：230039

绪 论

变量变换的方法在众多物理问题的求解过程中，得到了广泛的应用。无论在经典力学还是在量子力学中这些变换都能进行，有时候它们的应用可以简化对所研究问题的分析。

人们经常通过相互作用的量子自旋来描述在磁体中各种不同种类的磁序状态（如铁磁序、反铁磁序以及铁淦氧磁序等）。然而量子自旋行为很怪异，它既不同于单纯的玻色子，也不同于单纯的费米子，因此，给人们对其的研究带来了诸多的不便。为了克服这些困难，人们开始考虑是否可以用其他形式来表述这一怪异的量子自旋行为，美国物理学家 P. Jordan 和 E. Wigner 在这方面率先得到了行之有效的变量变换方法即“Jordan-Wigner”变换。

关于变量变换，在量子多体理论中存在许多不同的变量变换，运用它们可以将量子自旋体系变换到粒子体系。其中最为人所熟知并且得到广泛应用的有玻色子变换和费米子变换两类。玻色子变换中有：适用于任意自旋 s 的“Holstein-Primakoff”玻色子变换^[1]，“Schwinger”玻色子表述，以及“Dyson-Maleev”玻色子表述。费米子变换中有：适合于自旋 $s = 1/2$ 磁体的“Jordan-Wigner”费米子变换以及费米子表述^[2]。玻色子变换是在玻色子的表象下描述自旋体系，可是自旋体系的相位空间是有限维的，而玻色子体系的相位空间是无限维的，因此给我们运用这一类变换方法带来了困难，我们必须考虑到用某些局域约束条件去固定或限制（例如“Holstein-Primakoff”玻色子变换中对自旋偏离量子数 n 的限制： $n \leq 2S$ ）所涉及粒子体系中的玻色子的数目。这一因素大大限制了玻色子变换方法的应用。

费米子变换则不同于玻色子变换，它在一维情况下处于相同格点的 $s = 1/2$ 的自旋算符和无自旋费米子算符之间建立了联系，即一维“Jordan-Wigner”变换。“Jordan-Wigner”变换是可逆的并且不需要任何限制，因而被广泛的应用。这种变换方法是研究量子自旋链的统计力学性质的手段之一（近年来，一些学者基于传统的热力学 Bethe 方案积分方程方法也可以用来研究自旋链的统计力学性质，结果证明两种方法的结果符合的相当好）。这种变换方法最早是在 1928 年被美国物理学家 P. Jordan 和 E. Wigner 所提出，并且在以后的时间多次被提及，

应用和发展。1961年到1963年,美国物理学家 E. Lieb, T. Schultz 和 D. Mattis 运用“Jordan-Wigner”变换先后将自旋算符变换为费米子算符^[3]、电子变换成为“硬核”(hard core)玻色子^[4]、“硬核”玻色子变换为费米子^[5]。从这些变换中人们发现,虽然“Jordan-Wigner”变换的形式比较复杂,但将它应用到若干模型中后,却带来了若干精确的求解结果。1961年, E. Lieb 等人对自旋 $1/2$ XY 链模型求解得到了较精确的解。1964年他们又运用“Jordan-Wigner”变换对二维易辛(Ising)模型的转换矩阵进行变换并得到了二维易辛(Ising)模型的热力学量的精确解^[6]。鉴于“Jordan-Wigner”变换在一维体系中的成功应用,近来人们又做了很多努力来总结二维^[7-17]和三维^[18,19]的费米化过程。首先是1989年,美国物理学家 Eduardo Fradkin 对于“spin - one - half”量子体系在二维格点上建立了“Jordan-Wigner”变换^[7];智利物理学家 Luis Huerta 和 Jorge Zanelli 于1993年建立了推广到三维(或更高维)的“Jordan-Wigner”变换^[18],当然这些变换都是围绕着自旋 $1/2$ 体系建立起来的。

由于自然界中自旋有可能非常大(原则上直到 $s = 15/2$ 的自旋都存在)^[20],因此仅满足于对自旋为 $1/2$ 的体系所取得的成功是不够的,应转向研究自旋大于 $1/2$ 的自旋体系。于是人们开始尝试在高自旋体系与费米子之间建立联系,构建一种新的没有玻色子表述之缺点的表述,来推广针对于高自旋的“Jordan-Wigner”变换。2001年,美国物理学家 C. D. Batista 和 G. Ortiz^[21]对于生成 SU(2) 群代数的任意自旋 s 引入一种全新的自旋-费米表述,虽然这种表述构建了自旋 $s = 1/2$ 的“Jordan-Wigner”变换的一种自然的推广结果。但在随后的2003年,俄罗斯物理学家 Stanislav V Dobrov^[22]发现这一结果中包含着严重的不一致并给以证明,对他们的公式给出了另外的解释,并在自旋 $s = 3/2$ 和双费米子之间明确地构造出了真正的“Jordan-Wigner”类型的变换,同时对自旋费米化的一般条件给以公式化。

针对于自旋为 $1/2$ 的自旋体系, 本文将主要讨论如何在一维和二维中运用“Jordan-Wigner”变换方法将自旋体系变换到无自旋费米子体系中去以及该变换方法分别在若干自旋模型中的应用, 同时简要讨论了自旋为 $3/2$ 的“Jordan-Wigner”变换。第一章将详细介绍运用“Jordan-Wigner”变换将一维自旋 $1/2$ 体系变换到无自旋费米子体系中去, 另外给出了该变换在一维各向异性XY模型中的应用。第二章简要讨论了自旋为 $3/2$ 的一维“Jordan-Wigner”变换; 在第三节里分别讨论了M.Azzouz和Y.R.Wang关于自旋 $1/2$ Jordan-Wigner变换在二维中延伸。第四章分别介绍了二维自旋 $1/2$ “Jordan-Wigner”变换在各向同性XY模型和海森伯模型中的应用。

第一章 一维自旋1/2 Jordan-Wigner 变换 及其应用

第一节 一维自旋1/2 Jordan-Wigner 变换

我们知道量子自旋的行为很怪异，它既不同于单纯的玻色子，也不同于单纯的费米子，因此给人们在研究这一课题时带来很多困难。但是，在一维情况下 $s=1/2$ 的单自旋的行为和费米子很类似。那么能否用费米子来描述量子自旋呢？

1928年，美国物理学家 P. Jordan 和 E. Wigner 发现，一个单独自旋向上或自旋向下的状态可以认为是一个被单个电子占据或空的、未被占据的费米子态。为此我们做如下描述：

$$|\uparrow\rangle \equiv c^+|0\rangle, \quad |\downarrow\rangle \equiv |0\rangle \quad (1.1.1)$$

c^+ 代表费米子产生算符，用 c 表示费米子消灭算符，它们遵循反对易关系：

$$\{c^+, c\} = 1, \quad \{c^+, c^+\} = \{c, c\} = 0 \quad (1.1.2)$$

自旋算符的三个分量 s^x 、 s^y 、 s^z ($\hbar=1$) 用泡利矩阵表示为：

$$s^x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad s^y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s^z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

很显然：

$$[s^x, s^y] = is^z, \quad [s^y, s^z] = is^x, \quad [s^z, s^x] = is^y \quad (1.1.4)$$

$$\{s^\alpha, s^\beta\} = \frac{1}{4} \{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (1.1.5)$$

这里我们引进两个互为厄密共轭的自旋上升算符 s^+ 和自旋下降算符 s^- ，表示为：

$$c^+ = s^+ = s^x + is^y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c = s^- = s^x - is^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

在这里:

$$\bar{s}^2 = (s^x)^2 + (s^y)^2 + (s^z)^2 \quad (1.1.7)$$

由对易关系式(1.1.4)可得:

$$[\bar{s}^2, s^\alpha] = 0, \quad (\alpha = x, y, z) \quad (1.1.8)$$

依据(1.1.6)式和(1.1.8)式, 我们得到:

$$[\bar{s}^2, s^+] = [\bar{s}^2, s^-] = 0 \quad (1.1.9)$$

用算符 s^+ , s^- , s^z 可以完全地确定矢量算符 \bar{s} , 且更便于代数变换。

由式(1.1.6)可以得到

$$\begin{aligned} s^x &= \frac{1}{2}(s^+ + s^-) = \frac{1}{2}(c^+ + c) \\ s^y &= \frac{1}{2i}(s^+ - s^-) = \frac{1}{2i}(c^+ - c) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

代入(1.1.4)式得到:

$$s^z = c^+c - \frac{1}{2} \quad (1.1.11)$$

这样自旋算符 s 的 X, Y, Z 的分量形式分别用费米子算符 c 和 c^+ 表示出来, 现在我们来看一下它们遵循的统计关系:

$$\begin{aligned} [s^+, s^-] &= [s^x + is^y, s^x - is^y] \\ &= [s^x, s^x] + i[s^y, s^x] - i[s^x, s^y] - [is^y, is^y] \\ &= -2i[s^x, s^y] \\ &= 2s^z \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

$$\begin{aligned} [s^z, s^+] &= [c^+c - \frac{1}{2}, c^+] \\ &= c^+cc^+ - \frac{1}{2}c^+ - c^+c^+c + \frac{1}{2}c^+ \\ &= c^+(1 - c^+)c \\ &= s^+ \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

同理可推得:

$$[s^z, s^-] = -s^- \quad (1.1.14)$$

同样它们遵循费米对易规则:

$$\{s^+, s^-\} = \{c^+, c\} = 1, \quad \{s^+, s^+\} = \{s^-, s^-\} = 0 \quad (1.1.15)$$

前面我们所讨论的是单自旋态, 当所讨论的问题是非单自旋时, 就要对这种表述进行修改。因为相互独立的自旋算符对易, 而相互独立的费米子算符却反对易, 解决这一问题办法是给算符乘上一个称为“弦算符”的相位因子。

如图(1)所示, 对于一维情况下的自旋链, 定义处在格点 n 上的自旋算符为:

$$s_n^+ = c_n^+ e^{i\phi_n} \quad (1.1.16)$$

$$s_n^- = e^{-i\phi_n} c_n \quad (1.1.17)$$

相位算符 ϕ_n 为包含所有的小于格点 n 的费米子占据态之和:

$$\phi_n = \pi \sum_{j < n} \hat{n}_j \quad (1.1.18)$$

其中 $\hat{n}_j = c_j^+ c_j$ 为无自旋费米子的粒子数算符且:

$$\begin{aligned} \hat{n}_j^2 &= c_j^+ c_j c_j^+ c_j \\ &= c_j^+ (1 - c_j^+ c_j) c_j \\ &= c_j^+ c_j \\ &= \hat{n}_j \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

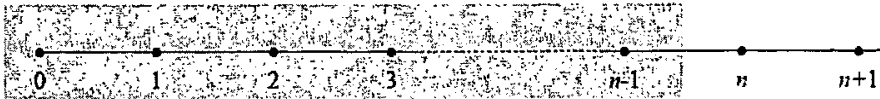


图1. 一维 Jordan-Wigner 变换

FIG.1. Towards the Jordan-Wigner transformation in one dimension

这样对于多自旋的完备的 Jordan-Wigner 变换被定义为:

$$s_n^+ = c_n^+ \exp(i\pi \sum_{j < n} c_j^+ c_j)$$

$$s_n^- = \exp(-i\pi \sum_{j<n} c_j^+ c_j) c_n$$

$$s_n^z = c_n^+ c_n - \frac{1}{2} \quad (1.1.20)$$

处在格点 n 上的无自旋费米子的产生和湮灭算符 c_n^+ 与 c_n 满足反对易关系:

$$\{c_n, c_l^+\} = \delta_{nl}, \quad \{c_n, c_l\} = \{c_n^+, c_l^+\} = 0. \quad (1.1.21)$$

由 (1.1.20) 式可以得到:

$$s_n^+ s_n^- = c_n^+ e^{i\phi_n} e^{-i\phi_n} c_n = c_n^+ c_n \quad (1.1.22)$$

这样得到 Jordan-Wigner 变换的逆变换式为:

$$c_n^+ = s_n^+ \exp(-i\pi \sum_{j<n} s_j^+ s_j^-)$$

$$c_n = \exp(i\pi \sum_{j<n} s_j^+ s_j^-) s_n^- \quad (1.1.23)$$

我们先证明用来简化算符 c_n^+ 、 c_n 和弦算符之间计算的下面的等式

$$e^{\pm i\pi \hat{n}} = 1 - 2\hat{n} \quad (1.1.24)$$

证明:

$$\begin{aligned} e^{\pm i\pi \hat{n}} &= \sum_n \frac{1}{n!} (\pm i\pi \hat{n})^n \\ &= 1 \pm i\pi \hat{n} - \frac{1}{2!} \pi^2 \hat{n}^2 \mp \frac{1}{3!} i\pi^3 \hat{n}^3 + \frac{1}{4!} \pi^4 \hat{n}^4 \pm \frac{1}{5!} i\pi^5 \hat{n}^5 - \dots \\ &= 1 \pm i\pi \hat{n} - \frac{1}{2!} \pi^2 \hat{n} \mp \frac{1}{3!} i\pi^3 \hat{n} + \frac{1}{4!} \pi^4 \hat{n} \pm \frac{1}{5!} i\pi^5 \hat{n} - \dots \\ &= \hat{n} - \hat{n} + 1 \pm i\pi \hat{n} - \frac{1}{2!} \pi^2 \hat{n} \mp \frac{1}{3!} i\pi^3 \hat{n} + \frac{1}{4!} \pi^4 \hat{n} \pm \frac{1}{5!} i\pi^5 \hat{n} - \dots \\ &= (\hat{n} - \frac{1}{2!} \pi^2 \hat{n} + \frac{1}{4!} \pi^4 - \dots) \pm (i\pi \hat{n} - \frac{1}{3!} i\pi^3 \hat{n} + \frac{1}{5!} i\pi^5 \hat{n} - \dots) - \hat{n} + 1 \\ &= \hat{n} (1 - \frac{1}{2!} \pi^2 + \frac{1}{4!} \pi^4 - \dots) \pm i\hat{n} (\pi - \frac{1}{3!} \pi^3 + \frac{1}{5!} \pi^5 - \dots) - \hat{n} + 1 \\ &= \hat{n} \cos \pi \pm i\hat{n} \sin \pi - \hat{n} + 1 \\ &= 1 - 2\hat{n} \end{aligned}$$

另外:

$$e^{2i\pi c_j^+ c_j} = (1 - 2\hat{n}_j)(1 - 2\hat{n}_j)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - 4\hat{n}_j + 4\hat{n}_j^2 \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

接下来，我们利用上面等式，再来证明相同格点上的费米子产生或湮没算符与 $e^{\pm i\hat{m}_n}$ 的关系：

$$\begin{aligned}
 \{e^{\pm i\hat{m}_n}, c_n^+\} &= (1 - 2\hat{n})c_n^+ + c_n^+(1 - 2\hat{n}) \\
 &= c_n^+ - 2c_n^+c_n c_n^+ + c_n^+ - 2c_n^+c_n^+c_n \\
 &= 2c_n^+ - 2c_n^+(c_n c_n^+ + c_n^+c_n) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

$$\begin{aligned}
 \{e^{\pm i\hat{m}_n}, c_n\} &= 2c_n - 2(c_n^+c_n + c_n c_n^+)c_n \\
 &= 2c_n - 2\delta_{nn}c_n \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

由上两式，可以发现：“在相同格点上的费米子产生或湮没算符与 $e^{\pm i\hat{m}_n}$ 均为反对易关系。”

由于 $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \dots, \hat{n}_{n-1}$ 彼此间相互对易，因此有：

$$\begin{aligned}
 e^{\pm i\phi_n} &= e^{\pm i\pi \sum_{j=1}^n \hat{n}_j} \\
 &= e^{\pm i\pi \hat{n}_1} e^{\pm i\pi \hat{n}_2} \dots e^{\pm i\pi \hat{n}_{n-1}} \\
 &= (1 - 2\hat{n}_1) (1 - 2\hat{n}_2) \dots (1 - 2\hat{n}_{n-1})
 \end{aligned} \tag{1.1.28}$$

现在我们来证明“弦算符” $e^{\pm i\phi_n}$ 与费米子产生或湮没算符之间的统计关系：

(1) 当 $m \geq n$ 时，

$$\begin{aligned}
 &[e^{\pm i\phi_n}, c_m] \\
 &= (1 - 2\hat{n}_1) (1 - 2\hat{n}_2) \dots (1 - 2\hat{n}_{n-1}) c_m - c_m (1 - 2\hat{n}_1) (1 - 2\hat{n}_2) \dots (1 - 2\hat{n}_{n-1}) \\
 &= (1 - 2\hat{n}_1) (1 - 2\hat{n}_2) \dots (c_m - 2c_{n-1}^+ c_{n-1} c_m) - c_m (1 - 2\hat{n}_1) (1 - 2\hat{n}_2) \dots (1 - 2\hat{n}_{n-1})
 \end{aligned}$$

由反对易关系：

$$\{c_{n-1}, c_m\} = 0 \Rightarrow c_{n-1} c_m = -c_m c_{n-1}$$

$$\{c_{n-1}^+, c_m\} = \delta_{n-1,m} = 0 \Rightarrow c_{n-1}^+ c_m = -c_m c_{n-1}^+$$

可推出:

$$c_m - 2c_{n-1}^+ c_{n-1} c_m = c_m - 2c_m c_{n-1}^+ c_{n-1} = c_m (1 - 2c_{n-1}^+ c_{n-1})$$

所以, $e^{\pm i\phi_n}$ 与费米子湮灭算符 c_m 的对易关系为:

$$\begin{aligned} & \left[e^{\pm i\phi_n}, c_m \right] \\ &= (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots c_m (1-2c_{n-1}^+ c_{n-1}) - c_m (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots (1-2\hat{n}_{n-1}) \\ &= c_m (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots (1-2c_{n-1}^+ c_{n-1}) - c_m (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots (1-2\hat{n}_{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

同理可推得:

$$\left[e^{\pm i\phi_n}, c_m^+ \right] = 0 \quad (1.1.30)$$

(2) 当 $m < n$ 时,

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{\pm i\phi_n}, c_m \right\} \\ &= (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots (1-2\hat{n}_{n-1})c_m + c_m (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots (1-2\hat{n}_{n-1}) \quad (\#) \end{aligned}$$

由于:

$$(1-2\hat{n}_{n-1})c_m = c_m - 2c_{n-1}^+ c_{n-1} c_m = c_m - c_m 2c_{n-1}^+ c_{n-1} = c_m (1-2c_{n-1}^+ c_{n-1})$$

所以 (#) 式 “+” 前面一部分变为:

$$(1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots (1-2\hat{n}_m)c_m \cdots (1-2\hat{n}_{n-1})$$

又由于:

$$c_m (1-2\hat{n}_1) = c_m - 2c_m c_1^+ c_1 = c_m - 2c_1^+ c_1 c_m = (1-2c_1^+ c_1)c_m$$

所以 (#) 式 “+” 后面一部分可变为:

$$(1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots c_m (1-2\hat{n}_m)\cdots (1-2\hat{n}_{n-1})$$

所以可得到:

$$\begin{aligned} \left\{ e^{\pm i\phi_n}, c_m \right\} &= (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots (1-2\hat{n}_m)c_m \cdots (1-2\hat{n}_{n-1}) \\ &+ (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots c_m (1-2\hat{n}_m)\cdots (1-2\hat{n}_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)\cdots\cdots[(1-2\hat{n}_m)c_m+c_m(1-2\hat{n}_m)]\cdots\cdots(1-2\hat{n}_{n-1}) \\
 &= 0 \tag{1.1.31}
 \end{aligned}$$

上式中:

$$\begin{aligned}
 (1-2\hat{n}_m)c_m+c_m(1-2\hat{n}_m) &= 2c_m-2(c_m^+c_m+c_m c_m^+)c_m \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

同理可以得到:

$$\{e^{\pm i\theta_k}, c_m^+\} = 0 \tag{1.1.32}$$

现在我们来推导多自旋情况下自旋算符 s_j^+, s_j^- 所遵循的统计关系, 看一下它们是否同单自旋情况下的统计关系相吻合, 是否满足“相互独立的自旋算符彼此对易”?

$$(1) \quad [s_j^+, s_k^+] = [c_j^+ e^{i\theta_j}, c_k^+ e^{i\theta_k}]$$

(1) 若 $j > k$, 则:

$$\begin{aligned}
 [s_j^+, s_k^+] &= c_k^+ [c_j^+ e^{i\theta_j}, e^{i\theta_k}] + [c_j^+ e^{i\theta_j}, c_k^+] e^{i\theta_k} \\
 &= c_k^+ c_j^+ [e^{i\theta_j}, e^{i\theta_k}] + c_k^+ [c_j^+, e^{i\theta_k}] e^{i\theta_j} + c_j^+ [e^{i\theta_j}, c_k^+] e^{i\theta_k} - [c_j^+, c_k^+] e^{i\theta_j} e^{i\theta_k} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(2) 若 $j < k$, 则:

$$\begin{aligned}
 [s_j^+, s_k^+] &= c_j^+ [e^{i\theta_j}, c_k^+ e^{i\theta_k}] + [c_j^+, c_k^+ e^{i\theta_k}] e^{i\theta_j} \\
 &= c_j^+ c_k^+ [e^{i\theta_j}, e^{i\theta_k}] + c_j^+ [e^{i\theta_j}, c_k^+] e^{i\theta_k} - c_k^+ [c_j^+, e^{i\theta_k}] e^{i\theta_j} + [c_j^+, c_k^+] e^{i\theta_k} e^{i\theta_j} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(3) 若 $j = k$, 则:

$$[s_j^+, s_k^+] = [s_k^+, s_k^+] = 0$$

所以:

$$[s_j^+, s_k^+] = 0 \tag{1.1.33}$$

同理:

$$[s_j^-, s_k^-] = 0 \tag{1.1.34}$$

$$(II) \quad [s_j^+, s_k^-] = [c_j^+ e^{i\phi_j}, e^{-i\phi_k} c_k] \\ = [c_j^+ e^{i\phi_j}, c_k e^{-i\phi_k}]$$

(1) 若 $j > k$, 则:

$$[s_j^+, s_k^-] = c_k^+ [c_j^+ e^{i\phi_j}, e^{-i\phi_k}] + [c_j^+ e^{i\phi_j}, c_k^+] e^{-i\phi_k} \\ = c_k c_j^+ [e^{i\phi_j}, e^{-i\phi_k}] + c_k [c_j^+, e^{-i\phi_k}] e^{i\phi_j} + c_j^+ \{e^{i\phi_j}, c_k\} e^{-i\phi_k} - \{c_j^+, c_k\} e^{i\phi_j} e^{-i\phi_k} \\ = 0$$

(2) 若 $j < k$, 则:

$$[s_j^+, s_k^-] = c_j^+ [e^{i\phi_j}, c_k e^{-i\phi_k}] + [c_j^+, c_k e^{-i\phi_k}] e^{i\phi_j} \\ = c_j^+ c_k [e^{i\phi_j}, e^{-i\phi_k}] + c_j^+ [e^{i\phi_j}, c_k] e^{-i\phi_k} - c_k \{e^{-i\phi_k}, c_j^+\} e^{i\phi_j} + \{c_k, c_j^+\} e^{-i\phi_k} e^{i\phi_j} \\ = 0$$

(3) 若 $j = k$, 则:

$$[s_j^+, s_j^-] = c_j^+ e^{i\phi_j} e^{-i\phi_j} c_j - e^{-i\phi_j} c_j c_j^+ e^{i\phi_j} \\ = c_j^+ c_j - c_j c_j^+ e^{-i\phi_j} e^{i\phi_j} \\ = 2s_j^z$$

所以:

$$[s_j^+, s_k^-] = 0 \quad (j \neq k); \quad (1.1.35)$$

$$[s_j^+, s_j^-] = 2s_j^z. \quad (1.1.36)$$

$$(III) \quad [s_j^z, s_k^+] = s_j^z s_k^+ - s_k^+ s_j^z \\ = (c_j^+ c_j - \frac{1}{2}) c_k^+ e^{i\phi_k} - c_k^+ e^{i\phi_k} (c_j^+ c_j - \frac{1}{2}) \\ = c_j^+ c_j c_k^+ e^{i\phi_k} - c_k^+ e^{i\phi_k} c_j^+ c_j$$

(1) 如果 $j \neq k$, 则:

$$[s_j^z, s_k^+] = c_j^+ c_j c_k^+ e^{i\phi_k} - c_k^+ c_j^+ c_j e^{i\phi_k}$$

$$\begin{aligned}
 &= c_j^+ c_j c_k^+ e^{i\theta_k} - c_j^+ c_j c_k^+ e^{i\theta_k} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(2) 如果 $j = k$, 则:

$$\begin{aligned}
 [s_j^z, s_j^+] &= c_j^+ c_j c_j^+ e^{i\theta_j} - c_j^+ e^{i\theta_j} c_j^+ c_j \\
 &= c_j^+ (1 - c_j^+ c_j) e^{i\theta_j} - e^{i\theta_j} c_j^+ c_j^+ c_j \\
 &= c_j^+ e^{i\theta_j} \\
 &= s_j^+
 \end{aligned}$$

所以:

$$[s_j^z, s_k^+] = 0 \quad (j \neq k); \quad (1.1.37)$$

$$[s_j^z, s_j^+] = s_j^+. \quad (1.1.38)$$

同理可以推得:

$$[s_j^z, s_j^-] = 0 \quad (j \neq k); \quad (1.1.39)$$

$$[s_j^z, s_j^-] = -s_j^-. \quad (1.1.40)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(IV)} \quad \{s_j^+, s_j^-\} &= s_j^+ s_j^- + s_j^- s_j^+ \\
 &= c_j^+ e^{i\theta_j} e^{-i\theta_j} c_j + e^{-i\theta_j} c_j c_j^+ e^{i\theta_j} \\
 &= 1
 \end{aligned} \quad (1.1.41)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(V)} \quad (s_j^+)^2 &= c_j^+ e^{i\theta_j} c_j^+ e^{i\theta_j} \\
 &= c_j^+ c_j^+ e^{i\theta_j} e^{i\theta_j} \\
 &= 0
 \end{aligned} \quad (1.1.42)$$

同理:

$$(s_j^-)^2 = 0. \quad (1.1.43)$$

这样由 Jordan-Wigner 变换所导出的多自旋情况下的自旋算符 s_j^+, s_j^- 所遵循的统计关系同单自旋情况下的统计关系相吻合, 同样满足“相互独立的自旋算符彼此对易”的原则。在其统计关系中, 它既具有玻色性又具有费米性:

(1) 玻色性:

$$\begin{aligned} [s_j^+, s_k^-] &= 0 \quad (j \neq k); \\ [s_j^+, s_k^+] &= 0, \quad [s_j^-, s_k^-] = 0. \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

(2) 费米性:

$$\{s_j^+, s_j^-\} = 1, \quad (s_j^+)^2 = (s_j^-)^2 = 0; \quad (1.1.45)$$

(3) 其他关系:

$$\begin{aligned} [s_j^z, s_k^\pm] &= 0, \quad (j \neq k); \\ [s_j^+, s_j^-] &= 2s_j^z, \quad [s_j^z, s_j^\pm] = \pm s_j^\pm. \end{aligned} \quad (1.1.46)$$

这样应用 Jordan-Wigner 变换, 我们可以将一维自旋 $s = 1/2$ 的量子自旋链模型转变到无自旋费米子的表象下, 避免了量子自旋算符既有玻色性又有费米性给研究问题带来的不便, 给以后对这一问题的研究开辟了一个崭新有效的途径。

第二节 一维自旋 1/2 Jordan-Wigner 变换在各向异性 XY 模型中的应用

在上一节里我们讨论了一维自旋 1/2 “Jordan-Wigner” 变换，即用无自旋费米子算符来描述量子自旋算符，“弦算符” 在中间起到很大作用。接着我们讨论了自旋算符遵循的统计关系，我们发现运用 “Jordan-Wigner” 变换将量子自旋算符变换到无自旋费米子表象下后使得我们对其统计关系的推导变得相当简单，这体现了 “Jordan-Wigner” 变换的优越性。在这一节里我们将举一个 “Jordan-Wigner” 变换具体应用的实例，即一维自旋 1/2 “Jordan-Wigner” 变换在各向异性 XY 模型中的应用。

自旋为 1/2 的一维各向异性 XY 模型的哈密顿量是：

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{n=1}^N \left[(1 + \gamma) s_n^x s_{n+1}^x + (1 - \gamma) s_n^y s_{n+1}^y \right] \\
 &= \sum_{n=1}^N \left[(s_n^x s_{n+1}^x + s_n^y s_{n+1}^y) + \gamma (s_n^x s_{n+1}^x - s_n^y s_{n+1}^y) \right] \quad (1.2.1)
 \end{aligned}$$

这里， N 趋向于无穷大， s_n 是处在格点 n 的自旋算符， γ 是描述各向异性模型的参数。自旋表象下的该模型的自旋算符既有玻色性又有费米性，束缚了对该模型的进一步求解，现在我们运用 “Jordan-Wigner” 变换的方法将其变换到无自旋费米子的表象下。

我们知道：

$$\begin{aligned}
 s_n^x s_{n+1}^x &= \frac{1}{4} (s_n^+ + s_n^-) (s_{n+1}^+ + s_{n+1}^-) \\
 &= \frac{1}{4} (s_n^+ s_{n+1}^+ + s_n^+ s_{n+1}^- + s_n^- s_{n+1}^+ + s_n^- s_{n+1}^-) \quad (1.2.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_n^y s_{n+1}^y &= -\frac{1}{4} (s_n^+ - s_n^-) (s_{n+1}^+ - s_{n+1}^-) \\
 &= -\frac{1}{4} (s_n^+ s_{n+1}^+ - s_n^+ s_{n+1}^- - s_n^- s_{n+1}^+ + s_n^- s_{n+1}^-) \quad (1.2.3)
 \end{aligned}$$

其中：

$$s_n^x = \frac{1}{2} (s_n^+ + s_n^-), \quad s_{n+1}^x = \frac{1}{2} (s_{n+1}^+ + s_{n+1}^-)$$

$$s_n^y = \frac{1}{2i} (s_n^+ - s_n^-), \quad s_{n+1}^y = \frac{1}{2i} (s_{n+1}^+ - s_{n+1}^-) \quad (1.2.4)$$

由式 (1.2.2)、(1.2.3) 可以得到:

$$s_n^x s_{n+1}^x + s_n^y s_{n+1}^y = \frac{1}{2} (s_n^+ s_{n+1}^- + s_n^- s_{n+1}^+) = \frac{1}{2} (s_n^+ s_{n+1}^- + s_{n+1}^+ s_n^-) \quad (1.2.5)$$

$$s_n^x s_{n+1}^x - s_n^y s_{n+1}^y = \frac{1}{2} (s_n^+ s_{n+1}^+ + s_n^- s_{n+1}^-) = \frac{1}{2} (s_n^+ s_{n+1}^+ + s_{n+1}^- s_n^-) \quad (1.2.6)$$

显然:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [(s_n^+ s_{n+1}^- + s_{n+1}^+ s_n^-) + \gamma (s_n^+ s_{n+1}^+ + s_{n+1}^- s_n^-)] \quad (1.2.7)$$

由第一节一维情况下的自旋为 1/2 的 Jordan-Wigner 变换 (1.1.20) 重新写为:

$$\begin{aligned} s_n^+ &= c_n^+ \exp(i\pi \sum_{l < n} c_l^+ c_l) \\ s_n^- &= c_n \exp(-i\pi \sum_{l < n} c_l^+ c_l) \\ s_n^z &= c_n^+ c_n - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

在上边的式子中, c_n^+ 和 c_n 分别是处在格点位置 n 上的无自旋费米子的产生和湮灭算符。进行如下计算:

$$\begin{aligned} s_n^+ s_{n+1}^+ &= c_n^+ e^{i\pi \sum_{l < n} c_l^+ c_l} c_{n+1}^+ e^{i\pi \sum_{l < n+1} c_l^+ c_l} \\ &= c_n^+ e^{i\pi \sum_{l < n} c_l^+ c_l} e^{i\pi \sum_{l < n+1} c_l^+ c_l} c_{n+1}^+ \\ &= c_n^+ e^{i\pi n} c_{n+1}^+ \\ &= c_n^+ (1 - 2c_n^+ c_n) c_{n+1}^+ \\ &= c_n^+ c_{n+1}^+ \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

同理有:

$$s_{n+1}^- s_n^- = c_{n+1} c_n \quad (1.2.10)$$

以及:

$$\begin{aligned} s_n^+ s_{n+1}^- &= c_n^+ e^{i\pi \sum_{l < n} c_l^+ c_l} c_{n+1}^- e^{-i\pi \sum_{l < n+1} c_l^+ c_l} \\ &= c_n^+ e^{i\pi \sum_{l < n} c_l^+ c_l} e^{-i\pi \sum_{l < n+1} c_l^+ c_l} c_{n+1}^- \\ &= c_n^+ e^{-i\pi n} c_{n+1}^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= c_n^+ (1 - 2c_n^+ c_n) c_{n+1} \\
 &= c_n^+ c_{n+1}
 \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

同理:

$$s_{n+1}^+ s_n^- = c_{n+1}^+ c_n \tag{1.2.12}$$

将式 (1.2.9)、(1.2.10)、(1.2.11)、(1.2.12) 带入式 (1.2.7) 可得到无自旋费米子表象下的一维各向异性 XY 模型的哈密顿量:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [(c_n^+ c_{n+1} + c_{n+1}^+ c_n) + \gamma (c_n^+ c_{n+1}^+ + c_{n+1} c_n)] \tag{1.2.13}$$

现在我们发现原本在自旋表象下的一维各向异性 XY 模型的哈密顿量在 Jordan-Wigner 变换下变成了用无自旋费米子表述的形式。接下来我们会发现用纯费米性无自旋费米子表述的该模型的哈密顿量在对其热力学量的求解变的相对容易。

引入如下变换:

$$c_n^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikn} c_k^+, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} c_k \tag{1.2.14}$$

代入式 (2.1.13), 可得到波矢空间的哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 H_k = \sum_k [\cos k c_k^+ c_k + \frac{\gamma}{2} (\cos k + i \sin k) c_k^+ c_{-k}^+ \\
 + \frac{\gamma}{2} (\cos k - i \sin k) c_{-k} c_k]
 \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

我们运用格林函数运动方程法来求解该模型的准粒子能谱, 频率表象中的格林函数运动方程式:

$$\hbar\omega \ll A; B \gg (\omega) = \hbar \langle [A, B]_{\pm} \rangle + \ll [A, H]_{\pm}; B \gg (\omega) \tag{1.2.16}$$

在上式中, $[A, B]_{\pm}$ 下标中的正号对应于费米子系统, 负号对应于玻色子系统。取 $A = c_k$, $B = c_k^+$, 代入 (1.2.16), 由于 c_k 和 c_k^+ 为费米子算符, 因此 $[A, B]$ 的下标取“+”, 于是我们得到下述方程:

$$\hbar\omega \ll c_k; c_k^+ \gg (\omega) = \hbar \langle [c_k, c_k^+]_{+} \rangle + \ll [c_k, H_k]_{+}; c_k^+ \gg (\omega) \tag{1.2.17}$$

利用费米子算符的反对易关系:

$$[c_k, c_k^+]_{\pm} = \delta_{kk} \quad (1.2.18)$$

以及:

$$[c_k, H_k] = \cos kc_k + i\gamma \sin kc_{-k}^+ \quad (1.2.19)$$

代入式 (1.2.17), 得到:

$$(\hbar\omega - \cos k) \langle\langle c_k; c_k^+ \rangle\rangle(\omega) = \hbar\delta_{kk} + i\gamma \sin k \langle\langle c_{-k}^+; c_k^+ \rangle\rangle(\omega) \quad (1.2.20)$$

上式中出现了奇异格林函数 $\langle\langle c_{-k}^+; c_k^+ \rangle\rangle(\omega)$ 。

接下来, 我们来求奇异格林函数 $\langle\langle c_{-k}^+; c_k^+ \rangle\rangle(\omega)$ 所满足的运动方程。同上我们取 $A = c_{-k}^+$, $B = c_k^+$, 代入 (1.2.16) 式可得:

$$\hbar\omega \langle\langle c_{-k}^+; c_k^+ \rangle\rangle(\omega) = \hbar \langle [c_{-k}^+, c_k^+]_{\pm} \rangle + \langle\langle [c_{-k}^+, H_k] c_k^+ \rangle\rangle(\omega) \quad (1.2.21)$$

利用费米子算符的反对易关系:

$$[c_{-k}^+, c_k^+]_{\pm} = 0 \quad (1.2.22)$$

以及:

$$[c_{-k}^+, H_k] = -\cos kc_{-k}^+ - i\gamma \sin kc_k \quad (1.2.23)$$

代入式 (1.2.21), 得到:

$$(\hbar\omega + \cos k) \langle\langle c_{-k}^+; c_k^+ \rangle\rangle(\omega) = -i\gamma \sin k \langle\langle c_k; c_k^+ \rangle\rangle(\omega) \quad (1.2.24)$$

联立式 (1.2.20) 和 (1.2.24) 式我们可求得单粒子格林函数:

$$\begin{aligned} G_{kk}(\omega) &= \langle\langle c_k; c_k^+ \rangle\rangle(\omega) \\ &= \hbar\delta_{kk} \frac{\hbar\omega + \cos k}{\hbar^2\omega^2 - \cos^2 k - \gamma^2 \sin^2 k} \\ &= \frac{1}{2} \hbar\delta_{kk} \left(\frac{1 + \frac{\cos k}{\sqrt{\cos^2 k + \gamma^2 \sin^2 k}}}{\hbar\omega - \sqrt{\cos^2 k + \gamma^2 \sin^2 k}} + \frac{1 - \frac{\cos k}{\sqrt{\cos^2 k + \gamma^2 \sin^2 k}}}{\hbar\omega + \sqrt{\cos^2 k + \gamma^2 \sin^2 k}} \right) \quad (1.2.25) \end{aligned}$$

从上式中, 我们能清晰地看出格林函数 $G_{kk}(\omega)$ 存在两个极点, 它们分别对应着该模型的两支准粒子能谱:

$$E(k) = \pm \sqrt{\cos^2 k + \gamma \sin^2 k} \quad (1.2.26)$$

在运用 Jordan-Wigner 变换将一维各向异性 XY 模型的哈密顿量变换成用无自旋费米子表述的形式后, 对其的求解除了可以采取上面格林函数运动方程法之外还可以利用 Bogoliubov-Valatin 变换法, 求得的结果与用格林函数运动方程法求得的结果是一样的, 在此略过。

第二章 一维自旋 3/2 Jordan-Wigner 变换

在第一章里我们详细讨论了一维自旋为 1/2 的“Jordan-Wigner”变换，将其应用到各向异性 XY 模型求出了该模型的准粒子能谱。在这一章里我们将简要讨论一下自旋为 3/2 的“Jordan-Wigner”变换。文献[22]中讲到，对于自旋值 $s > 0$ 的自旋体系的费米化（不管有无限制）所需要的费米子的最少数量必须遵守以下规则：

$$2^{n-1} < 2s + 1 \leq 2^n \quad (2.1)$$

从上式中，能看出对于自旋值 $s > 1$ 的自旋体系费米化所需费米子的最少数量明显少于文献[22]中 Batista 和 Ortiz 所用到的 $2s$ 个。这样，对于自旋值 $s > 1$ 的自旋体系，就能用相比于文献中更少的费米子来构造更为简单的自旋-费米变换。而且，对于某些自旋，这些变换将是无约束的 Jordan-Wigner 类型的变换。

从 (2.1) 式能够看出，当自旋值 $s = 3/2$ 时， $n = 2$ 才能满足不等式的要求。因此，要将自旋值为 3/2 的自旋体系变换到无自旋费米子表象下，必须在自旋算符与双费米子之间构建。

首先我们考虑单个自旋的情况，然后再将其所得的解推广到多自旋的情况。我们知道，无论自旋值为多少，自旋角动量分量算符 s^x ， s^y 和 s^z 总满足对易关系 ($\hbar = 1$):

$$[s^x, s^y] = i s^z, \quad [s^y, s^z] = i s^x, \quad [s^z, s^x] = i s^y \quad (2.2)$$

对于自旋升降算符 $s^\pm = s^x \pm i s^y$ ，它们之间满足以下统计关系：

$$[s^+, s^-] = 2 s^z, \quad [s^z, s^\pm] = \pm s^\pm, \quad (2.3)$$

$$\{s^+, s^-\} = 2 s (s + 1) - 2 (s^z)^2 \quad (2.4)$$

这里我们发现 (2.4) 式与第一章针对于自旋 $s = 1/2$ 的 (1.1.45) 中第一式形式不同，其实 (2.4) 是针对于所有自旋值的通式，当 $s = 1/2$ 时我们发现：

$$\begin{aligned}
 (s^z)^2 &= \frac{1}{4} [s^+, s^-]^2 \\
 &= \frac{1}{4} (s^+ s^- s^+ s^- - s^+ s^- s^- s^+ - s^- s^+ s^+ s^- + s^- s^+ s^- s^+) \\
 &= \frac{1}{4} [(1 - s^- s^+) s^+ s^- + (1 - s^+ s^-) s^- s^+] \\
 &= \frac{1}{4} (s^+ s^- + s^- s^+) \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

将 (2.5) 式代入 (2.4) 得 (s 取 $3/2$):

$$\{s^+, s^-\} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \tag{2.6}$$

显然式 (2.6) 就是式 (1.1.45) 中的第一式。当然在这一章里我们讨论的是 $s = 3/2$ 的情况。同样我们引进费米子算符 $c_{1,2}^+$ 和 $c_{1,2}$, 满足以下反对易规则:

$$\{c_\alpha, c_\beta\} = 0, \{c_\alpha^+, c_\beta^+\} = 0, \{c_\alpha, c_\beta^+\} = \delta_{\alpha\beta}, (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{2.7}$$

且无自旋费米子的粒子数算符为 $n_\alpha = c_\alpha^+ c_\alpha$ 。

自旋态空间的基矢由 $|-3/2\rangle, |-1/2\rangle, |1/2\rangle$ 和 $|3/2\rangle$ 四个矢量组成, 这些基矢也是算符的本征矢量, 而双费米子的相位空间也是四维的, 其基矢为: $|0\rangle, |1\rangle = c_1^+ |0\rangle, |2\rangle = c_2^+ |0\rangle, |1,2\rangle = c_2^+ c_1^+ |0\rangle$ 。现在我们将在自旋算符与作用在费米子空间的算符之间建立联系。

由量子力学可知, 这些算符的矩阵表示为:

$$s^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s^z = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

且:

$$s^- = (s^+)^+ = (s^+)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

又:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

且 $c_{1,2}^+ = (c_{1,2})^+ = (c_{1,2})^T$ ，很明显：

$$\begin{aligned} s^+ &= \sqrt{3}c_2^+ + 2c_1^+c_2 \\ s^- &= \sqrt{3}c_2 + 2c_2^+c_1 \\ s^z &= -\frac{3}{2} + 2n_1 + n_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

由上(2.11)可推得：

$$\begin{aligned} [s^z, s^+] &= \left(-\frac{3}{2} + 2n_1 + n_2\right)(\sqrt{3}c_2^+ + 2c_1^+c_2) - (\sqrt{3}c_2^+ + 2c_1^+c_2)\left(-\frac{3}{2} + 2n_1 + n_2\right) \\ &= 2\sqrt{3}c_1^+c_1c_2^+ + 4c_1^+c_1c_1^+c_2 + \sqrt{3}c_2^+c_2c_2^+ + 2c_2^+c_2c_1^+c_2 \\ &\quad - 2\sqrt{3}c_2^+c_1^+c_1 - \sqrt{3}c_2^+c_2^+c_2 - 4c_1^+c_2c_1^+c_1 - 2c_1^+c_2c_2^+c_2 \\ &= 4(1 - c_1c_1^+)c_1^+c_2 + \sqrt{3}(1 - c_2c_2^+)c_2^+ - 2c_1^+(1 - c_2^+c_2)c_2 \\ &= 4c_1^+c_2 + \sqrt{3}c_2^+ - 2c_1^+c_2 \\ &= \sqrt{3}c_2^+ + 2c_1^+c_2 \\ &= s^+ \end{aligned} \quad (2.12)$$

同理：

$$[s^z, s^-] = -s^- \quad (2.13)$$

又：

$$\begin{aligned} [s^+, s^-] &= (\sqrt{3}c_2^+ + 2c_1^+c_2)(\sqrt{3}c_2 + 2c_2^+c_1) - (\sqrt{3}c_2 + 2c_2^+c_1)(\sqrt{3}c_2^+ + 2c_1^+c_2) \\ &= 3c_2^+c_2 + 4c_1^+c_2c_2^+c_1 - 3c_2c_2^+ - 4c_2^+c_1c_1^+c_2 \\ &= 3n_2 + 4n_1(1 - n_2) - 3(1 - n_2) - 4n_2(1 - n_1) \\ &= -3 + 4n_1 + 2n_2 \\ &= 2s^z \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
 \{s^+, s^-\} &= (\sqrt{3}c_2^+ + 2c_1^+c_2) (\sqrt{3}c_2 + 2c_2^+c_1) + (\sqrt{3}c_2 + 2c_2^+c_1) (\sqrt{3}c_2^+ + 2c_1^+c_2) \\
 &= 3c_2^+c_2 + 4c_1^+c_2c_2^+c_1 + 3c_2c_2^+ + 4c_2^+c_1c_1^+c_2 \\
 &= 3 + 4n_1(1 - n_2) + 4n_2(1 - n_1) \\
 &= 3 + 4n_1 + 4n_2 - 8n_1n_2
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

因为 $s = 3/2$ ，所以有：

$$\begin{aligned}
 2s(s+1) - 2(s^z)^2 &= \frac{15}{2} - 2\left(-\frac{3}{2} + 2n_1 + n_2\right) \left(-\frac{3}{2} + 2n_1 + n_2\right) \\
 &= \frac{15}{2} - 2\left(\frac{9}{4} - 2n_1 - 2n_2 + 4n_1n_2\right) \\
 &= 3 + 4n_1 + 4n_2 - 8n_1n_2
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

由式 (2.15) 和 (2.16) 即得：

$$\{s^+, s^-\} = 2s(s+1) - 2(s^z)^2 \tag{2.17}$$

很显然，依据 (2.11) 所推导出来的单自旋情况下算符所遵循的统计关系 (2.12)、(2.13)、(2.14)、(2.16) 完全吻合于 (2.3) 和 (2.4) 两式。

对于多个自旋的问题，要涉及到作用在不同格点上的所有自旋算符之间的对易关系，为此我们引进弦算符 u_i ，对于一维格点情况，弦算符：

$$\begin{aligned}
 u_i &= \exp\left\{i\pi \sum_{j<i} (n_{1j} + n_{2j})\right\} \\
 &= \exp[i\pi(n_{11} + n_{21})] \exp[i\pi(n_{12} + n_{22})] \cdots \exp[i\pi(n_{1,i-1} + n_{2,i-1})] \\
 &= \exp(i\pi n_{11}) \exp(i\pi n_{21}) \exp(i\pi n_{12}) \exp(i\pi n_{22}) \cdots \exp(i\pi n_{1,i-1}) \exp(i\pi n_{2,i-1}) \\
 &= (1 - 2n_{11}) (1 - 2n_{21}) (1 - 2n_{12}) (1 - 2n_{22}) \cdots (1 - 2n_{1,i-1}) (1 - 2n_{2,i-1})
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

同理有：

$$\begin{aligned}
 u_i^+ &= \exp\left\{-i\pi \sum_{j<i} (n_{1j} + n_{2j})\right\} \\
 &= (1 - 2n_{11}) (1 - 2n_{21}) (1 - 2n_{12}) (1 - 2n_{22}) \cdots (1 - 2n_{1,i-1}) (1 - 2n_{2,i-1})
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

由上面两式可以得到：

$$[u_i, n_{2i}] = 0, [u_i, c_{2i}] = 0, [u_i^+, c_{2i}^+] = 0 \tag{2.20}$$

引进弦算符后式 (2.11) 前两式写为:

$$\begin{aligned} s_i^- &= \sqrt{3}c_{2i}u_i + 2c_{2i}^+c_{1i} \\ s_i^+ &= \sqrt{3}u_i^+c_{2i}^+ + 2c_{1i}^+c_{2i} \end{aligned} \quad (2.21)$$

将 (2.21) 代入 (2.14) 得:

$$\begin{aligned} s_i^z &= \frac{1}{2}[s_i^+, s_i^-] \\ &= \frac{1}{2}[(\sqrt{3}u_i^+c_{2i}^+ + 2c_{1i}^+c_{2i})(\sqrt{3}c_{2i}u_i + 2c_{2i}^+c_{1i}) \\ &\quad - (\sqrt{3}c_{2i}u_i + 2c_{2i}^+c_{1i})(\sqrt{3}u_i^+c_{2i}^+ + 2c_{1i}^+c_{2i})] \\ &= -\frac{3}{2} + 2n_{1i} + n_{2i} \end{aligned} \quad (2.22)$$

同样我们再来推导一下它们所遵循的统计关系:

$$\begin{aligned} [s_i^z, s_i^+] &= (-\frac{3}{2} + 2n_{1i} + n_{2i})(\sqrt{3}u_i^+c_{2i}^+ + 2c_{1i}^+c_{2i}) \\ &\quad - (\sqrt{3}u_i^+c_{2i}^+ + 2c_{1i}^+c_{2i})(-\frac{3}{2} + 2n_{1i} + n_{2i}) \\ &= 2\sqrt{3}n_{1i}u_i^+c_{2i}^+ + \sqrt{3}n_{2i}u_i^+c_{2i}^+ - 2\sqrt{3}u_i^+c_{2i}^+n_{1i} + 2c_{1i}^+c_{2i} \\ &= s_i^+ \end{aligned} \quad (2.23)$$

同理:

$$[s_i^z, s_i^-] = -s_i^- \quad (2.24)$$

又:

$$\begin{aligned} \{s_i^+, s_i^-\} &= (\sqrt{3}u_i^+c_{2i}^+ + 2c_{1i}^+c_{2i})(\sqrt{3}c_{2i}u_i + 2c_{2i}^+c_{1i}) \\ &\quad + (\sqrt{3}c_{2i}u_i + 2c_{2i}^+c_{1i})(\sqrt{3}u_i^+c_{2i}^+ + 2c_{1i}^+c_{2i}) \\ &= 3 + 4n_{1i} + 4n_{2i} - 8n_{1i}n_{2i} \\ &= 3 + 4n_{1i} + 4n_{2i} - 8n_{1i}n_{2i} \\ &= 2s(s+1) - 2(s_i^z)^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

显然, 与前所述相同, 依据多自旋情况下的定义式 (2.21) 所导出的上述统计关系同样吻合于式 (2.3) 中的统计关系。

众所周知, 相互独立的自旋算符相互对易, 下面我们来看一下由定义式 (2.21)

所导出的多自旋情况下不同格点的自旋算符之间的统计关系是否同样满足这一规律?

$$\begin{aligned}
 [s_i^+, s_j^-]_{i \neq j} &= (\sqrt{3} u_i^+ c_{2i}^+ + 2 c_{1i}^+ c_{2i}) (\sqrt{3} c_{2j} u_j + 2 c_{2j}^+ c_{1j}) \\
 &\quad - (\sqrt{3} c_{2j} u_j + 2 c_{2j}^+ c_{1j}) (\sqrt{3} u_i^+ c_{2i}^+ + 2 c_{1i}^+ c_{2i}) \\
 &= 3 u_i^+ c_{2i}^+ c_{2j} u_j + 2\sqrt{3} u_i^+ c_{2i}^+ c_{2j}^+ c_{1j} + 2\sqrt{3} c_{1i}^+ c_{2i} c_{2j} u_j \\
 &\quad - 3 c_{2j} u_j u_i^+ c_{2i}^+ - 2\sqrt{3} c_{2j} u_j c_{1i}^+ c_{2i} - 2\sqrt{3} c_{2j}^+ c_{1j} u_i^+ c_{2i}^+
 \end{aligned}$$

(1) 如果 $i > j$, 则: $\{u_i^+, c_{2j}\} = 0$, $\{u_i^+, c_{1j}\} = 0$, $[u_j^+, c_{2i}^+] = 0$, $[u_j^+, c_{1i}^+] = 0$

$$\begin{aligned}
 [s_i^+, s_j^-]_{i > j} &= -3 c_{2i}^+ c_{2j} u_i^+ u_j + 2\sqrt{3} c_{2i}^+ c_{2j}^+ c_{1j} u_i^+ + 2\sqrt{3} c_{1i}^+ c_{2i} c_{2j} u_j \\
 &\quad - 3 c_{2j} c_{2i}^+ u_j u_i^+ - 2\sqrt{3} c_{2j} c_{1i}^+ c_{2i} u_j - 2\sqrt{3} c_{2j}^+ c_{1j} c_{2i}^+ u_i^+ \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(2) 如果 $i < j$, 则: $[u_i^+, c_{2j}] = 0$, $[u_i^+, c_{1j}] = 0$, $\{u_j, c_{2i}^+\} = 0$, $\{u_j, c_{1i}^+\} = 0$

$$\begin{aligned}
 [s_i^+, s_j^-]_{i < j} &= 3 c_{2i}^+ c_{2j} u_i^+ u_j + 2\sqrt{3} c_{2i}^+ c_{2j}^+ c_{1j} u_i^+ + 2\sqrt{3} c_{1i}^+ c_{2i} c_{2j} u_j \\
 &\quad + 3 c_{2j} c_{2i}^+ u_j u_i^+ - 2\sqrt{3} c_{2j} c_{1i}^+ c_{2i} u_j - 2\sqrt{3} c_{2j}^+ c_{1j} c_{2i}^+ u_i^+ \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

由此得到:

$$[s_i^+, s_j^-]_{i \neq j} = 0 \quad (2.26)$$

同理推得:

$$\begin{aligned}
 [s_i^+, s_j^+]_{i \neq j} &= 0 \\
 [s_i^-, s_j^-]_{i \neq j} &= 0
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

以及:

$$\begin{aligned}
 [s_i^-, s_j^+]_{i \neq j} &= 0 \\
 [s_i^z, s_j^z]_{i \neq j} &= 0
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

看来, 由定义式 (2.21) 所导出的多自旋情况下不同格点的自旋算符之间的统计关系是吻合于“相互独立的自旋算符相互对易”这条规律的。

但是, 对于 $(s_i^+)^2$, 通过计算:

$$\begin{aligned}
 (s_i^+)^2 &= (\sqrt{3} u_i^+ c_{2i}^+ + 2 c_{1i}^+ c_{2i}) (\sqrt{3} u_i^+ c_{2i}^+ + 2 c_{1i}^+ c_{2i}) \\
 &= 3 u_i^+ c_{2i}^+ u_i^+ c_{2i}^+ + 2\sqrt{3} u_i^+ c_{2i}^+ c_{1i}^+ c_{2i} + 2\sqrt{3} c_{1i}^+ c_{2i} u_i^+ c_{2i}^+ \\
 &= 2\sqrt{3} u_i^+ c_{1i}^+ (1 - 2n_{2i}) \\
 &\neq 0
 \end{aligned}$$

即 $(s_i^+)^2 \neq 0$, 同理 $(s_i^-)^2 \neq 0$ 。对比于自旋为 1/2 的一维 Jordan-Wigner 变换中 $(s_i^\pm)^2 = 0$ 这一点是不同的。

由上所述, 通过推导自旋为 3/2 的一维 Jordan-Wigner 变换, 我们得到了自旋算符之间的对易关系:

$$\begin{aligned}
 [s_i^+, s_j^-] &= 2s_i^- \delta_{ij}, \quad [s_i^-, s_j^+] = \pm s_i^+ \delta_{ij}, \quad \{s_i^+, s_i^-\} = 2s(s+1) - 2(s_i^\pm)^2 \\
 [s_i^+, s_j^+] &= 0, \quad [s_i^-, s_j^-] = 0, \quad [s_i^+, s_j^+] = 0
 \end{aligned} \quad (2.29)$$

下面, 我们用与得到多自旋情况下的 Jordan-Wigner 变换定义式 (2.21) 类似的方法, 从单格点费米子算符着手, 并对多格点情况引入适当的“弦算符”, 可以得到式 (2.21) 的逆变换:

$$\begin{aligned}
 c_{1i} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} s_i^- s_i^+ s_i^- w_i, \quad c_{1i}^+ = -\frac{1}{\sqrt{3}} w_i^+ s_i^+ s_i^+ s_i^+ \\
 c_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + s_i^+\right)^2 s_i^- w_i, \quad c_{2i}^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} w_i^+ s_i^+ \left(\frac{1}{2} + s_i^+\right)^2
 \end{aligned} \quad (2.30)$$

对于单格点情况, 式 (2.30) 满足式 (2.4) 中的所有的统计关系, 对于作用在不同格点上的费米子算符 c 而言, “弦算符” w_i 确保了它们之间遵循反对易关系。一维格点情况下 $w_i = \prod_{j<i} x_j$, 我们可以根据要确保式 (2.30) 中各费米子算符遵循反对易关系这一要求来确定 x_j 的形式, 假设 x_j 有以下形式:

$$x_j = 1 + \alpha s_j^z + \beta (s_j^z)^2 + \gamma (s_j^z)^3 \quad (2.31)$$

且:

$$[x_j, c_{aj}] = 0 \quad (2.32)$$

由式 $s_j^z = -\frac{3}{2} + 2n_{1j} + n_{2j}$ 我们推想 x_j 的形式为:

$$x_j = E + Fn_{1j} + Gn_{2j} + Hn_{1j}n_{2j} \quad (2.33)$$

将 s_j^z 带入式 (2.33) 对照 (2.31) 式我们推出:

$$\begin{aligned} E &= 1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{9}{4}\beta - \frac{27}{8}\gamma, \quad F = 2\alpha - 2\beta + \frac{7}{2}\gamma \\ G &= \alpha - 2\beta + \frac{5}{4}\gamma, \quad H = 4\beta \end{aligned} \quad (2.34)$$

将式 (2.33) 带入 (2.32) 式可得到:

$$(E + Fn_{1j} + Gn_{2j} + Hn_{1j}n_{2j})c_{aj} + c_{aj}(E + Fn_{1j} + Gn_{2j} + Hn_{1j}n_{2j}) = 0 \quad (2.35)$$

(1) 取 $a=1$, 则 (2.35) 式可化为:

$$(2E + F)c_{1j} + (2G + H)c_{1j}n_{2j} = 0$$

则: $2E + F = 0, 2G + H = 0$, 联立 (2.34) 可以解得:

$$\alpha = -\frac{5}{4}\gamma, \beta = \frac{4}{5}(\gamma - 1) \quad (2.36)$$

(2) 取 $a=2$, 则式 (2.35) 可化为:

$$(2E + G)c_{2j} + (2F + H)c_{2j}n_{1j} = 0$$

则: $2E + G = 0, 2F + H = 0$, 联立 (2.34) 可以解得:

$$\alpha = -\frac{7}{4}\gamma, \beta = \frac{4}{5}(\gamma - 1) \quad (2.37)$$

要得到统一解我们选取 $\gamma = 0$ 得:

$$\alpha = \gamma = 0, \beta = -\frac{4}{5} \quad (2.38)$$

所以得到 x_j 的具体形式:

$$x_j = 1 - \frac{4}{5}(s_j^z)^2 \quad (2.39)$$

对其进行规范化, 得到 x_j 的最终形式:

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{5}{4} \times \left[1 - \frac{4}{5}(s_j^z)^2 \right] \\ &= \frac{5}{4} - (s_j^z)^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

将式 (2.38) 代入 (2.34) 求得:

$$E = -\frac{4}{5}, F = \frac{8}{5}, G = \frac{8}{5}, H = -\frac{16}{5} \quad (2.41)$$

代入 (2.33) 并进行规范化得到:

$$x_j^+ = -1 + 2n_{1j} + 2n_{2j} - 4n_{1j}n_{2j} \quad (2.42)$$

所以有:

$$x_j^+ = \left[\frac{5}{4} - (s_j^z)^2 \right]^+ = (-1 + 2n_{1j} + 2n_{2j} - 4n_{1j}n_{2j})^+ = x_j \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} (x_j)^2 &= \left[\frac{5}{4} - (s_j^z)^2 \right] \left[\frac{5}{4} - (s_j^z)^2 \right] \\ &= (-1 + 2n_{1j} + 2n_{2j} - 4n_{1j}n_{2j}) (-1 + 2n_{1j} + 2n_{2j} - 4n_{1j}n_{2j}) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

现在我们选取一自旋为3/2的自旋链模型, 运用 Jordan-Wigner 变换将其变换到无自旋双费米子表象下。各向同性自旋为3/2的XY链模型的哈密顿量为:

$$H = J \sum_i (s_i^x s_{i+1}^x + s_i^y s_{i+1}^y) \quad (2.45)$$

见第一章 (1.2.5) 式得:

$$s_i^x s_{i+1}^x + s_i^y s_{i+1}^y = \frac{1}{2} (s_i^+ s_{i+1}^- + s_i^- s_{i+1}^+) \quad (2.46)$$

将 (2.21) 代入上式计算得:

$$\begin{aligned} s_i^x s_{i+1}^x + s_i^y s_{i+1}^y &= \frac{1}{2} (\sqrt{3}u_i^+ c_{2i}^+ + 2c_{1i}^+ c_{2i}) (\sqrt{3}c_{2,i+1} u_{i+1} + 2c_{2,i+1}^+ c_{1,i+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sqrt{3}c_{2i} u_i + 2c_{2i}^+ c_{1i}) (\sqrt{3}u_{i+1}^+ c_{2,i+1}^+ + 2c_{1,i+1}^+ c_{2,i+1}) \\ &= \frac{1}{2} (3c_{2i}^+ e^{i\pi(n_i+n_{2i})} c_{2,i+1} + 2\sqrt{3}u_i^+ c_{2i}^+ c_{2,i+1}^+ c_{1,i+1} \\ &\quad + 2\sqrt{3}u_i c_{1i}^+ c_{2i} c_{2,i+1} e^{i\pi(n_i+n_{2i})} + 4c_{2,i+1}^+ c_{1,i+1}^+ c_{1i}^+ c_{2i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (3c_{2i} e^{-i\pi(n_i+n_{2i})} c_{2,i+1}^+ + 2\sqrt{3}u_i c_{2i} c_{1,i+1}^+ c_{2,i+1} \\ &\quad + 2\sqrt{3}u_i^+ c_{2i}^+ c_{1i} e^{-i\pi(n_i+n_{2i})} c_{2,i+1}^+ + 4c_{2i}^+ c_{1i} c_{1,i+1}^+ c_{2,i+1}) \\ &= \frac{1}{2} [3c_{2i}^+ (1 - 2n_{1i}) + 2\sqrt{3}u_i (c_{1,i+1}^+ c_{2,i+1}^+ c_{2i} - c_{1i}^+ c_{2i} c_{2,i+1}) \\ &\quad + 4c_{2,i+1}^+ c_{1,i+1}^+ c_{1i}^+ c_{2i} + h.c.] \end{aligned} \quad (2.47)$$

将式 (2.47) 代入 (2.45) 得:

$$\begin{aligned}
 H = \frac{1}{2} J \sum_i & \left[3c_{2i}^+ (1 - 2n_{1i}) c_{2,i+1} + 2\sqrt{3} u_i (c_{1,i+1}^+ c_{2,i+1} c_{2i} - c_{1i}^+ c_{2i} c_{2,i+1}) \right. \\
 & \left. + 4c_{2,i+1}^+ c_{1,i+1} c_{1i}^+ c_{2i} + h.c. \right] \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

由上我们发现, 运用自旋 Jordan-Wigner 变换可以把自旋表象下的各向同性 XY 链模型变换到无自旋双费米子的表象下, 但与上一章单费米子表象下的各向异性 XY 链模型相比, 双费米子表象下的各向同性 XY 链模型中不但包含着多项费米子的相互作用项, 而且引入的弦算符使得这些相互作用变得更加复杂, 很难像求解一维各向异性 XY 链模型那样来对该表象下的模型进行求解, 因此还需要很多努力来对该变换进行研究与探索。

我们知道自然界中, 自旋有可能会非常大 (原则上直到 $S = 15/2$ 的自旋都存在), 只有自旋值满足以下等式的自旋算符:

$$2s + 1 = 2^n \quad n \in N \quad (2.49)$$

才能用费米子来表述 (无限制)。绝大部分的自旋都不满足条件等式 (2.49), 因此它们的自旋算符不能用费米子来表述 (不限制)。根据式 (2.49), 下一个适合费米化的是自旋值为 $7/2$, 需要用 3 种费米子来描述, 紧接着的是自旋值为 $15/2$, 需要用 4 种费米子来描述。当然从前面第一章里我们已经知道对于自旋值为 $1/2$ 的也同样满足式 (2.49), 这时候 $n = 1$, 这就是我们通常所接触的一维自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换。

第三章 二维自旋1/2 Jordan-Wigner 变换

前面我们分别讨论了一维自旋为1/2的“Jordan-Wigner”变换和自旋为3/2的“Jordan-Wigner”变换，在一维情况下运用“Jordan-Wigner”变换把自旋为1/2的自旋体系变换到无自旋费米子表象下，给我们对其热力学量的求解带来了方便。而针对自旋为3/2的自旋体系，须在自旋算符与双费米子之间构建，虽然也可以把自旋体系变换到无自旋费米子表象下，但从变换的结果我们发现它包含着更加复杂的相互作用项，使得对其的求解同样很麻烦，因此还需要对其进行进一步的研究。本章我们将从一维转向二维，针对二维情况下自旋为1/2的自旋体系如何运用“Jordan-Wigner”变换将二维自旋体系变换到费米子表象下。在这里我们将讨论两种“Jordan-Wigner”变换。

(I) 二维 Jordan-Wigner 变换 (M.AZZOUZ,1993) [8-11]

回顾一维情况下自旋为1/2的“Jordan-Wigner”变换：

$$s_n^+ = c_n^+ e^{i\phi_n}, \quad s_n^- = e^{-i\phi_n} c_n$$

$$\phi_n = \pi \sum_{j=0}^{n-1} n_j, \quad n_j = c_j^+ c_j \quad (3.1)$$

逆变换：

$$c_n^+ = e^{-i\phi_n} s_n^+, \quad c_n = s_n^- e^{i\phi_n} \quad (3.2)$$

其中 c_n^+ 和 c_n 为费米子算符。

在二维情况下如图 (2) 所示的正方格：在 x, y 轴上，两坐标 i, j 分别指明了给定的位置，相比于 (3.1) 式，M.AZZOUZ 定义了扩展的“Jordan-Wigner”变换：

$$s_{i,j}^+ = c_{i,j}^+ e^{i\phi_{i,j}} = e^{i\phi_{i,j}} c_{i,j}^+$$

$$s_{i,j}^- = c_{i,j} e^{-i\phi_{i,j}} = e^{-i\phi_{i,j}} c_{i,j}$$

$$\phi_{i,j} = \pi \left(\sum_{d=0}^{i-1} \sum_{f=0}^{\infty} n_{d,f} + \sum_{f=0}^{j-1} n_{i,f} \right), \quad n_{d,f} = c_{d,f}^{\dagger} c_{d,f} \quad (3.3)$$

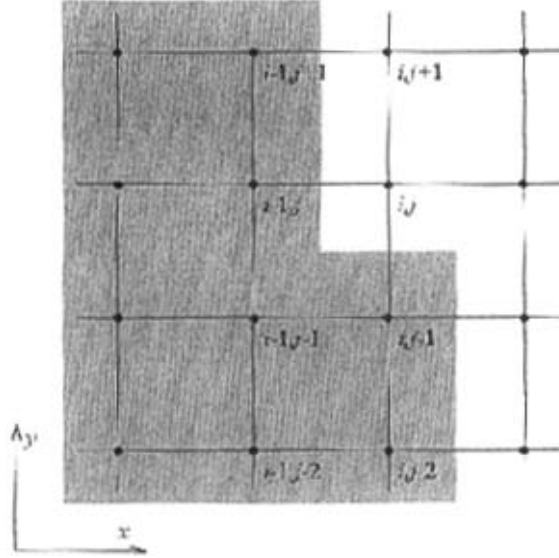


图2. 二维 Jordan-Wigner 变换

FIG2. Towards the Jordan-Wigner transformation in two dimension

引入的费米子算符 $c_{i,j}^{\dagger}$, $c_{i,j}$ 无论在相同位置或不同位置都遵循费米对易规则, (3.3) 式中的符号及该式中第一行中相乘的顺序都不重要, 在引进了该变换式以后我们构建了二维自旋 $-\frac{1}{2}$ 模型的费米变换。现在来看一下变换后的自旋算符的对易情况, 相同位置处:

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{q,p}} e^{-i\phi_{q,p}} &= 1 \\ e^{2i\phi_{q,p}} &= 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

所以:

$$\begin{aligned} \{s_{q,p}^+, s_{q,p}^-\} &= c_{q,p}^+ e^{i\phi_{q,p}} e^{-i\phi_{q,p}} c_{q,p} - c_{q,p} e^{-i\phi_{q,p}} e^{i\phi_{q,p}} c_{q,p}^+ \\ &= c_{q,p}^+ c_{q,p} + c_{q,p} c_{q,p}^+ \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

同理:

$$\begin{aligned} \{s_{q,p}^+, s_{q,p}^+\} &= 0 \\ \{s_{q,p}^+, s_{q,p}^-\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

由此我们看出在相同位置处自旋算符的费米型对易规则保持不变, 在不同位置的情况下, 比如考虑 q, p 和 $q, p+m$ ($m > 0$) 这两个位置, 有:

$$\begin{aligned} e^{-i\theta_{q,p}} e^{i\theta_{q,p+m}} &= e^{i\pi \sum_{f=p}^{p+m-1} n_{q,f}} \\ e^{i\theta_{q,p}} e^{i\theta_{q,p+m}} &= e^{i\pi \sum_{f=p}^{p+m-1} n_{q,f}} \\ e^{-i\theta_{q,p}} e^{-i\theta_{q,p+m}} &= e^{-i\pi \sum_{f=p}^{p+m-1} n_{q,f}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

所以有:

$$\begin{aligned} [s_{q,p}^-, s_{q,p+m}^+] &= c_{q,p} e^{i\pi \sum_{f=p}^{p+m-1} n_{q,f}} c_{q,p+m}^+ - c_{q,p+m}^+ e^{i\pi \sum_{f=p}^{p+m-1} n_{q,f}} c_{q,p} \\ &= c_{q,p} c_{q,p+m}^+ e^{i\pi \sum_{f=p}^{p+m-1} n_{q,f}} + c_{q,p+m}^+ c_{q,p} e^{i\pi \sum_{f=p}^{p+m-1} n_{q,f}} \\ &= (c_{q,p} c_{q,p+m}^+ - c_{q,p} c_{q,p+m}^+) e^{i\pi \sum_{f=p}^{p+m-1} n_{q,f}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

同理:

$$\begin{aligned} [s_{q,p}^+, s_{q,p+m}^+] &= 0 \\ [s_{q,p}^-, s_{q,p+m}^-] &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

此为自旋算符的玻色性。

在构建了二维自旋为 1/2 的“Jordan-Wigner”变换后, 我们接下来看一下如何运用“Jordan-Wigner”变换将自旋为 1/2 自旋模型变换到费米子表象下。在正方格 $L_x L_y$ ($L_x \rightarrow \infty, L_y \rightarrow \infty$) 上自旋为 1/2 的自旋模型的海森伯哈密顿量为:

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} J s_i \cdot s_j + \sum_i h s_i^z \quad (3.10)$$

$\langle i, j \rangle$ 在这里表示正方格上所有不同的近邻位置, J 表示相邻点间的交换作用, h 表示外场。各向同性海森伯作用由各向同性 XY 部分和易辛部分组成:

$$s_i \cdot s_j = (s_i^x s_j^x + s_i^y s_j^y) + s_i^z s_j^z$$

$$= \frac{1}{2} (s_i^+ s_j^- + s_i^- s_j^+) + (s_i^+ s_i^- - \frac{1}{2}) (s_j^+ s_j^- - \frac{1}{2}) \quad (3.11)$$

上式代入 (3.10) 分别得到:

$$H_{xy} = \frac{1}{2} J \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i^+ s_j^- + s_i^- s_j^+)$$

$$H_z = \frac{1}{2} J \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i^+ s_i^- - \frac{1}{2}) (s_j^+ s_j^- - \frac{1}{2})$$

$$H_f = \sum_i h (s_i^+ s_i^- - \frac{1}{2}) \quad (3.12)$$

进一步考虑自旋哈密顿量的变换, 接下来我们处理比等式 (3.1) 更为普遍的相邻点间相互作用, 也就是如图 (3) 所示, 我们假设在正方格上不同方向上相互作用不同。为了检验在准一维系统中链间相互作用的影响, 我们需要考虑 $J_{\perp}, J'_{\perp} \ll J, J'$ 这一情况 (假若二聚链被考虑在内, 则 $J \neq J'$)。如果, $J'_{\perp} \ll J, J', J_{\perp}$ 我们就有一相互作用二阶梯度的模型, 在 $J'_{\perp} = 0$ (无相互作用的二阶梯度模型) 的极限情况下, 这个模型可以简化为一个相互作用超出相邻格点间作用的一维系统。

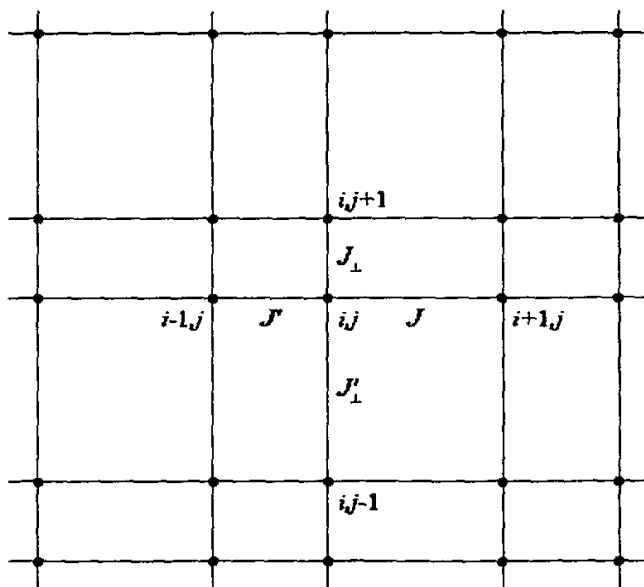


图3. 正方格上相邻点间相互作用

FIG.3. Nearest neighbour interactions on a square lattice

于是 (3.10) 写为:

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} J (s_{i,j} \cdot s_{i+1,j} + s_{i,j} \cdot s_{i,j+1}) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h s_{i,j}^z \quad (3.13)$$

类似于 (3.11) 式, 我们可以分别求出 H_{XY} 、 H_Z 、 H_f :

$$H_{XY} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (J_{i,j,i+1,j} (s_{i,j}^- s_{i+1,j}^+ + s_{i,j}^+ s_{i+1,j}^-) + J_{i,j,i,j+1} (s_{i,j}^- s_{i,j+1}^+ + s_{i,j}^+ s_{i,j+1}^-)) \quad (3.14)$$

$$H_Z = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (J_{i,j,i+1,j} (s_{i,j}^+ s_{i,j}^- - \frac{1}{2}) (s_{i+1,j}^+ s_{i+1,j}^- - \frac{1}{2}) + J_{i,j,i,j+1} (s_{i,j}^+ s_{i,j}^- - \frac{1}{2}) (s_{i,j+1}^+ s_{i,j+1}^- - \frac{1}{2})) \quad (3.15)$$

$$H_f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h (s_{i,j}^+ s_{i,j}^- - \frac{1}{2}) \quad (3.16)$$

$$H = H_{XY} + H_Z + H_f \quad (3.17)$$

运用“Jordan-Wigner”变换对上述三部分进行费米化, 易辛相互作用与带有外场的相互作用相应很简单:

$$H_Z = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (J_{i,j,i+1,j} (c_{i,j}^+ c_{i,j} - \frac{1}{2}) (c_{i+1,j}^+ c_{i+1,j} - \frac{1}{2}) + J_{i,j,i,j+1} (c_{i,j}^+ c_{i,j} - \frac{1}{2}) (c_{i,j+1}^+ c_{i,j+1} - \frac{1}{2})) \quad (3.18)$$

$$H_f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h (c_{i,j}^+ c_{i,j} - \frac{1}{2}). \quad (3.19)$$

对于各项同性 XY 部分, 如图 (4) 所示, 进行费米化得:

$$\begin{aligned} H_{XY} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (J_{i,j,i+1,j} (s_{i,j}^- s_{i+1,j}^+ + s_{i,j}^+ s_{i+1,j}^-) + J_{i,j,i,j+1} (s_{i,j}^- s_{i,j+1}^+ + s_{i,j}^+ s_{i,j+1}^-)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (J_{i,j,i+1,j} (c_{i,j} e^{-i\pi(\sum_{f=j}^{\infty} n_{i,f} + \sum_{f=0}^{j-1} n_{i+1,f})} c_{i+1,j}^+ + c_{i,j}^+ e^{i\pi(\sum_{f=j}^{\infty} n_{i,f} + \sum_{f=0}^{j-1} n_{i+1,f})} c_{i+1,j}) \\ &\quad + J_{i,j,i,j+1} (c_{i,j} e^{-im_{i,j}} c_{i,j+1}^+ + c_{i,j}^+ e^{-im_{i,j}} c_{i,j+1})) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (J_{i,j,i+1,j} (-c_{i,j} e^{-i\pi(\sum_{f=j+1}^{\infty} n_{i,j} + \sum_{f=0}^{j-1} n_{i+1,f})} c_{i+1,j}^+ + c_{i,j}^+ e^{i\pi(\sum_{f=j+1}^{\infty} n_{i,j} + \sum_{f=0}^{j-1} n_{i+1,f})} c_{i+1,j}) \\ &\quad + J_{i,j,i,j+1} (-c_{i,j} c_{i,j+1}^+ + c_{i,j}^+ c_{i,j+1})) \end{aligned} \quad (3.20)$$

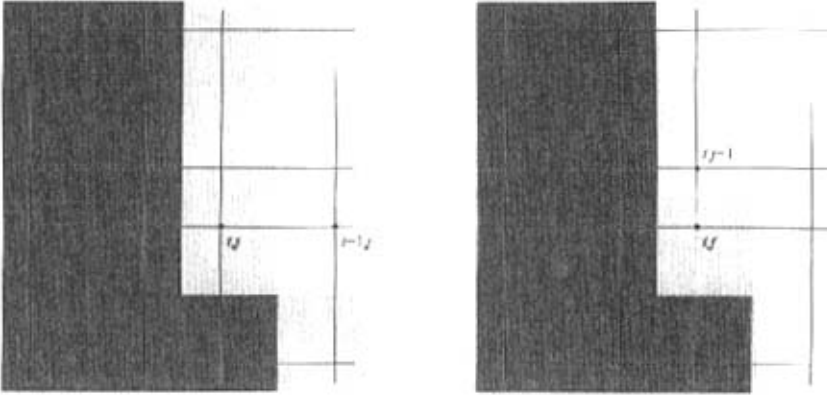


图4. 对各项同性 XY 部分的费米化

 FIG.4. Towards the fermionization of H_{XY}

接下来我们引用下面的符号来简化上式:

$$\begin{aligned}\phi_{i,j+1}(j) &= \pi \left(\sum_{f=j}^{\infty} n_{i,f} + \sum_{f=0}^{j-1} n_{i+1,f} \right) \\ \tilde{\phi}_{i,j+1}(j) &= \pi \left(\sum_{f=j+1}^{\infty} n_{i,f} + \sum_{f=0}^{j-1} n_{i+1,f} \right) \\ \varphi_{i,j+1}(i) &= \pi n_{i,j}\end{aligned}\quad (3.21)$$

于是, 哈密顿量 (3.18) 式变成下述形式:

$$\begin{aligned}H_{XY} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(J_{i,j,i+1,j} (c_{i,j} e^{-i\phi_{i,j+1}(j)} c_{i+1,j}^+ + c_{i,j}^+ e^{i\phi_{i,j+1}(j)} c_{i+1,j}) \right. \\ &\quad \left. + J_{i,j,i,i+1} (c_{i,j} e^{-i\varphi_{i,j+1}(i)} c_{i,j+1}^+ + c_{i,j}^+ e^{i\varphi_{i,j+1}(i)} c_{i,j+1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(J_{i,j,i+1,j} (-c_{i,j} e^{-i\tilde{\phi}_{i,j+1}(j)} c_{i+1,j}^+ + c_{i,j}^+ e^{i\tilde{\phi}_{i,j+1}(j)} c_{i+1,j}) \right. \\ &\quad \left. + J_{i,j,i,i+1} (-c_{i,j} c_{i,j+1}^+ + c_{i,j}^+ c_{i,j+1}) \right).\end{aligned}\quad (3.22)$$

式 (3.22) 可以看作是二维紧束缚似的无自旋费米子哈密顿量, 哈密顿量在 x 方向上的跃迁振幅为:

$$\mp \frac{1}{2} J_{i,j,i+1,j} e^{\mp i\tilde{\phi}_{i,j+1}(j)} \quad (3.23)$$

在 y 方向上的跃迁振幅为:

$$\mp \frac{1}{2} J_{i,j\mu,j+1} \quad (3.24)$$

它们以一种复杂的方式在中间格点的位形上跃迁。它们的复杂性表明了各向同性 XY 模型在检验二维的时候, 与一维的相比要明显的复杂。虽然如此, 但通过 M.AZZOUZ 定义的二维“Jordan-Wigner”变换, 我们仍然可以把这一模型完全变换成用费米子描述的体系。下面我们再来看一下 Y.R.WANG 采用的另一种定义方式。

(II) 二维 Jordan-Wigner 变换 (Y.R.WANG, 1991) [12-14]

现在我们回到一维 Jordan-Wigner 变换式 (3.1), 用它作为指导, 我们定义一个粒子消灭算符:

$$d_i = e^{-i\phi} s_i^-, \quad \phi_i = \sum_{j(\neq i)} B_{ij} n_j, \quad (3.25)$$

B_{ij} 在这里表示常数矩阵元, $n_j = d_j^\dagger d_j$, 相应的粒子产生算符为:

$$d_i^+ = s_i^+ e^{i\phi} = e^{i\phi} s_i^+, \quad (3.26)$$

上面两式的逆变换为:

$$s_i^- = e^{i\phi} d_i = d_i e^{i\phi} \quad (3.27)$$

$$s_i^+ = e^{-i\phi} d_i^+ = d_i^+ e^{-i\phi}. \quad (3.28)$$

在这里我们引进的算符 d^+, d 遵从费米型对易规则。很明显, 在相同位置处它们遵循费米对易规则。进一步考虑两不同位置处 $i \neq j$, 假设 d^+, d 是费米算符, 则可发现:

$$\begin{aligned} [s_i^+, s_j^-] &= e^{-i\phi} d_i^+ e^{i\phi} d_j - e^{i\phi} d_j e^{-i\phi} d_i^+ \\ &= e^{-in_j B_{ij}} d_i^+ e^{in_j B_{ij}} d_j - e^{in_j B_{ij}} d_j e^{-in_j B_{ij}} d_i^+ \end{aligned} \quad (3.29)$$

由于:

$$\begin{aligned} e^{-in_j B_{ij}} &= 1 + (e^{-iB_{ij}} - 1)n_j \\ e^{in_j B_{ij}} &= 1 + (e^{iB_{ij}} - 1)n_j \end{aligned} \quad (3.30)$$

代入 (3.29), 最后推得:

$$[s_i^+, s_j^-] = (1 + e^{-iB_y} e^{iB_\mu}) d_i^+ d_j \quad (3.31)$$

由算符的玻色性得上式计算结果为零，所以必有：

$$e^{iB_y} = -e^{iB_\mu} \quad (3.32)$$

Y.R.Wang^[12]为 B_y 提出以下的选择：考虑两个复数：

$$\tau_i = i_x + ii_y \quad (3.33)$$

$$\tau_j = j_x + ij_y \quad (3.34)$$

它们分别对应于位置 $i = i_x n_x + i_y n_y$ 和 $j = j_x n_x + j_y n_y$ ，在这里 n_x 和 n_y 分别表示指向 x 轴和 y 轴的单位矢量。用 B_y 表示辅角，则：

$$B_y = \arg(\tau_j - \tau_i) \quad (3.35)$$

很明显：

$$e^{iB_y} = e^{i \arg(\tau_j - \tau_i)} = e^{i(\arg(\tau_j - \tau_i) \pm \pi)} = -e^{iB_y} \quad (3.36)$$

这正符合式 (3.32) 式。因为 $\tau_j - \tau_i = |\tau_j - \tau_i| e^{i \arg(\tau_j - \tau_i)}$ ，式 (3.35) 可以写成下述形式：

$$B_y = \text{Im} \ln(\tau_j - \tau_i) \quad (3.37)$$

因此在前面所用到的弦算符 ϕ_i 又可写为：

$$\phi_i = \sum_{j(\neq i)} \text{Im} \ln(\tau_j - \tau_i) n_j \quad (3.38)$$

值得注意的是：M.Azzouz 的变换式(3.3)也可以用带有 B_{ij} 的等式(3.27)，(3.28)

来写出，这里 B_{ij} 为：

$$B_{ij} = \pi(\Theta(i_x - j_x)(1 - \delta_{i_x, j_x}) + \delta_{i_x, j_x} \Theta(i_y - j_y)(1 - \delta_{i_y, j_y})) \quad (3.39)$$

在这里 $\Theta(x)$ 表示阶跃函数。

当我们引进哈密顿变换的近似处理时，Y.R.Wang 的选择的优点就显示出来了，把 (3.27)，(3.28) 代入 (3.13)，联立 (3.2) 可得：

$$H = \sum_{(i,j)} (J_{i,j} (d_i^+ e^{i(\theta_i - \theta_j)} d_j + d_i e^{i(\theta_i - \theta_j)} d_j^+))$$

$$+ J_{i,j} (d_i^+ d_i - \frac{1}{2}) (d_j^+ d_j - \frac{1}{2}) + \sum_i h (d_i^+ d_i - \frac{1}{2}) \quad (3.40)$$

在这里:

$$\phi_j - \phi_i = \int_i^j dr \cdot A(r) \quad (3.41)$$

其中 $A(r) = \nabla_r a_r$ 则:

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{\partial}{\partial r_x} \left(\sum_{r'(\neq r)} n_{r'} \operatorname{Im} \ln(r'_x - r_x + i(r'_y - r_y)) \right) n_x \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial r_y} \left(\sum_{r'(\neq r)} n_{r'} \operatorname{Im} \ln(r'_x - r_x + i(r'_y - r_y)) \right) n_y \\ &= \sum_{r'(\neq r)} n_{r'} \frac{(r'_y - r_y)n_x - (r'_x - r_x)n_y}{(r' - r)^2} \\ &= - \sum_{r'(\neq r)} n_{r'} \frac{n_z \times (r' - r)}{(r' - r)^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

在上式中我们利用近似:

$$n_r \rightarrow \langle n_r \rangle = \langle s_r^z \rangle + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (3.43)$$

明显地, 在 (3.43) 式中作进一步假设 $\langle s_r^z \rangle = 0$, 则 $h = 0$ 。这样就彻底简化了这一问题, 因为它面临的是在正方格上的紧束缚无自旋费米子。然而, 由于这个模型的不一致性使得在实际中这样做很困难。

在 (3.42) 式中 $\langle n_{r'} \rangle$ 可以移到求和符号外边, 在求连续极限下, 场 $A(r)$ 的矢势可以写成:

$$\begin{aligned} A(r) &= - \langle n_{r'} \rangle \sum_{r'(\neq r)} \frac{n_z \times (r' - r)}{(r' - r)^2} \\ &= - \langle n_{r'} \rangle \frac{1}{S_0} \int_{\frac{L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} dr'_x \int_{\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} dr'_y \sum_{r'(\neq r)} \frac{n_z \times (r' - r)}{(r' - r)^2} \\ &= \dots \\ &= \langle n_{r'} \rangle \frac{\pi}{S_0} n_z \times r \end{aligned} \quad (3.44)$$

上式中 S_0 表示基面元。如图 (5) 所示。

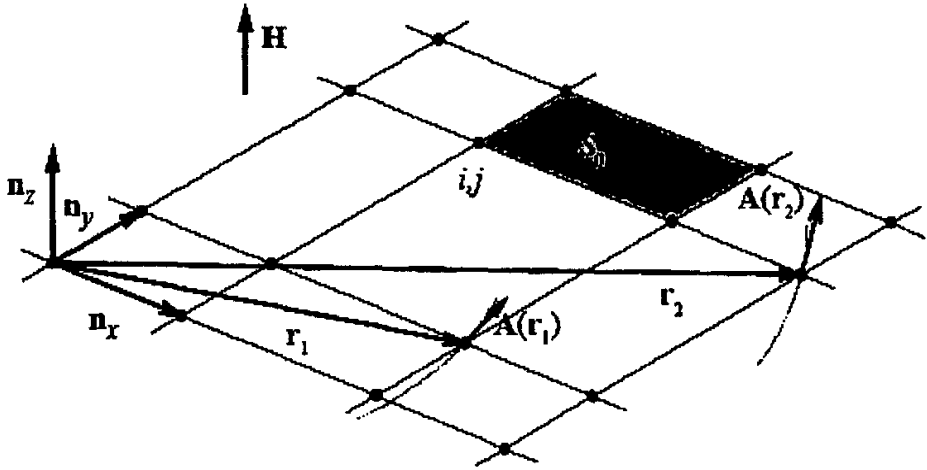


图5.哈密顿量 (3.40) 中相位因子平均场处理过程中的费米子处于磁场中
 FIG.5. Fermions in the magnetic field, which appears within the mean-field treatment of the phase factors in the Hamiltonian

在这里 $L_x = L_y = L \rightarrow \infty$ 。从 (3.44) 式我们马上可以得到对应的外磁场 $H(r)$ 为:

$$H(r) = \text{rot } A(r) = \langle n_r \rangle \frac{\pi}{S_0} \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -r_y & r_x & 0 \end{vmatrix} = \langle n_r \rangle \frac{2\pi}{S_0} n_z, \quad (3.45)$$

则: $A(r) = \frac{1}{2} H(r) \times r$, 单个基面元跃迁为:

$$\Phi_0 = H(r) \cdot S_0 n_z = 2\pi \langle n_r \rangle = \pi. \quad (3.46)$$

如图 (5) 所示的矢势 $A(r)$ 记起来不方便, 在引进矢势 $\tilde{A}(r)$ 后规范不变性能够演化成规范变换, Φ_0 仍然保持等于 π 。即假设 $A(r)$ 如下式:

$$\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j} = \int_{i,j}^{i+1,j} dr \cdot \tilde{A}(r) = \pi \quad (3.47)$$

这里:

$$a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j} = a_{i,j+1} - a_{i+1,j+1} \approx a_{i,j} - a_{i,j+1} = 0 \quad (3.48)$$

从上面 (3.47), (3.48) 两式可以得:

$$\oint dr \cdot \tilde{A}(r) = \pi \quad (3.49)$$

另一种表达就是:

$$\oint dr \cdot \tilde{A}(r) = \int dS \cdot \text{rot } \tilde{A}(r) = \int dS \cdot H(r) = \Phi_0 \quad (3.50)$$

因此, 对单个基本元跃迁通量 Φ_0 恒等于 π 。

让我们重新回到哈密顿量 (3.40), 现在我们用统计力学方法来处理, 在相位因子 (3.47), (3.48) 的平均场处理的范围内, 哈密顿量 (3.40) 可以重新写成:

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{1}{2} J_{i,j} (d_i^+ d_j - d_i d_j^+) + H_z + H_f \quad (3.51)$$

因为在哈密顿 H_{XY} 中 $J = J' = J_{\perp} = J'_{\perp}$, 有:

$$J_{i,j;i+1,j} = -J, J_{i,j;i,j+1} = J, J_{i+1,j;i+2,j} = J, J_{i+1,j;i+1,j+1} = J \quad (3.52)$$

从式 (3.51), (3.52) 可看出不需要任何额外近似就可以检验各向同性 XY 模型, 因为它在双向正方格上与紧束缚无自旋费米子耦合了, 相反因无自旋费米子间的相互作用, 海森伯模型需要进一步的近似, 这将在后面的第四章讲到。

第四章 二维自旋1/2 Jordan-Wigner 变换的应用

在上一章里我们讨论了二维的 Jordan-Wigner 变换, 运用 Jordan-Wigner 变换对自旋体系进行了费米化。在这一章里, 我们讨论在二维自旋1/2 各向同性 XY 模型和二维自旋1/2 各向同性海森伯模型中应用 Jordan-Wigner 变换, 将它们费米化后再来求解各模型所对应的热力学函数。

第一节 二维自旋1/2 各向同性 XY 模型

在第一章我们讨论了 Jordan-Wigner 变换在一维自旋1/2 各向同性 XY 模型中的应用, 在这一部分里我们来看一下如何在二维自旋1/2 各向同性 XY 模型中应用 Jordan-Wigner 变换将其进行费米化, 然后再求解热力学量。

依据第三章中式 (3.51), 我们考虑 $J = J'$, $J_{\perp} = J'_{\perp}$ 且 $H_z = H_f = 0$ 得到二维自旋各向同性 XY 模型哈密顿量:

$$\begin{aligned} H_{XY} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (J (-1)^{i+j} (d_{i,j}^+ d_{i+1,j} - d_{i,j} d_{i+1,j}^+) + J_{\perp} (d_{i,j}^+ d_{i+1,j} - d_{i,j} d_{i+1,j}^+)) \\ &= \frac{1}{2} J (\cdots - a_{i,j}^+ b_{i+1,j} + a_{i,j} b_{i+1,j}^+ + b_{i+1,j}^+ a_{i+2,j} - b_{i+1,j} a_{i+2,j}^+ + \cdots) \\ &\quad + \frac{1}{2} J_{\perp} (\cdots + a_{i,j}^+ b_{i,j+1} - a_{i,j} b_{i,j+1}^+ + b_{i+1,j}^+ a_{i+1,j+1} - b_{i+1,j} a_{i+1,j+1}^+ + \cdots) \quad (4.1.1) \end{aligned}$$

在这里, 正方格的双向特性出现了。在上式中我们引进了如下记法: $a_{i,j} = d_{i,j}$, $b_{i+1,j} = d_{i+1,j}^+$ 等等。

如果在式 (4.1.1) 中取 $J_{\perp} = 0$ 或 $J = 0$, 则可得到一个无链间作用的系统, 它们分别在水平或垂直的方向上延伸。

在前一种情况下取 $J_{\perp} = 0$, 式 (4.1.1) 对应的无链间作用系统的哈密顿量为:

$$H_{XY}(j) = (-1)^j \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2} J (-1)^j (d_{i,j}^+ d_{i+1,j} - d_{i,j} d_{i+1,j}^+) \quad (4.1.2)$$

在后一种情况下取 $J = 0$, 式 (4.1.1) 对应的无链间作用系统的哈密顿量为:

$$H_{XY}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2} J_{\perp} (d_{i,j}^{+} d_{i,j+1} - d_{i,j} d_{i,j+1}^{+}) \quad (4.1.3)$$

这样就又重新得到一维有限情况下的精确代换:

$$d_{i,j}^{+} = e^{i\pi\psi_i} f_i^{+}, \quad d_{i+1,j} = e^{-i\pi\psi_{i+1}} f_{i+1}, \dots, \psi_0 = 0, \psi_{i+1} = \psi_i + i \quad (4.1.4)$$

(如 $d_{0,j}^{+} = f_0^{+}, d_{1,j}^{+} = -f_1^{+}, d_{2,j}^{+} = -f_2^{+}, d_{3,j}^{+} = f_3^{+}$ 等等。)

进行傅立叶变换:

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{k_x, k_y} e^{i(k_x i + k_y j)} d_{k_x, k_y} \\ d_i &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ik_i} d_k, \quad d_i^{+} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ik_i} d_k^{+} \\ d_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-ik_i} d_i, \quad d_k^{+} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{ik_i} d_i^{+} \\ k_x &= \frac{2\pi}{N_x} n_x, \quad n_x = -\frac{N_x}{2}, -\frac{N_x}{2} + 1, \dots, \frac{N_x}{2} - 1 \\ k_y &= \frac{2\pi}{N_y} n_y, \quad n_y = -\frac{N_y}{2}, -\frac{N_y}{2} + 1, \dots, \frac{N_y}{2} - 1 \\ \{d_{k_1}, d_{k_2}^{+}\} &= \delta_{k_1, k_2}, \quad \{d_{k_1}, d_{k_2}\} = 0, \quad \{d_{k_1}^{+}, d_{k_2}^{+}\} = 0 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

于是哈密顿量变为:

$$\begin{aligned} H_{XY} &= \frac{1}{2} \sum_k (iJ \sin k_x (b_k^{+} a_k - a_k^{+} b_k) + J_{\perp} \cos k_y (b_k^{+} b_k - a_k^{+} a_k)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k |E_k| (\cos \gamma_k (b_k^{+} b_k - a_k^{+} a_k) + i \sin \gamma_k (b_k^{+} a_k - a_k^{+} b_k)) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

上式推导中运用了以下计法:

$$\begin{aligned} b_k^{+} &= d_{k_x, k_y}^{+}, \quad a_k = d_{k_x \pm \pi, k_y \pm \pi}, \dots, \\ E_k &= J_{\perp} \cos k_y + iJ \sin k_x = |E_k| e^{i\gamma_k} \\ |E_k| &= \sqrt{J_{\perp}^2 \cos^2 k_y + J^2 \sin^2 k_x} \\ \cos \gamma_k &= \frac{J_{\perp} \cos k_y}{|E_k|}, \quad \sin \gamma_k = \frac{J \sin k_x}{|E_k|} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

哈密顿量式 (4.1.6) 可以重新写成下述形式:

$$H_{XY} = \sum_k |E_k| (\cos \gamma_k (b_k^\dagger b_k - a_k^\dagger a_k) + i \sin \gamma_k (b_k^\dagger a_k - a_k^\dagger b_k)) \quad (4.1.8)$$

k 在如图 (6) 所示范围内变化:

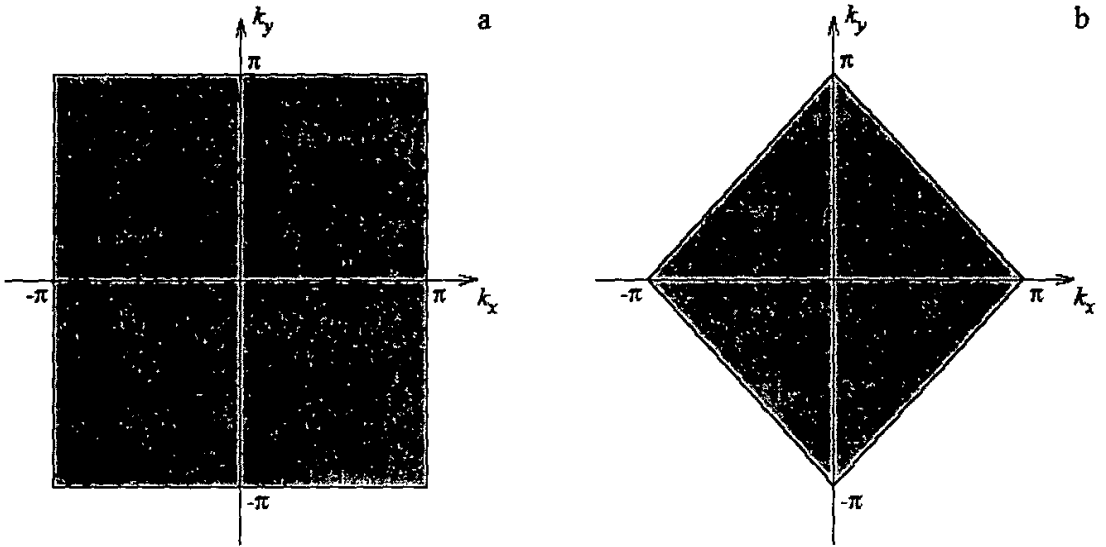


图.6.式 (4.1.6)、(4.1.7) (4.1.8) 中 k 的变化范围

FIG.6. The region in which k varies in the sum in Eq.(4.1.6)、(4.1.7)、(4.1.8)

最后我们引进以下算符:

$$\alpha_k = \cos \frac{\gamma_k}{2} b_k + i \sin \frac{\gamma_k}{2} a_k$$

$$\beta_k = \sin \frac{\gamma_k}{2} b_k - i \cos \frac{\gamma_k}{2} a_k$$

$$\{\alpha_{k_1}, \beta_{k_2}^+\} = 0, \quad \{\beta_{k_1}, \alpha_{k_2}^+\} = 0$$

$$\{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}^+\} = \delta_{k_1, k_2}, \quad \{\beta_{k_1}, \beta_{k_2}^+\} = \delta_{k_1, k_2} \quad (4.1.9)$$

在费米情况下, 我们利用近似 (3.43) 从式 (4.1.8) 得到最终的二维自旋1/2各向同性 XY 模型的哈密顿量:

$$H_{XY} = \sum_k \Lambda_k (\alpha_k^\dagger \alpha_k - \beta_k^\dagger \beta_k), \quad (4.1.10)$$

其中:

$$\Lambda_k = |E_k| = \sqrt{J_{\perp}^2 \cos^2 k_y + J^2 \sin^2 k_x} \geq 0 \quad (4.1.11)$$

现在可以很容易计算出与 (4.1.10) 式哈密顿量所对应的自旋模型的热力学函数, 例如单基态能量为:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{N} &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi-|k_x|}^{\pi-|k_x|} \frac{dk_y}{2\pi} \sqrt{J_{\perp}^2 \cos^2 k_y + J^2 \sin^2 k_x} \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \sqrt{J_{\perp}^2 \cos^2 k_y + J^2 \sin^2 k_x} \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

在一维限制下 ($J_{\perp} = 0$), 式 (4.1.12) 变为:

$$\frac{E_0}{N} = - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} |J \sin k_x| = - \frac{|J|}{\pi} \quad (4.1.13)$$

同样在一维限制下 ($J = 0$), 式 (4.1.12) 变为:

$$\frac{E_0}{N} = - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} |J_{\perp} \cos k_y| = - \frac{|J|}{\pi} \quad (4.1.14)$$

求得解相同, 即为一维情况下的精确解。

第二节 二维自旋1/2海森伯模型

在这一节里我们将讨论一下二维自旋1/2各向同性海森伯模型, 同样在平均场近似(式(3.43))体系中利用二维 Jordan-Wigner 变换, 可以得到海森伯模型的哈密顿量(见(3.40)式), 其中除了 H_{xy} 项外, 还包含 H_z 项:

$$H_z = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \left(d_i^+ d_i d_j^+ d_j - \frac{1}{2} d_i^+ d_i - \frac{1}{2} d_j^+ d_j + \frac{1}{4} \right) \quad (4.2.1)$$

在上式中的 $d_i^+ d_i, d_j^+ d_j$ 可写为:

$$\begin{aligned} d_i^+ d_i d_j^+ d_j &\rightarrow d_i^+ d_i \langle d_j^+ d_j \rangle + \langle d_i^+ d_i \rangle d_j^+ d_j - \langle d_i^+ d_i \rangle \langle d_j^+ d_j \rangle \\ &\quad + d_i^+ d_j \langle d_i^+ d_j \rangle + \langle d_i^+ d_j \rangle d_i^+ d_j - \langle d_i^+ d_j \rangle \langle d_i^+ d_j \rangle \\ &= d_i^+ d_i \langle n_j \rangle + d_j^+ d_j \langle n_i \rangle - \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle \\ &\quad + d_i^+ d_j \Delta_{i,j} e^{i\theta_{i,j}} - d_i d_j^+ \Delta_{j,i} e^{i\theta_{j,i}} + \Delta_{i,j} \Delta_{j,i} e^{i(\theta_{i,j} + \theta_{j,i})} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

上述表达式中我们引进了下面的记法:

$$\langle d_i^+ d_j \rangle = \Delta_{i,j} e^{i\theta_{i,j}} = -\langle d_j^+ d_i \rangle \quad (4.2.3)$$

根据式(4.2.2), 有四种方法来处理易辛作用, 例如可以做如下假设:

$$\Delta_{i,j} = 0, m = \langle s_j^z \rangle = \langle n_j \rangle - \frac{1}{2} = 0 \quad (4.2.4)$$

或:

$$\Delta_{i,j} \neq 0, m = 0 \quad (4.2.5)$$

或:

$$\Delta_{i,j} = 0, m \neq 0 \quad (4.2.6)$$

或:

$$\Delta_{i,j} \neq 0, m \neq 0 \quad (4.2.7)$$

对于假设 $\Delta_{i,j} = 0, m = 0$, 我们已在上一节里讨论过, 现在我们来考虑第二种情况

($\Delta_{i,j} \neq 0, m = 0$), 在这一种情况下易辛项变为:

$$H_z = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \left(\Delta_{i,j} e^{i\theta_{i,j}} d_i^+ d_j - \Delta_{j,i} e^{i\theta_{j,i}} d_i d_j^+ + \Delta_{i,j} \Delta_{j,i} e^{i(\theta_{i,j} + \theta_{j,i})} \right)$$

为了得到同位通量解，我们作以下代换(见图 7):

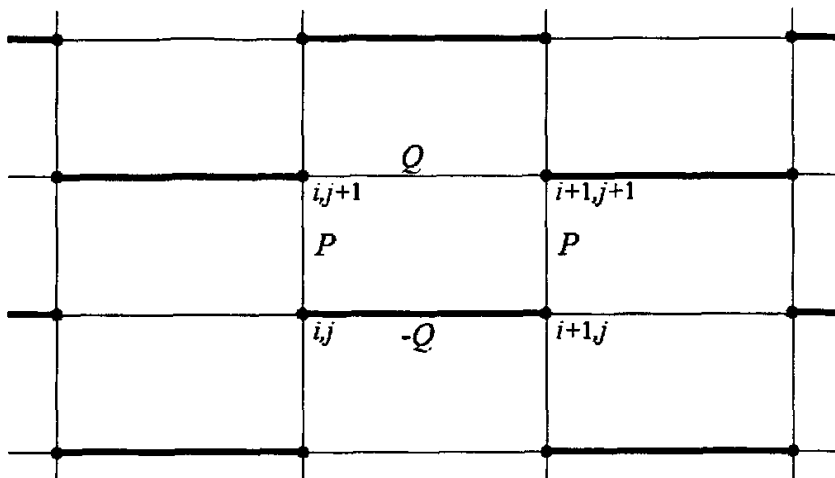


图.7.对于海森伯模型的同相通量解

FIG.7. Towards the in-phase flux solution for the Heisenberg model

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i,j;i+1,j} &= \Delta_{i+1,j;j,j} = \Delta_{i+1,j;j+2,j} = \Delta_{i+2,j;j+1,j} = Q \\
 e^{i\theta_{i,j;i+1,j}} &= e^{i\theta_{i+1,j;j,j}} = -1, \quad e^{i\theta_{i+1,j;j+2,j}} e^{i\theta_{i+2,j;j+1,j}} = 1 \\
 \Delta_{i,j;j,j+1} &= \Delta_{i,j+1;j,j} = \Delta_{i+1,j;j+1,j+1} = \Delta_{i+1,j+1;j+1,j} = P \\
 e^{i\theta_{i,j;j,j+1}} &= e^{i\theta_{i,j+1;j,j}} = e^{i\theta_{i+1,j;j+1,j+1}} = e^{i\theta_{i+1,j+1;j+1,j}} = 1
 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

参量 Q 和 P 见后面式 (4.2.13) 和 (4.2.14)，现在海森伯模型哈密顿量与各向同性 XY 模型哈密顿量 (4.1.1) 式仅有微小差别。其形式为：

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} J (1+2Q) (\cdots - a_{i,j}^+ b_{i+1,j} + a_{i,j} b_{i+1,j}^+ + b_{i+1,j}^+ a_{i+2,j} - b_{i+1,j} a_{i+2,j}^+ + \cdots) \\
 &+ \frac{1}{2} J_{\perp} (1+2P) (\cdots + a_{i,j}^+ b_{i,j+1} - a_{i,j} b_{i,j+1}^+ + b_{i+1,j}^+ a_{i+1,j+1} - b_{i+1,j} a_{i+1,j+1}^+ + \cdots) \\
 &+ NJQ^2 + NJ_{\perp}P^2.
 \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

类似于 (4.1.10) 式，则有：

$$H = \sum_k \Lambda_k (\alpha_k^+ \alpha_k - \beta_k^+ \beta_k) + NJQ^2 + NJ_{\perp}P^2 \tag{4.2.10}$$

其中：

$$\Lambda_k = \sqrt{J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x} \geq 0 \quad (4.2.11)$$

单基态能量为:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{N} = & -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \sqrt{J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x} \\ & + JQ^2 + J_{\perp}P^2 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

由 $\frac{\partial}{\partial Q} \frac{E_0}{N} = 0$ 和 $\frac{\partial}{\partial P} \frac{E_0}{N} = 0$ 可确定 Q, P 为:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{J \sin^2 k_x (1+2Q)}{\sqrt{J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x}} \quad (4.2.13)$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{J_{\perp} \cos^2 k_y (1+2P)}{\sqrt{J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x}} \quad (4.2.14)$$

现在我们来考虑后两种假设 $\Delta_{i,j} = 0, m \neq 0$ 和 $\Delta_{i,j} \neq 0, m \neq 0$, 在这两种情况下我们来处理易辛项 (4.2.2), 设亚晶格磁化奈尔序 m 和 $-m$ 如下:

$$\begin{aligned} \langle n_{i,j} \rangle &= \langle n_{i+1,j+1} \rangle = \dots = m + \frac{1}{2} \\ \langle n_{i,j+1} \rangle &= \langle n_{i+1,j} \rangle = \dots = -m + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

见图 (8)。

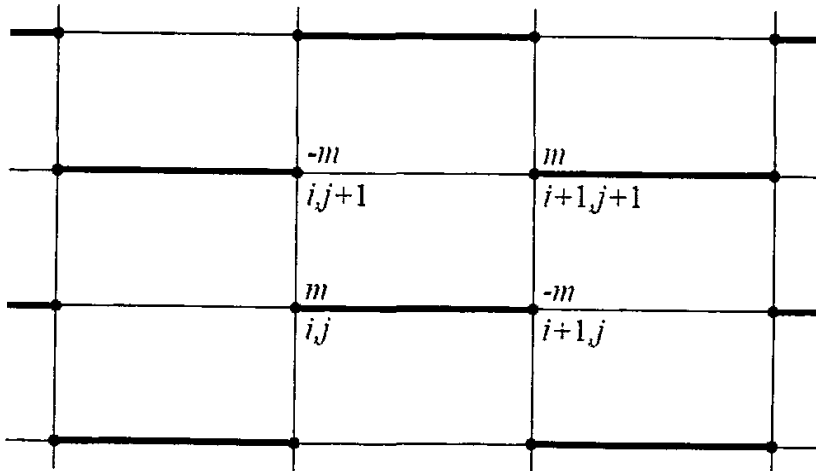


图.8. 海森伯模型奈尔序

FIG.8. The Neel order for the Heisenberg model

(在这里提一下, 这一给定的假设明显与对相位因子的平均场近似处理相矛盾,

而且这一矛盾也一直没有得到解决)。对于假设 $\Delta_{i,j} = 0, m \neq 0$, 带有奈尔序的均匀通量称作奈尔通量解, 对于假设 $\Delta_{i,j} \neq 0, m \neq 0$, 带有奈尔序的内通量称作同相奈尔通量解。对于后一种情况, 哈密顿量为:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} J (1+2Q) (\cdots - a_{i,j}^+ b_{i+1,j} + a_{i,j} b_{i+1,j}^+ + b_{i+1,j}^+ a_{i+2,j} - b_{i+1,j} a_{i+2,j}^+ + \cdots) \\
 & + \frac{1}{2} J_{\perp} (1+2P) (\cdots + a_{i,j}^+ b_{i,j+1} - a_{i,j} b_{i,j+1}^+ + b_{i+1,j}^+ a_{i+1,j+1} - b_{i+1,j} a_{i+1,j+1}^+ + \cdots) \\
 & + J (\cdots - m a_{i,j}^+ a_{i,j} + m b_{i+1,j}^+ b_{i+1,j} + m b_{i+1,j}^+ b_{i+1,j} - m a_{i+2,j}^+ a_{i+2,j} + \cdots) \\
 & + J_{\perp} (\cdots - m a_{i,j}^+ a_{i,j} + m b_{i,j+1}^+ b_{i,j+1} + m b_{i+1,j}^+ b_{i+1,j} - m a_{i+1,j+1}^+ a_{i+1,j+1} + \cdots) \\
 & + NJQ^2 + NJ_{\perp}P^2 + N(J+J_{\perp})m^2 \tag{4.2.16}
 \end{aligned}$$

利用傅立叶变换:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \sum_k ((2(J+J_{\perp})m + iJ(1+2Q)\sin k_x) b_k^+ a_k \\
 & + (2(J+J_{\perp})m - iJ(1+2Q)\sin k_x) a_k^+ b_k \\
 & + J_{\perp}(1+2P)\cos k_y (b_k^+ b_k - a_k^+ a_k)) \\
 & + NJQ^2 + NJ_{\perp}P^2 + N(J+J_{\perp})m^2 \\
 = & \sum_k ((2(J+J_{\perp})m + iJ(1+2Q)\sin k_x) b_k^+ a_k \\
 & + (2(J+J_{\perp})m - iJ(1+2Q)\sin k_x) a_k^+ b_k \\
 & + J_{\perp}(1+2P)\cos k_y (b_k^+ b_k - a_k^+ a_k)) \\
 & + NJQ^2 + NJ_{\perp}P^2 + N(J+J_{\perp})m^2 \tag{4.2.17}
 \end{aligned}$$

在这里 $b_k^+ = d_{k_x, k_y}^+, a_k = d_{k_x \pm \pi, k_y \pm \pi}$ 等。引进算符:

$$\tilde{a}_k = a_k e^{i\delta_k}, \quad \tilde{a}_k^+ = a_k^+ e^{-i\delta_k}, \quad \tilde{b}_k = b_k, \quad \tilde{b}_k^+ = b_k^+$$

$$2(J+J_{\perp})m \pm iJ(1+2Q)\sin k_x = \sqrt{4(J+J_{\perp})^2 m^2 + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x} e^{\pm i\delta_k} \tag{4.2.17}$$

接下来:

$$\alpha_k = \cos \frac{\omega_k}{2} \tilde{b}_k + \sin \frac{\omega_k}{2} \tilde{a}_k, \quad \beta_k = \sin \frac{\omega_k}{2} \tilde{b}_k - \cos \frac{\omega_k}{2} \tilde{a}_k$$

$$\cos \omega_k = \frac{J_{\perp}(1+2P) \cos k_y}{|E_k|}, \quad \sin \omega_k = \frac{\sqrt{4(J+J_{\perp})^2 m^2 + J^2(1+2Q) \sin^2 k_x}}{|E_k|}$$

$$|E_k| = \sqrt{4(J+J_{\perp})^2 m^2 + J^2(1+2Q) \sin^2 k_x + J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y} \quad (4.2.18)$$

在费米情况下得到最终的海森伯哈密顿量:

$$H = \sum_k \Lambda_k (\alpha_k^+ \alpha_k - \beta_k^+ \beta_k) + NJQ^2 + NJ_{\perp} P^2 + N(J+J_{\perp}) m^2 \quad (4.2.19)$$

上式中 $\Lambda_k = |E_k| \geq 0$ 。

由式 (4.2.19) 得单基态能量为:

$$\frac{E_0}{N} = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \sqrt{4(J+J_{\perp})^2 m^2 + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x + J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y}$$

$$+ NJQ^2 + NJ_{\perp} P^2 + N(J+J_{\perp}) m^2 \quad (4.2.20)$$

与前述类似可求得下面三个量:

$$Q = \frac{1}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{J \sin^2 k_x (1+2Q)}{\sqrt{4(J+J_{\perp})^2 m^2 + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x + J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y}} \quad (4.2.21)$$

$$P = \frac{1}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{J_{\perp} \cos^2 k_y (1+2P)}{\sqrt{4(J+J_{\perp})^2 m^2 + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x + J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y}} \quad (4.2.22)$$

$$2m = \frac{1}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{2(J+J_{\perp})m}{\sqrt{4(J+J_{\perp})^2 m^2 + J^2(1+2Q)^2 \sin^2 k_x + J_{\perp}^2(1+2P)^2 \cos^2 k_y}} \quad (4.2.23)$$

P, Q 等于零, 从式 (4.2.15), (4.2.18), (4.2.19), (4.2.20), (4.2.23) 得到奈尔通量解。

总 结

本文主要研究了一维情况下自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换及其简单应用、一维情况下自旋 $3/2$ Jordan-Wigner 变换、二维情况下自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换以及该变换在一些自旋模型中的应用。

1. 一维自旋 $1/2$ Jordan-Wigner 变换在处于相同格点上的无自旋费米子算符与自旋 $1/2$ 算符之间建立了联系, 给众多一维 $s = 1/2$ 的自旋链模型提供了一种新的费米子表象下的描述, 简化了一些物理问题的分析求解。运用该变换对一维自旋 $1/2$ 各向异性 XY 进行费米化, 带来了精确求解。

2. 对于一维自旋 $3/2$ Jordan-Wigner 变换, 它是在自旋 $3/2$ 和双费米子之间构造出来的, 双费米子表象下的该类自旋模型包含着多项费米子的相互作用, 而且弦算符的引入使得相互作用变得更加复杂, 因此此类 Jordan-Wigner 变换方法的实际应用价值还需要进一步发掘。

3. 二维情况下的自旋为 $1/2$ 的“Jordan-Wigner”变换是在研究正方格自旋模型的基础上构建出来的, 它是以一维变换为基础。将该变换应用到二维自旋 $1/2$ 各向同性 XY 模型和二维自旋 $1/2$ 海森伯模型发现在二维 Jordan-Wigner 费米化过程中有更多问题需要考虑, 迫切需要一种更成熟地对相位因子的处理。

参 考 文 献

- [1] T.Hostein and H.Primakoff,Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet[J].Phys.Rev,1940,58:1098~1113.
- [2] M.Fabrizio, A.O.Gogolin and A.A.Nersesyan, Critical Properties of the double-frequency sine-Gordon model with applications[J].Nuclear. Physics B,2000,580:647~687.
- [3] S.Katsura,Statistical Mechanics of the Anisotropic Linear Heisenberg Model [J].Phys.Rev,1962,127:1508~1518
- [4] E.Lieb and D.Mattis,Theory of Ferromagnetism and the Ordering of Electronic Energy Levels[J].Phys.Rev,1962,125:164~172.
- [5] T.Schultz,Note on the one-Dimensional Gas of Impenetrable Point-Particle Bosons[J].J.Math.Phys,1963,4:666~671.
- [6] T.Schultz,D.Mattis and E.Lieb, Two-Dimensional Ising Model as a Soluble Problem of Many Fermions[J].Rev.Mod.Phys,1964,36:856~871.
- [7] E.Fradkin, Jordan-Wigner Transformation for Quantum-Spin in Two Dimensions and Fractional Statistics[J]. Phys. Rev. Lett, 1989, 63:322~325.
- [8] M.Azzouz,Interchain-coupling effect on the one-dimensional spin- $\frac{1}{2}$ antiferromagnetic Heisenberg model[J]Phys.Rev.B ,1993,48:6136~6140.
- [9] M.Azzouz,L.Chen,and S.Moukouri,Calculation of the singlet-triplet gap of the antiferromagnetic Heisenberg model on a ladder. [J]Phys.Rev.B,1994,50:6233~6237.
- [10] M.Azzouz and C.Bourbonnais,Mean-field theory of the spin-peierls state under magnetic field :Application to CuGeO_3 [J].Phys.Rev.B ,1996,53:5090~5093.
- [11] M.Azzouz,B.Dumoulin,and A.Benyoussef,Incommensurate nodes in the energy spectrum of coupled antiferromagnetic Heisenberg ladders [J].Phys.Rev.B 1997,55:R11957~R119600.
- [12] Y.R.Wang Ground state of the two-dimensional antiferromagnetic Heisenberg

- model studied using an extended Wigner-Jordan transformation[J].
Phys.Rev.B,1991, 43:3786~3789.
- [13] Y.R.Wang In-phase flux state of the two-dimensional antiferromagnetic Heisenberg model and the Raman spectrum of La_2CuO_4 [J]. Phys. Rev.B, 1991,43:13774~13777.
- [14] Y.R.Wang Low-dimensional quantum antiferromagnetic Heisenberg model studied using Wigner-Jordan transformations [J].Phys.Rev.B,1992,46:151~161.
- [15] Yanjiang Ji, Jun Qi, Jian-Xin Li and Chang-De Gong, The stepped spin - Peierls phase transition in the quasi-one-dimensional spin-1/2 quantum XY-model[J].J. Phys.: Condens. Matter 1997 9:2259~2266.
- [16] X.-J.Fan and C-D.Gong, The spin-Peierls phase transition in the quasi-one-dimensional spin-1/2 Heisenberg model [J].Eur.Phys.J.B,1997,7:233~236
- [17] Q,Yuan,Y,Zhang and H.Chen[EB]. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9911119>.
- [18] L.Huerta and J.Zanelli,Bose-fermi Transformation in three-Dimensional space [J].Phys.Rev.Lett,1993,71:3622~3624.
- [19] B.Bock and M.Azzouz [EB]. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0007261>.
- [20] F.Mila,Quantum spin liquids [J] .Eur.J.Phys,2000,21:499~510.
- [21] C.D.Batista and G.Ortiz,Generalized Jordan-Wigner Transformations [J] .Phys. Rev.Lett,2001,86:1082~1085.
- [22] Stanislav V Dobrov,On the spin-fermion connection [J].J.Phys.A:Math.Gen. 2003,36:L503~L508.

致 谢

本论文是我在导师娄平教授的指导以及同学周宗立的帮助下完成的。娄老师以其渊博的学识，深厚的学术功底深深影响着我。三年的学习生活，娄老师在学习、工作以及思想教育方面都给了我很大帮助，他严谨的治学态度必将使我终身受用。在此，我向娄老师表示衷心感谢！

感谢周宗立同学这三年来对我的帮助和配合！

感谢中文系党委书记徐素萍老师在这七年里对我无微不至的关怀和教导，感谢父母及亲友对我的理解和帮助！

感谢物理学院各级领导以及各位教师七年来对我的关心和教育！

感谢安徽大学七年来对我的培养教育！

致谢人：李长岭

2006年4月23日

攻读硕士学位期间发表的论文

1. 李长岭, 周宗立, 李孔望, 陈刚, Luttinger 模型中的磁场效应。安徽大学学报, 自然科学版, 第 29 卷增刊, 2005.12。
2. 娄平, 周宗立, 李长岭, 外磁场中一维自旋 $-1/2$ 模型的玻色化。安徽大学学报, 自然科学版, 第 30 卷第 1 期, 2006.1。