

摘 要

大型结构的多材料连接区的断裂特性分析是评价整个结构可靠性的关键因素,本文针对含有橡胶材料的多材料、多界面构件进行断裂分析。首先,基于增量加载的逐步线性化方法,提出了一种同时考虑材料非线性与几何非线性的虚裂纹闭合技术,通过与已有文献的数值对比,证明了该技术的可靠性。在此基础上,建立了含橡胶夹层的复合材料层合板 SLB 模型,计算了不同材料匹配下的能量释放率及其各型分量。最后,对由金属-橡胶-复合材料组成的多材料构件的断裂特性进行了分析,讨论了组分材料性质,裂纹位置和构件尺寸对能量释放率的影响,并建立相应的起裂准则。

通过分析和讨论,得到了以下结论:

(1) 改进的虚裂纹闭合技术可以同时考虑构件材料非线性和几何非线性的特征,计算方法简便。通过对橡胶材料断裂区的能量释放率总量及其分量的计算可知,在橡胶构件的一定伸长量范围内,该方法有较高的计算精度和计算效率。

(2) 在复合材料层合板 SLB 模型中,由于橡胶层的加入,使材料的不匹配性加强,不仅导致 II 型分量的比例呈现明显增大,而且能量释放率总量也随之增大。同时,随着裂纹长度的增加,能量释放率总量及其分量均呈增加趋势。

(3) 金属-橡胶-复合材料组成的多材料圆柱壳构件的断裂特性分析可知,内层界面前缘的能量释放率要明显大于外层界面前缘的能量释放率,而缠绕层厚度改变对裂纹能量释放率影响要比外层缠绕层的高度变化大。

本文工作将对工程结构的设计和分析研究具有参考价值。

关键词: 改进的虚裂纹闭合技术; 多相材料连结构件; 界面断裂; 能量释放率; 有限元

Interfacial Fractural Analysis for Joint-Structures with Multi-material System

Abstract

The fractural analysis for the multi-material joint region in the large structures is a key factor to assess the reliability of the whole structure. The aim of this paper is to study on fracture behavior of the multi-material and multi-interfacial structures with a component of rubber. Firstly, based on the method of successive linearization by incremental load, a modified virtual crack closure technique has been proposed, in which both material and geometric nonlinearity are considered. The efficiency of the technique was proved through the comparison of numerical results between present and published literatures. Then, a SLB model with a rubber interface was established, and the energy release rate and its component under different material matches were calculated. Lastly, the fracture behavior of a typical joint-structure with metal-rubber-composite multi-material system was investigated, and the effects of the properties of component material, crack positions and structure dimensions upon the values of total energy release rate were discussed, and according to the variation of energy release rate of multi-interfacial cracks, a corresponding fracture criterion for crack onset was proposed.

(1) The modified virtual crack closure technique provided is convenient, in which both material and geometric non-linearity were considered. Through the calculations of total energy release rate and its components of crack for a rubber component, it can be found the validity and efficiency of the present technique can be guaranteed within a given extent of extension for fracture analysis of rubber components.

(2) Inserting rubber layer in the laminated SLB model induce the material mismatch increased, hence the total energy release rate and the ratio of mode II component increase. With increasing crack length, both the total energy release rate and its component increase

(3) The fractural analysis of a typical joint-structures with multi-material indicates the effect of the thickness of outer composite component upon the values of energy release rate is higher than of outer composite component.

The present work should be a great value to engineering design and analysis.

Key Words: modified virtual crack closure technique; joint-structures with multi-material system; interfacial fracture; energy release rate; finite element

大连理工大学学位论文独创性声明

作者郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用内容和致谢的地方外，本论文不包含其他个人或集体已经发表的研究成果，也不包含其他已申请学位或其他用途使用过的成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

若有不实之处，本人愿意承担相关法律责任。

学位论文题目： 多材料、多界面体系的断裂特性分析

作者签名： 徐浩 日期： 2009 年 06 月 29 日

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本人完全了解学校有关学位论文知识产权的规定，在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于大连理工大学，允许论文被查阅和借阅。学校有权保留论文并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印、或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

学位论文题目： 多材料、多界面体系的断裂特性分析

作者签名： 徐浩 日期： 2009 年 6 月 29 日

导师签名： 陈浩然 日期： 2009 年 6 月 29 日

1 绪论

在许多工程领域中,如航空航天、汽车、造船以及电子封装等,都大量存在着由多种材料结合而成的连接区域,该区域呈现出大量的几何和物理间断面,在外载作用下其传力机制十分复杂,并且存在显著的应力集中现象。由于不同种材料性质的不匹配性,在材料结合处所形成的界面端部,往往表现出较强的应力奇异性,进而产生裂纹,而裂纹的进一步扩展会导致整个结构的失效。因此,整体结构的可靠性在很大程度上取决于多材料连接区各界面的强度与韧性。

针对界面的力学性质,国内外学者展开了大量的研究。Williams (1959) 首先将结合部位理想化为界面,并研究了界面裂纹裂尖的应力振荡奇异性问题^[1],但是其分析局限于对界面裂纹裂尖应力场的数学描述,而不涉及如何评价的问题。Bogy (1966) 发现了结合界面端部的应力奇异性问题,解释了为什么结合材料的破坏多数是从界面端部开始^[2]。Cominimou(1979)提出了界面裂纹裂尖附近的裂纹面相互接触的界面裂纹接触模型,消除了裂尖的应力振荡性和裂纹面互相嵌入的不合理现象^[3]。Dundurs 和 Gutesen 进一步提出了一端开口而另一端闭口的界面裂纹接触模型^[4]。这些理论研究结果表明,包含相互嵌入这一物理矛盾的界面裂纹经典解,当嵌入区较小时,在振荡区域以外,其裂尖应力分布与消除了这一矛盾后的接触界面裂纹的理论解基本相同。Shih 和 Asaro 采用弹塑性有限元分析方法,发现塑性变形可使应力振荡性和裂纹面相互嵌入的现象消失,并且当屈服区不大时(即小规模屈服),裂尖附近应力场可近似地以具有振荡应力奇异性的弹性解来表示的结论^[5]。在这些研究的基础上,Rice (1988) 明确提出,在小规模屈服条件下,具有振荡应力奇异性的弹性解,可以作为评价界面裂纹断裂的依据的观点^[6]。许金泉(2006) 对前人的工作进行了归纳总结,比较详尽地阐述了界面力学理论,对界面的应力场,界面断裂力学理论以及界面力学的工程应用进行了全面的介绍^[7]。张鸿,宋迎东(2007) 计算了裂纹在界面处不同传播路径的能量释放率^[8]。

在大型结构的多材料连接区域中,橡胶材料的引入能够很好地达到缓冲、减震、密封与吸收能量等目的,但是橡胶材料的性质十分复杂,在外载作用下,同时表现出物理和几何非线性,并且具有不可压缩的性质。因此,如何能够利用有效的分析理论和方法,研究含有橡胶材料的界面断裂特性,是工程界关注的课题。有关国内外对橡胶材料和构件的断裂问题的研究是,J.H.Chang(1994) 计算了二维情况下,含弧形裂纹橡胶试件裂纹前缘的能量释放率^[9]。Pidaparti (1995) 等人采用五参数的 Mooney-Rivlin 橡胶本构模型,计算了含双裂纹橡胶纯剪试件裂纹尖端的撕裂能,并采用双材料橡胶模型,计算了界面裂纹的撕裂能^[10]。Hocine (1996) 等人通过实验方法得到橡胶材料的本构模型,并计算

出表征裂纹尖端断裂韧性的 J 积分数值，并与实验进行了对比^[11]。G .Dean (2004) 等人研究了具有橡胶增韧界面的连接结构变形和破坏行为^[12]。高剑虹等人 (2006) 进行了橡胶-钢双材料界面断裂的非线性有限元分析^[13]。

在工程领域中大量存在着由多种材料结合而成的连接区域，但是，目前国内外研究工作大部分都基于双材料界面模型，而对多材料、多界面结构的断裂特性研究，尤其是针对含有橡胶材料的多材料连接结构的研究还鲜见。

在分析界面断裂问题时，一般都采用基于各种理论的有限元法，例如：应力强度因子法， J 积分，虚裂纹扩展法和虚裂纹闭合技术等。应力强度因子法首先由 Irwin (1957) 提出，其参量 K 用来表征裂纹尖端应力场的强弱，但是在进行有限元分析时，在裂纹尖端附近需进行十分精细的网格划分，计算量较大。 J 积分法首先由 Rice (1968) 提出，其后得到了很大的发展，但其积分的守恒性必须以几何小变形和全量理论作为前提，为其应用带来了限制，而且该方法计算量较大，在推广到三维问题时不易实施。虚裂纹扩展法是基于裂纹扩展能量释放率而发展的有限元方法，Parks^[14] (1974) 和 Hellen^[15] (1975) 做出了简单的改进，使该方法只需要一次有限元计算，但是在计算过程中需辅以刚度阵增量的计算，过程仍然比较繁琐。Pidaparti (1995) 等人采用虚裂纹扩展法计算了橡胶试件裂纹前缘的撕裂能，并与 J 积分方法进行了比较^[10]。与 J 积分法和虚裂纹扩展法相比，虚裂纹闭合技术是一种简便实用的有限元方法，其特点是无需划分非常精细的网格，就可以得到较精确的结果，另外可以十分简便的提取能量释放率各型分量，是一种工程当中经常采用的方法。该方法来源于 Irwin (1958) 提出的裂纹闭合积分法^[16]，经过改进，只需要一次有限元分析就可得到能量释放率及其各型分量数值。在运用虚裂纹闭合技术计算双材料界面断裂问题时，由于裂尖应力振荡区的影响，在裂纹尖端网格长度过小时，能量释放率各型分量数值不稳定，为了避免这种现象，Raju 等人 (1988) 在不同材料之间引入一层很薄的树脂层，这样裂纹将在一层各向同性材料中扩展^[17]。Hwu 和 Hu J (1992) 提出当裂纹前缘单元长度与裂纹长度比值 $\Delta a/a > 0.05$ 时，将得到稳定的能量释放率各分量^[18]。Glaessgen, Riddell 和 Raju (1998) 提出当裂纹前缘单元长度很小时，能量释放率总量趋于稳定值^[19]。Raju 等人证明，当采用较粗网格得到的能量释放率与采用引入薄树脂层方法结果一致^[17]。F.Shen, K.H.Lee, T.E.Tay (2001) 对应用虚裂纹闭合技术时，网格大小及形状的控制进行了较深入的分析^[20]。Krueger (2004) 对虚裂纹闭合技术的理论及应用做了非常详尽的阐述^[21]，并利用虚裂纹闭合技术对复合材料层合板模型 DCB, ENF, SLB 进行了大量的断裂性能实验和数值分析，得到分层前缘各节点

的能量释放率总量和各型分量的分布规律。但是,虚裂纹闭合技术要求材料性质为线性,而非线性材料不适用,因此,也无法应用此技术来计算含橡胶材料界面的断裂性能。

本文针对含有橡胶材料的多材料、多界面构件进行断裂分析。首先,基于增量加载的逐步线性化方法,提出了一种同时考虑材料非线性与几何非线性的虚裂纹闭合技术,通过与已有文献的数值对比,证明了该技术的可靠性。在此基础上,建立了含橡胶夹层的复合材料层合板 SLB 模型,计算了不同材料匹配下的能量释放率及其各型分量。最后,对由金属-橡胶-复合材料组成的多材料构件的断裂特性进行了分析,讨论了组分材料性质,裂纹位置和构件尺寸对能量释放率的影响,并建立相应的起裂准则。其各章节的主要内容是:

第一章主要介绍了多材料、多界面结构断裂问题的工程背景,并介绍了国内外现有的研究概况。

第二章到第三章为本文工作的理论基础。其中,在第二章中比较系统地阐述了断裂力学的基本内容,介绍了断裂力学的模型,裂尖的应力、位移场分布情况,以及经典的断裂准则。在第三章中着重介绍了界面力学的基本理论,对界面的模型、界面断裂力学知识进行了比较详尽的论述。

第四章为界面断裂问题的有限元方法,其中着重介绍在本文中采用的虚裂纹闭合技术和基于虚裂纹闭合技术的改进方法。

第五章为多材料、多界面连接结构断裂问题研究。在该章中首先通过对虚裂纹闭合技术的改进,建立了一种同时考虑橡胶材料物理、几何非线性和不可压缩性的改进的虚裂纹闭合技术;其次研究了多材料、多界面连接结构的断裂特性,并通过引入预置裂纹的方法,讨论了该连接结构的相关几何参数对各界面处能量释放率值和分布的影响,研究了其变化的趋势;最后,提出了含界面裂纹的多材料、多界面连接结构的起裂准则。

本文研究是国家重点基础研究发展计划 973 计划课题(2006CB601205)和国家自然科学基金项目基金重点项目(90816025)的部分研究内容,并得到了航天总公司第四研究院的支持。

2 线弹性断裂力学^[22]

线弹性断裂力学是断裂力学理论中最基本、最简单且较为成熟的部分，它用到的基本理论是弹性力学。线弹性断裂力学的基本理论是能量平衡、转变关系和从应力场分布两个方面建立起来的，前者为 Griffith 理论（又叫能量释放率准则，简称 G 准则），后者为 Irwin 理论（又叫应力强度因子理论，简称 K 准则）。

这两种理论之间存在着相互转化关系式，这说明了它们的同一性，即它们不过是同一本质的断裂现象从不同物理角度分析考虑得到的不同表达形式。其中 K 准则应用方便，得到更多采用。

线弹性断裂准则是脆性断裂准则，只适用于断裂前裂纹尖端几乎没有塑性变形区的理想脆性材料（玻璃、陶瓷等）和仅有很小塑性变形区的所谓小范围屈服材料。

2.1 断裂力学的模型

按不同的考虑方面裂纹有不同的分类方法。

1. 按裂纹的几何特征分类（图 2.1）

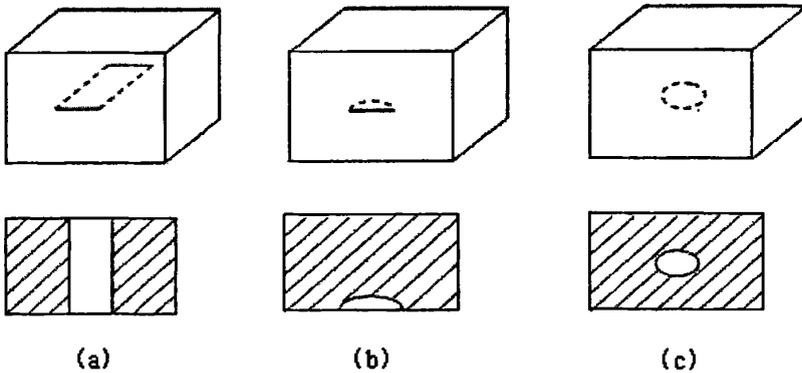


图 2.1 裂纹几何分类

Fig.2.1 Geometric fracture mode

- (1) 穿透（或贯穿）裂纹：裂纹沿构件整个厚度贯通（图 2.1(a)），根据裂纹在构件中的位置又分为中间裂纹和边裂纹。
- (2) 表面裂纹（图 2.1(b)）：深度和长度皆处于构件表面处的裂纹，常简化为半椭圆形

裂纹。

- (3) 深埋裂纹 (图 2.1(c))：完全处于构件内部的裂纹，常简化为片状圆形或片状椭圆形裂纹。

实际构件中所包含和各种形状的片状裂纹和非片状缺陷，都可酌情简化为上面三种裂纹中的一种。

2. 按裂纹的受力和断裂特征分类 (图 2.2)

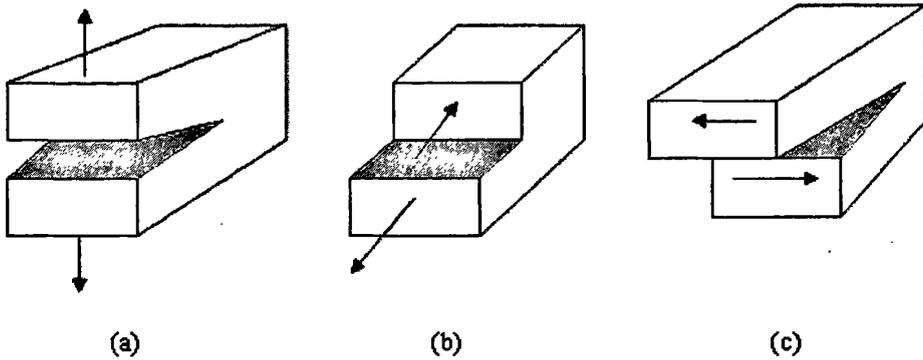


图 2.2 三种裂纹类型
Fig.2.2 Three crack modes

- (1) 张开型 (I 型) 裂纹—外加拉应力垂直于裂纹面，在外力作用下裂纹张开扩展，裂纹扩展的方向是沿着原裂纹方向 (x 轴方向)。
- (2) 滑开型 (II 型) 裂纹—在平行于裂纹方向作用着剪切应力，裂纹滑开扩展，裂纹扩展是在与原裂纹方向 (x 轴方向) 成某一角度的方向上。又称为平面内剪切型裂纹。
- (3) 撕开型 (III 型) 裂纹—作用着使上、下裂纹面错开的剪切应力，发生出平面位移，裂纹扩展方向是沿着原裂纹方向。又称为出平面剪切型裂纹。

上述三种类型中，I 型裂纹较 II 型或 III 型更为常见又更为危险。

如果裂纹体上同时作用者拉力和剪切应力或拉应力与裂纹线不垂直，裂纹成为同时存在 I 型和 II 型 (或 III 型)，称为复合型裂纹。

实际裂纹有许多是复合型裂纹，但从安全和方便考虑，有时把复合型裂纹当作 I 型裂纹来处理。

2.2 裂纹尖端附近的应力场、位移场

坐标原点取在裂纹尖点 (如图 2.3 所示)，采用弹性力学方法，在非常靠近裂纹尖

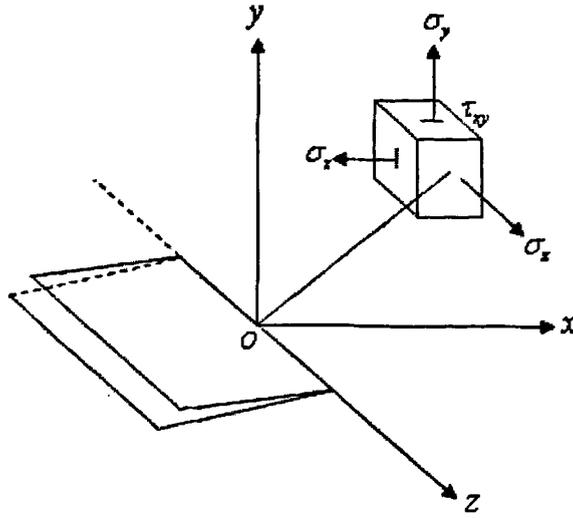


图 2.3 裂纹尖端应力示意图
Fig.2.3 Schematic of stress at crack tip

端处的应力场、位移场有如下的表达形式:

对 I 型裂纹:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \\ u &= \frac{K_I}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2.2)$$

其中, χ 为材料弹性系数

$$\chi = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面应力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面应变}) \end{cases}$$

G 为材料剪切模量, ν 为泊松比, $K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a}$, 称作应力强度因子, 下标 I 表示 I 型裂纹, Y 叫形状参数, 与裂纹的形状、位置等有关。

对 II 型裂纹

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ u &= \frac{K_{II}}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(2\chi + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[-(2\chi - 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\quad (2.4)$$

其中 $K_{II} = Y\tau\sqrt{\pi a}$ 。

对 III 型裂纹

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$W = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.6)$$

其中 $K_{III} = Y\tau_1\sqrt{\pi a}$ 。

2.3 断裂力学的准则

2.3.1 K 准则

对于载荷作用下的含裂纹构件, 当其应力强度因子 K 达到某一临界 K_C 时, 断裂就会发生, 以 I 型为例, 断裂准则可以表达为

$$K_I = K_{IC} \quad (2.7)$$

式中的右端项 K_{IC} 是表示材料抵抗宏观裂纹失稳扩展的韧性参数, 是材料本身物理属性, 应由实验定出。对于某种材料来说, 该参量是个与裂纹几何特征类型、构件形状、载荷类型、裂纹长度等因素无关的参数。

实验证明，在一定温度下，只要材料厚度 B 超过一定值 B_C ， K_{IC} 就是材料常数，如图 2.4 所示。

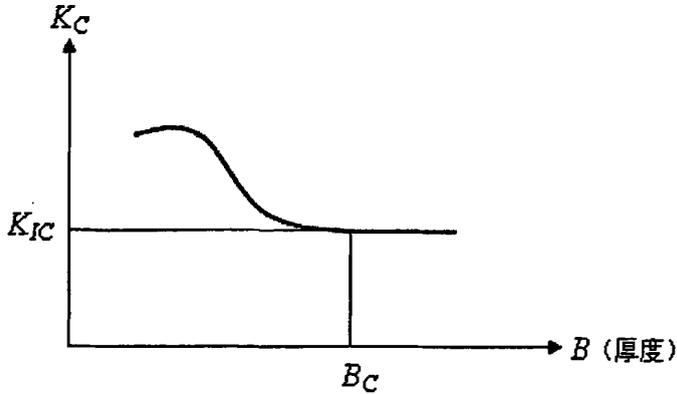


图 2.4 K_C 随厚度变化趋势

Fig.2.4 Variations of value of K_C with thickness

此时裂纹前缘材料基本处于平面应变状态，塑性区尺寸很小，发生脆性断裂。 K_{IC} 称作材料的平面应变断裂韧度，或平面应变应力强度因子临界值。当厚度小于 B_C 时，发生断裂的 K 值记为 K_C ，此时裂纹前缘基本处于平面应力状态（实际是处于平面应力与平面应变状态之间）。 K_C 不再是材料常数，但在一定的试件宽度和裂纹尺寸范围内，它仅是板厚的函数。 K_C 叫做材料的平面应力断裂韧度。

对于有足够厚度处于平面应变状态下的含裂纹构件，断裂时塑性变形很小，可以应用 K 准则，所以 K 准则是平面应变状态下的脆性断裂准则。而对处于平面应力状态下的构件，由于在裂纹失稳扩展之前会发生裂纹的稳定扩展及裂纹扩展阻力变化等情况，对准则的应用就会有更复杂的情况。

对于 II 型、III 型裂纹也可建立形同式(2.7)的准则，但由于重要性不及 I 型裂纹以及因为 K_{IIC} ， K_{IIIC} 难以确定，目前都是通过后面将要介绍的复合型断裂判据来建立 K_{IIC} ， K_{IIIC} 与 K_{IC} 之间的关系，以 K_{IC} 为基准得到 K_{IIC} ， K_{IIIC} 值。

2.3.2 能量释放率 G ， G 准则

下面从含裂纹体在裂纹失稳扩展一瞬间前后的能量转化平衡来得到断裂发生时应满足的关系式。

设有一厚度为 B 的裂纹体，其裂纹长度为 a ，若其裂纹长度扩展了 da ，则在此过程中载荷作的外力功为 dW ，体系弹性应变能变化了 dU ，形成裂纹新表面需要的表面能增量为 $d\Gamma$ 以及需要消耗的塑性功为 dP （对理想脆性材料 $dP=0$ ，对金属材料 $dP \gg d\Gamma$ ， $d\Gamma$ 可略去不计），假设过程为绝热，静载过程，不考虑热量变化和惯性力，则根据能量转化守恒定律，外力功等于体系内能，有

$$dW = dU + d\Gamma + dP \quad (2.8)$$

或写成

$$dW - dU = d\Gamma + dP \quad (2.9)$$

上式的右端 $d\Gamma + dP$ 项是裂纹扩展 da 过程中所需消耗的能量，也即是阻止裂纹扩展的能量，它的大小是由材料本身的韧性好坏来决定。上式的左端 $dW - dU$ （引入总势能 Π ， $\Pi = U - W$ 则 $-d\Pi = dW - dU$ ）表示裂纹扩展 da 时系统释放出来的能量，提供来作为驱动裂纹扩展的主动动力。定义裂纹扩展单位长度（厚度为单位厚）所释放出来的能量为裂纹扩展能量释放率（或叫做裂纹扩展力），记为 G ，则有

$$G = -\frac{\partial \Pi}{B \partial a} = \frac{\partial W}{B \partial a} - \frac{\partial U}{B \partial a} \quad (2.10)$$

而裂纹扩展单位长度弹性系统所需消耗的能量叫做临界裂纹扩展能量释放率或裂纹扩展阻力，记为 G_c 或 R ，则有

$$G_c = \frac{\partial \Gamma}{B \partial a} + \frac{\partial P}{B \partial a} \quad (2.11)$$

从而由 2.9 式所表达的裂纹扩展条件可写成

$$G = G_c \quad (2.12)$$

对 I 型裂纹，可写为 $G_I = G_{Ic}$ 。

这就是从能量分析出发得到的评定裂纹扩展的准则，称为 G 准则， G_I 、 G_{Ic} 的量纲为 [力]/[长度]，国际单位为 N/m。 G_{Ic} 同 K_{Ic} 一样，是材料常数，与裂纹长度无关，由实验测定。

2.3.3 能量释放率 G 与应力强度因子 K 的关系

已经建立了处理裂纹问题的两种判据：以能量平衡为基础的 G 判据和以裂纹尖端处应力场为基础的 K 判据。虽然这两种判据的出发点不同，但实际是一致的，两者之间存在一种确定关系。下列以 I 型为例，研究 a 长裂纹扩展 α 长时的能量释放。

由公式(2.1)可知，尖端处沿裂纹线上的应力分布为

$$\sigma_y \Big|_{y=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}$$

G_I 是由于裂纹扩展单位面积而使弹性体释放出来的能量，根据 Bueckner 给出的证明，它就等于裂纹扩展处的应力由开裂前的值降到开裂后的零值时所做的功，有关系式

$$G_I = \frac{1}{\alpha} 2 \int_0^a \frac{1}{2} \sigma_y \Big|_{y=0} v \Big|_{r=a-\xi}^{\theta=\pi} d\xi \quad (2.13)$$

其中 a 为裂纹扩展长度，式中的头一个 2 是因为有上下两个表面（即位移 v 的两倍）。注意， σ_y 是对原点为 o 的坐标的， v 是对原点为 o' 的坐标的。将 $\theta = \pi$ ， $r = a - \xi$ ， $G = E/2(1+\nu)$ ，平面应变时的 $\chi = 3 - 4\nu$ 代入位移 v 的公式(2.2)，得到

$$v \Big|_{r=a-\xi}^{\theta=\pi} = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{a-\xi}{2\pi}} \cdot K_I$$

因此

$$G_I = \frac{1}{\alpha} \int_0^a \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}} \frac{4(1-\nu^2)}{E} K_I \sqrt{\frac{a-\xi}{2\pi}} d\xi = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2$$

即平面应变时

$$G_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (2.14)$$

同样，得平面应力时

$$G_I = \frac{1}{E} K_I^2 \quad (2.15)$$

将式(2.14)，(2.15)合写为：

$$G_I = \frac{1}{E'} K_I^2 \quad (2.16)$$

其中

$$E' = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} (\text{平面应变}) \\ E (\text{平面应力}) \end{cases} \quad (2.17)$$

对于 II 型和 III 型裂纹也有类似的关系（设开裂沿原裂纹线）：

$$G_{II} = \frac{1}{E'} K_{II}^2 \quad (2.18)$$

$$G_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.19)$$

实验和理论皆表明 III 型裂纹是沿裂纹线方向扩展开裂，但对 II 型裂纹，扩展开裂方向不再沿原裂纹方向，而式(2.18)是在假设原裂纹方向开裂扩展的前提下导出的关系式，所以式(2.18)的 G_{II} 值仅是名义值。

在裂纹达到失稳扩展临界状态时， K 、 G 分别达到其临界值—断裂韧性 K_C 、 G_C ，显然 K_C 、 G_C 值也应满足 K 、 G 之间的关系式，有 (I 型)：

$$\text{平面应变} \quad G_{IC} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{IC}^2 \quad (2.20)$$

上述的 K 、 G 之间的对应关系表明， K 不仅表示裂纹尖端附近弹性应力场的强度，而且它的平方也确定了裂纹扩展时所释放出来的能量率，所以评定线弹性断裂问题，采用 K 准则和 G 准则是等价的。

2.3.4 J 积分理论

J 积分是个定义明确，理论上较严密的应力、应变场参数。它也是一个易于计算的平均场参数，且 J 积分的试验测定较简单可靠。但由于 J 积分的理论基础是全量理论，而不是更切合实际的增量理论，这就给 J 积分在理论上和应用上带来了限制。 J 积分还处于发展中。

2.3.4.1 J 积分的定义和守恒性

1. J 积分的定义

图 2.5 所示的线性或非线弹性体平板，开有一个穿透切口，围绕切口顶端 O 点按逆时针方向作一围线 Γ

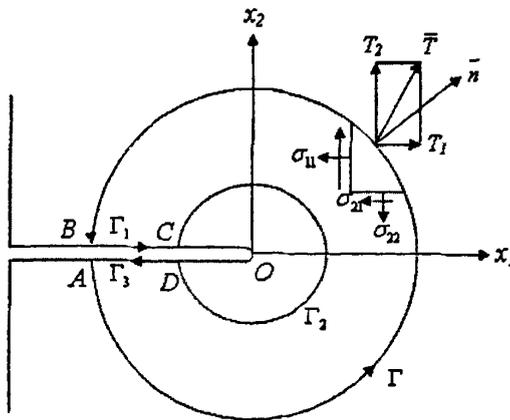


图 2.5 J 积分围线示意图

Fig.2.5 Schematic of integral contour for J integral

沿此围线作下式积分

$$J = \int_{\Gamma} \left[W(\varepsilon) dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] \quad (2.21)$$

这个积分就称作 J 积分。其中 $W(\varepsilon)$ 是平面体内的应变能密度：

$$W(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} (i, j=1, 2) \quad (2.22)$$

σ_{ij} 为应力分量 ($\sigma_{11} = \sigma_{x_1}$, $\sigma_{22} = \sigma_{x_2}$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{x_1 x_2}$)， ε_{ij} 为应变分量 ($\varepsilon_{11} = \varepsilon_{x_1}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{x_2}$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \gamma_{x_1 x_2}$)， \bar{T} 是作用在积分路线 Γ 上任一弧长 ds 的应力矢量，其分量为 $T_1 = T_{x_1}$, $T_2 = T_{x_2}$ 。 \bar{u} 是该处的位移矢量，其分量为 u_1 , u_2 。 \bar{n} 是弧线 ds 的外法线单位矢量，其分量即方向余弦 $n_1 = n_{x_1} = \cos(n, x_1)$, $n_2 = n_{x_2} = \cos(n, x_2)$ 。积分路径 Γ 之所以是任意的，这是因为 J 积分是一个和路径取法无关的常数，即具有守恒性。从平面体中开一切口而非裂纹，是为了消除尖端的奇异性，这是证明守恒性所要求的。

2. J 积分的守恒性

J 积分的守恒性是指 J 积分的数值与积分路径无关。

J 积分守恒性须在以下条件下才成立：

1) 在公式推导中需应用小变形的几何关系：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

若将切口改为裂纹，在裂纹尖端处存在高应变区，几何方程将增加一些二次项而成为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

这时 J 积分的守恒性就不能证明了。所以在很靠近裂纹尖端处 J 的守恒性尚未得到证明。但是，在稍微离开裂纹尖端的塑性区中，用有限元法，证明守恒性还是成立的。

2) 在公式推导中，应用了全量理论的结果 $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$ ，因此， J 积分的路径无关性是不允许卸载的。

3) 在公式推导中引用了无体积力的平衡微分方程，故积分围线所包围的面积中不能有体积力。

这就是 J 积分守恒性存在的前提条件。

J 积分的守恒为 J 积分的计算提供了方便, 使得能够避开复杂的裂纹尖端处的应力、位移场, 通过离开尖端处的应力、位移场甚至远处的弹性应力、位移场进行计算。这些应力、位移场可以有有限元或其他方法确定。

2.3.4.2 在线弹性条件下 J 积分与 K_I, G 的关系

1. 平面应变情况

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 = G \quad (2.23)$$

2. 平面应力情况

$$J = \frac{1}{E} K_I^2 = G \quad (2.24)$$

式(2.23), (2.24)表明, 至少在线弹性阶段 J 积分有了明确的物理意义。在线弹性阶段 J 积分和 K_I 有对应的关系, 因此 J 积分也是描述裂纹尖端附近应力场强度的参量, 当 K_I 达到其临界值 K_{IC} 时, J 积分也达到一个临界值 J_{IC} , 即 J 积分准则 $J=J_{IC}$ 与 K 准则在线弹性阶段是等效的。

公式还表明, 在线弹性阶段, J 积分就是应变能释放率 G , 即裂纹扩展单位面积时所释放出来的变形能。

2.3.5 复合型断裂准则

前面研究的是纯 I、II、III 型裂纹问题, 在实际构件中, 裂纹体往往处于 I、II、III 型复合情况下工作, 因此需要建立复合条件下的断裂准则。作为复合断裂准则, 必须回答以下两个问题:

1. 确定裂纹扩展的方向角。
2. 确定裂纹出现时失稳扩展的条件。

所有的复合断裂准则都是要确定一个综合的相当参数, 该参数可以取为不同的应力型、位移型和能量型而建立了许多不同的理论, 下面介绍其中几个主要的理论。

2.3.5.1 最大拉应力准则

在 I-II 型复合问题中, 裂纹尖端附近应力场由式(2.1)和式(2.3)相叠加而成。如果转变成极坐标形式, 给出:

$$\sigma_r = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{2\pi r}} K_I (3 - \cos \theta) + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{2\pi r}} K_{II} (3 \cos \theta - 1)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{2\pi r}} [K_I(1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta] \quad (2.25)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2\sqrt{2\pi r}} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)]$$

最大拉应力准则的基本假定是：

1. 裂纹沿 σ_{θ} 最大的方向 θ_0 开裂。
2. 当 θ_0 方向的 σ_{θ} 达到临界值时，裂纹就失稳扩展。根据上面假定，可用下式

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}(K_I, K_{II}, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.26)$$

确定开裂角 θ_0 ，将 σ_{θ} 代入，就得到确定 θ_0 的公式。

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (2.27)$$

当沿 θ_0 方向的周向应力 σ_{θ} 达到临界值 $\sigma_{\theta c}$ 时，裂纹失稳扩展，即

$$\sigma_{\theta}(K_I, K_{II}, \theta_0) = \sigma_{\theta c}$$

临界值 $\sigma_{\theta c}$ 可取 I 型断裂的周向应力 $\sigma_{\theta}(K_{IC}, 0, 0)$ ，由此，得到临界失稳条件：

$$\cos \frac{\theta_0}{2} (K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0) = K_{IC} \quad (2.28)$$

如果把上式左端看成相当应力强度因子

$$K_e = \cos \frac{\theta_0}{2} (E_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0)$$

则式(2.28)成为

$$K_e = K_{IC}$$

这样一来，复合型问题就化为当量 I 型问题了。

2.3.5.2 应变能释放率准则

从变形能释放率出发提出的复合型断裂准则，其假设认为：

1. 裂纹沿着应变能释放率达到最大的方向扩展，即

$$\frac{\partial G_{\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 G_{\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (2.29)$$

由上式可确定开裂角 θ 。

2. 当 $\theta = \theta_0$ 方向上的应变能释放率达到临界值时，裂纹开始扩展，即

$$G_{\theta}|_{\theta=\theta_0} = G_{IC} \quad (2.30)$$

以 I+II 复合型为例, 根据式(2.29)、(2.30)推导出确定 θ_0 的公式和断裂判定公式, 可以发现, 它们恰好与最大拉应力复合型准则的公式(2.27)、(2.28)相同。所以, 最大拉应力的方向就是应变能释放率最大的方向, 最大拉应力达到临界值时, 应变能释放率也达到了临界值。

2.3.5.3 应变能密度因子准则

应变能密度因子准则由薛昌明 (G.C.Sih) 提出, 是在以裂纹尖端为圆心的同心圆上比较应变能密度, 简称 S 准则。

在一般载荷下, 裂纹尖端附近应力场为:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - 2\nu \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{平面应变}) \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

由弹性力学知道, 应变能密度为

$$W = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad (2.32)$$

将(2.31)代入(2.32), 整理后得到裂纹尖端附近的应变能密度

$$W = \frac{S}{r}$$

$$\text{其中 } S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2 \quad (2.33)$$

式中

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi G} (1 + \cos \theta)(\chi - \cos \theta)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\pi G} \sin \theta [2 \cos \theta - (\chi - 1)]$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\pi G} [(\chi - 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \quad (2.34)$$

$$a_{33} = \frac{1}{4\pi G}$$

$$\chi = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} (\text{平面应力}) \\ 3-4\nu (\text{平面应变}) \end{cases} \quad (2.35)$$

可以看出, W 具有 $\frac{1}{r}$ 奇异性, 而 S 是表示尖端附近应变能强弱程度的单一参数, 叫做应变能密度因子, 它是 θ 和 ν 的函数。

S 准则的基本假设为:

1. 裂纹沿 S 最小方向开裂, 即

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (2.36)$$

根据上式可确定开裂角 θ_0 。

2. 当 S_{\min} 达到临界值 S_C 时, 裂纹失稳扩展, 即

$$S_{\min} = S_C \quad (2.37)$$

其中 S_C 类似于 G_{IC} , K_{IC} , 是材料常数, 标志材料抵抗裂纹扩展的能力。不论对 I 型或复合型, S_C 应该有相同的值, 由此可以建立 S_C 与 G_{IC} , K_{IC} 之间的关系。

3 界面断裂力学理论^[7]

3.1 界面的力学模型

3.1.1 界面相、界面层与中间层

物理意义上所谓的界面，即材料的结合部，实际上不可能是一个理想的面，而是一个具有十分复杂的力学行为的中间材料所占据的区域，或一层微观上表面不平的粘接剂。我们把材料组织不同于被结合母材的结合部，称为界面层。而把界面层内的中间材料或粘接剂，统称为界面相。由于界面层及界面相对界面的力学性能起决定作用，其性能决定了结合是否牢固。由于界面层一般很薄，通常在几个微米，大致数百个微米的量级，并且材料组织分布又很复杂，要定量评价界面相得力学性能几乎是不可能的。因此，在力学分析中考虑界面相，是不现实的。另一方面，工程实际问题中所要求的，通常也不是界面相本身的强度或力学特性，而是结合材料整体的强度行为。由于结合材料存在多种可能的破坏形式，结合材料的强度与界面相的强度一般是不一样的。换句话说，即使能对界面相的力学行为作出定量的描述，也并不意味着能对结合材料整体的强度作出定量的评价。

有时，出于结合工艺的要求，也会在结合部插入另外一种材料。此时，实际上会形成两个界面结合部。我们把这种在相距较近的两个界面之间，而且材料特性相对稳定的层，称为中间层或夹层，以别于界面层。

3.1.2 力学模型的必要性和合理性

从力学分析和评价的角度看，将复杂的界面相和界面层简化为理想的界面（见图 3.1）。

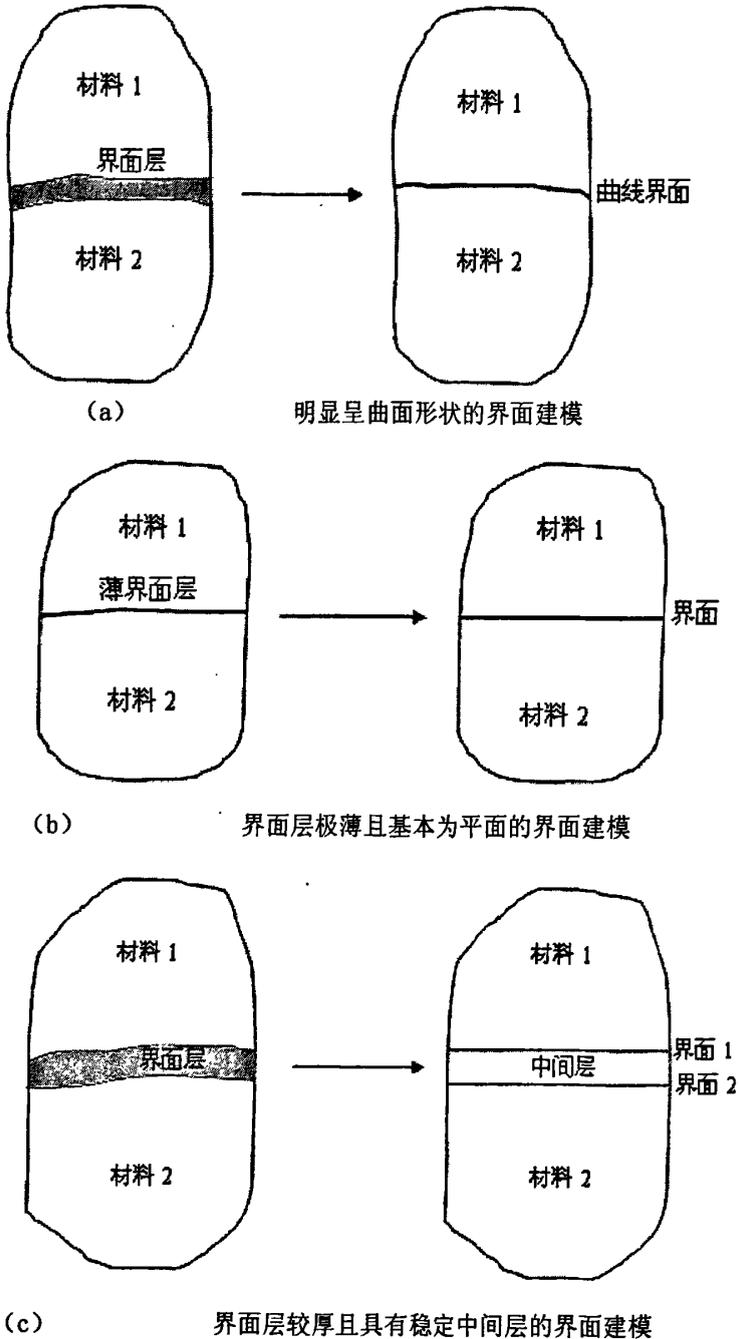


图 3.1 界面的力学模型

Fig.3.1 Mechanical model for interface

进而分析出能够描述界面的受力或变形状况的参数,利用该参数作为评价参数,通过实验去决定对应的界面特性(如强度等),则复杂的界面层的影响实际上已被包含在测得的界面特性值中,而在分析界面的受力或变形状况的参数时,已没有必要考虑界面相对其的影响了。必须指出,这种考虑方法实际上分析的是界面的宏观性能,在连续介质力学的范畴内是合理的。但是,由于将界面层简化成了一个没有厚度的面,界面相组织对界面强度特性值的影响,就无从研究了。因此,这种考虑方法实际上是站在评价的角度,即认为界面强度特性虽然依存于界面层的组织,但对于给定的结合材料,它是确定不变了的。对于不同的结合方法、不同的界面相组织,必须另行测定其界面强度特性值。这样建立起来的界面的力学模型的特点是界面不具备厚度,但具有自身固有的强度特性。

通过以上讨论,现在我们可以给出较为严格的力学模型意义上的界面的定义:所谓界面,是指材料内的物性间断面或不连续面,在界面两侧,材料的物性截然不同,它是对复杂的结合部界面层的必要简化。虽然它被模型化成了一个没有厚度的面,但是界面本身却是具有自身的强度特性的。它的强度特性,决定于界面相的材料及其组织结构。必须注意的是,由于结合界面具有本身固有的强度特性,即使是同种材料被结合在一起,其强度评价方法也是与均质材料的情况不相同的。

将实际的结合部简化为力学意义上的界面的过程,称为界面的力学模型建模,通常需要根据实际结合部的具体情况来决定是曲面界面还是平面界面,是单个界面还是多个界面。界面层较薄时,简化为一个界面,而当界面层较厚时,应当作两个界面处理。值得指出,对结合部的力学处理,除以上介绍的结合界面模型外,还可以有其他方法,如采用弹簧模型和界面单元模型。与其他模型相比,上述界面模型的特点是,在作应力等参数分析时,不必考虑界面层的影响(被放在了后续的评价方法里考虑),故而不必引入新的参数,可以避免认为设定计算条件的影响。

3.1.3 界面的分类

1. 完全结合界面

亦称理想界面、完全界面。指在界面上没有任何宏观缺陷,满足以下界面连续条件的界面(见图 3.2(a)),

$$P_{i1} = -P_{i2}, u_{i1} = u_{i2}, i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

式中, P 为面力, 与应力和界面的法线矢量之间的关系由柯西公式 $P_i = \sigma_{ij} n_j$ 给出; u_i 表示 i 方向的位移, 下标 1、2 表示界面两侧的材料所对应的物理量。式 (3.1) 通常

被称为界面的面力与位移连续条件，对曲面界面、平面界面都是成立的。以图 3.2(a)的二维界面为例，可进一步描述为

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2}, \tau_{xy1} = \tau_{xy2}, u_1 = u_2, v_1 = v_2$$

上式即为界面的应力与位移连续条件。由式(2.1)及弹性力学的几何与物理关系，当界面两侧的材料不同时，可以推出如下结论：（1）在垂直与界面（曲面界面时其切平面）的方向上，界面两侧的正应变一般是不连续的；（2）界面两侧的剪应变一般是不连续的；（3）在平行于界面（曲面界面时其切平面）的方向上，界面两侧的正应力一般是不连续的。这些特性，就是所谓的界面不连续性。以图 3.2(a)的二维界面为例，可描述为

$$\varepsilon_{y1} \neq \varepsilon_{y2}, \gamma_{xy1} \neq \gamma_{xy2}, \sigma_{x1} \neq \sigma_{x2}$$

但这些不连续量之间并不是相互独立的，而要受式(2.1)的约束。如图 3.2(a)的二维界面，就有如下的关系

$$(\kappa_2 + 1)\sigma_{x2} = \Gamma(\kappa_1 + 1)\sigma_{x1} + (\Gamma(\kappa_1 - 3) - (\kappa_2 - 3))\sigma_y$$

$$7 \frac{\Gamma(\kappa_2 + 1)}{\kappa_2 - 1} \varepsilon_{y2} = \frac{\kappa_1 + 1}{\kappa_1 - 1} \varepsilon_{y2} + \left[\frac{3 - \kappa_1}{\kappa_1 - 1} - \frac{\Gamma(3 - \kappa_2)}{\kappa_2 - 1} \right] \varepsilon_x$$

$$\gamma_{xy2} = \gamma_{xy1} / \Gamma$$

$$\Gamma = \mu_2 / \mu_1, \kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{平面应变} \\ (3 - \nu) / (1 + \nu) & \text{平面应力} \end{cases}$$

式中， μ ， ν 为材料的剪切弹性模量和泊松比。

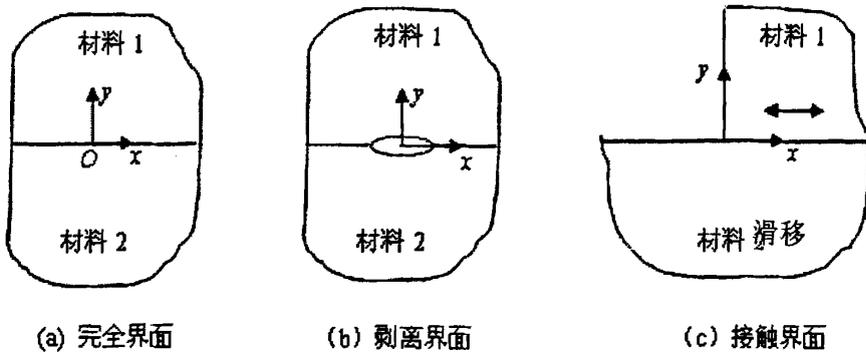


图 3.2 界面的分类

Fig.3.2 Classification of interface

2. 剥离界面

当界面处有未结合部或较大的缺陷和孔穴时，即使两侧材料的边界在界面处有相同的几何位置，但两侧是分离的情况（见图 3.2(b)），必须作为剥离界面处理。

剥离界面必须满足以下表面自由条件

$$P_{n1} = P_{n2} = 0, i = 1, 2, 3 \text{ 在剥离区内} \quad (3.2)$$

对于图 3.2(b)所示的二维界面，可进一步描述为

$$\sigma_{y1} = \tau_{xy1} = 0, \sigma_{y2} = \tau_{xy2} = 0 \text{ 在剥离区内}$$

3. 接触界面

指两材料未结合，但由于外力或残余应力的作用而接触在一起的界面(图 3.2(c))。接触界面在变形后，通常可以分为三个区域，即粘着区、滑移区和开口区。

3.1.4 界面上的应力奇异点

由于被结合材料的机械特性的不同，界面上的边界条件，实际上也代表了一侧的材料对另一侧材料的变形约束。这种约束条件的存在，会引起界面及其附近的应力集中，尤其在界面几何形状的突变处，应力集中会变得非常严重，以至于在弹性学意义上，在突变处的应力趋于无穷大。我们把弹性学范畴内，应力在某点趋于无穷大的特性称为应力奇异性，而该点则被称为奇异点，或简称为奇点。图 3.3 给出了结合界面产生奇异点的情况。

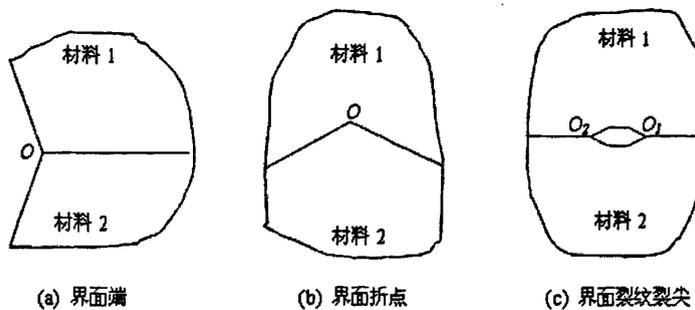


图 3.3 界面上的应力奇异点
Fig.3.3 Stress singularity on interface

3.1.5 界面上的应力奇异点

所谓界面强度，是指破坏沿界面发生时的界面承载能力。对于没有或不考虑界面奇点的情况，目前通常采用垂直于界面的正应力（称为剥离应力）和作用与界面的剪应力（实际上是作用于界面的面力），作为界面强度的评价参数。与之对应的强度值，分别称为界面的剥离强度和剪切强度。一般来说，界面的抗剪切能力要优于其抗剥离的能力。由于界面两侧材料性质不同，结合材料中不可避免地会存在结合残余应力（在界面奇点处，也具有应力奇异性）。残余应力对界面强度、结合材料的强度影响很大，某些结合材料甚至会仅在残余应力作用下发生破坏。

所谓结合材料的强度，是指结合材料发生破坏时的承载能力。根据破坏的形式，可以是界面强度，也可以是考虑残余应力作用下的母材强度。而具体发生何种形式的破坏，还依存于受载的形式以及残余应力的大小。因此，结合材料的强度评价，不再是对于单一破坏形式的评价，而必须根据具体的结构和受载情况，考虑各种可能的破坏形式，以其中最小的承载能力，作为结合材料的强度。

另一方面，界面奇点，如界面端和界面角点，在实际工程中通常是难以避免的。此时，由于奇异应力场的存在，界面破坏或结合材料的破坏就不能再以应力作为评价参数，而必须以描述奇异性强弱和奇异应力场大小的参数来进行评价。严格地讲，这已经属于界面韧性或材料韧性的范畴。但从结合材料或界面的承载能力的角度，这样的评价也常被称为结合材料的强度评价。因此，所谓界面的强度特性，通常也包括界面的韧性特性。必须指出，即使破坏是在母材内发生的，由于应力奇异性指数与均质材料裂纹问题不同，此时所谓的韧性是与断裂力学中韧性概念有所不同的。

3.2 界面裂纹裂尖奇异应力场

3.2.1 Dundurs 参数

结合材料的弹性常数，从直观上来讲，由于是两种不同的材料结合在一起，共应有 4 个弹性常数，即：两个杨氏模量或剪切模量，以及两个泊松比。但是，对于平面问题，尤其是对其面内的应力和应变的影响，这四个材料常数对结合材料应力或变形的影响，并不是相互独立的，而可以用两个新的组合材料参数来描述，称为 Dundurs 参数，也称异材参数。

由复变应力函数理论和界面连续条件，经过推导可得到 Dundurs 参数为：

$$\alpha = \frac{(\kappa_2 + 1) - \Gamma(\kappa_1 + 1)}{(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 + 1)} = \frac{\mu_1(\kappa_2 + 1) - \mu_2(\kappa_1 + 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)}$$

$$\beta = \frac{(\kappa_2 - 1) - \Gamma(\kappa_1 - 1)}{(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 + 1)} = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)}$$
(3.3)

$\mu = E/[2(1+\nu)]$ ，其中的卡帕参数为：平面应变时， $\kappa = 3 - 4\nu$ ，平面应力时 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 。

由于 Dundurs 参数减少了材料常数的个数，使材料常数对应力和变形的影响变得相对容易把握，便于选择合适的材料组合以增加结合材料的强度，故它被广泛地用来描述结合材料的弹性特性。但必须注意，它本质上只能用来描述平面问题中材料常数的影响，并且，当需要表征面外方向的应力或应变时，仅凭这两个参数也是不够的。当结合材料的材料 1, 2 被交换时，Dundurs 参数的符号相反。另外，由于 Dundurs 参数只有两个，而独立的材料常数则有四个，因此，已知材料组合及其各自的材料特性，则其 Dundurs 参数是确定的，但已知 Dundurs 参数，则是不能唯一地确定具体的材料组合及其相应的工程材料常数的。

3.2.2 界面裂纹的振荡应力奇异性

在图 3.4 中，令 $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ ，即得界面模型，如图 3.5 所示。

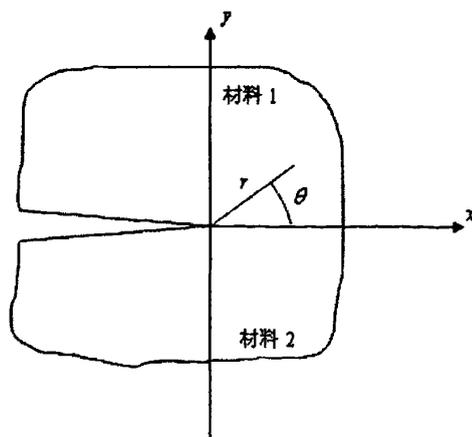


图 3.5 界面裂纹模型及裂尖坐标系

Fig.3.5 Interface crack model and coordinate system on crack tip

由第 3.2 节的分析可知，界面裂纹裂尖的特征值为

$$\lambda = 1/2 + i\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$$

裂尖的附近的应力和位移分布如下

$$\sigma_{\theta_j} + i\tau_{r\theta_j} = \frac{r^{i\varepsilon} \bar{B}_j \lambda}{\sqrt{r}} [e^{\varepsilon\theta} e^{\frac{1}{2}i\theta} + e^{(-1)^{j-1}2\pi\varepsilon} e^{-\varepsilon\theta} e^{\frac{3}{2}i\theta}] + \frac{r^{-i\varepsilon} B_j \bar{\lambda}^2 e^{\varepsilon\theta}}{\sqrt{r}} [e^{\frac{1}{2}i\theta} - e^{\frac{3}{2}i\theta}] \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} 2\mu_j [u_{r_j} + iv_{\theta_j}] &= \sqrt{r} r^{i\varepsilon} \bar{B}_j \lambda e^{\varepsilon\theta} [e^{\frac{3}{2}i\theta} - e^{\frac{1}{2}i\theta}] \\ &+ \sqrt{r} r^{-i\varepsilon} B_j [\kappa_j e^{\varepsilon\theta} e^{\frac{1}{2}i\theta} - e^{(-1)^{j-1}2\pi\varepsilon} e^{-\varepsilon\theta} e^{\frac{3}{2}i\theta}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

必须指出, 式(3.13)的导出, 是以裂尖附近裂纹面自由为前提条件的。裂尖先端界面上的应力可表示为

$$\sigma_y + i\tau_{xy} \Big|_{\theta=0} = \frac{k_1 + ik_2}{\sqrt{2\pi r}} r^{i\varepsilon}, \quad k_1 + ik_2 = \sqrt{2\pi} \lambda \bar{B}_j [1 - e^{(-1)^{j-1}2\pi\varepsilon}] \quad (3.14)$$

式中 k_1 , k_2 称为界面裂纹的应力强度因子。将裂纹面的开口位移在极坐标系下定义为

$$\delta_r = u_{r_1}(r, \pi) - u_{r_2}(r, -\pi), \quad \delta_\theta = v_{\theta_1}(r, \pi) - v_{\theta_2}(r, -\pi)$$

由于坐标变换的关系, 易知有

$$\delta_y + i\delta_x = \frac{k_1 + ik_2}{2(1+2i\varepsilon) \cosh(\varepsilon\pi)} \left\{ \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right\} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} r^{i\varepsilon} = -(\delta_\theta + i\delta_r) \quad (3.15)$$

根据式(3.14)和式(3.15), 可知裂尖附近的应力和位移分布如图 3.6 所示。应力发生振荡的区域, 称为应力振荡区 (oscillation region), 振荡应力的包络线呈 $1/\sqrt{r}$ 的分布。裂纹面相互嵌入的区域, 称为嵌入区 (overlapping region)。必须指出, 振荡区外应力分布也不呈 $1/\sqrt{r}$ 的分布, 该区域称为振荡影响区。振荡影响区实际上就是界面裂纹裂尖奇异应力场的支配区。因此, 即使不考虑应力振荡区, 界面裂纹裂尖附近的应力分布, 也是与均质材料裂纹的结果有本质区别的。振荡区的大小, 是与应力强度因子的比 (模态比) 有关的。

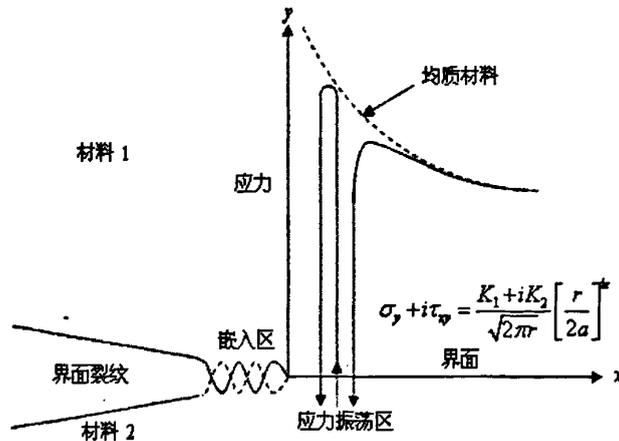


图 3.6 界面裂纹裂尖应力与裂纹面开口位移示意图

Fig.3.6 Stress on crack tip of interface crack and opening displacement

由于裂纹面的相互嵌入实际上是不可能的，故严格地讲，以上理论解是有缺陷的。但是，如果能够证明，当相互嵌入区很小时，即使考虑界面裂纹裂尖附近的接触，振荡影响区即裂尖奇异应力场支配区内的应力分布也没有太大的改变，则显然以上理论仍具有实用意义。

3.3 界面断裂准则

要对结合材料进行定量的强度评价，在求得了界面裂纹的应力强度因子或界面端的奇异应力场后，还必须通过破坏准则才能进行分析、判断。但是，关于结合材料的破坏准则，由于振荡应力奇异性和界面端的非 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性，是不能直接采用材料力学或断裂力学的破坏准则的，而必须根据界面问题的特征，重新建立相关的破坏准则。然而，由于结合材料破坏形式的多样性，我们必须首先建立对应于各种破坏形式的破坏准则，然后才能判断何种形式的破坏最先发生，才能正确地评价结合材料的强度。

4 断裂力学的有限单元法^[22]

用理论分析方法计算 K 等断裂参数值仅在裂纹形状、结构几何和载荷条件都简单的情况下才有效,对于工程实际结构中常遇到的复杂情况必须采用数值方法求解,对于三维问题和弹塑性情况就更是这样。有限单元法是一种简单而有效的数值方法。

线弹性断裂力学的有限单元方法包括直接法和间接法两大类,直接法中有普通单元法、奇异单元法、杂交元法和边界元法,间接法中有柔度法, J 积分法,虚裂纹扩展法,虚裂纹闭合法等方法。由直接法可直接求出 K_I , K_{II} , K_{III} 值,而间接法求出的是 J 积分或能量释放率 G ,间接求出 K 值。

4.1 普通单元法

普通用于强度分析的有限单元法可直接用来计算应力强度因子 K ,对含裂纹体划分单元,愈靠近裂纹尖端单元分得愈细,可计算得到各节点的位移和应力,再根据裂纹尖端附近位移或应力与 K 的关系式,就可求得 K 值。根据是用位移或应力求 K 的不同分别叫位移法或应力法。

普通单元法要求计算单元多,在尖端附近单元必须很密(单元尺寸约为 $10^{-2}a$)才能有足够的精度。它的优点是简单。其中位移法的精度略高于应力法。

4.2 奇异单元法

该方法是对围绕裂纹尖端的单元构造一种特殊单元—奇异单元,和它相连的外面仍采用普通单元。奇异单元的构成特点是在位移离散式中直接包含所要求的奇异项。已经研究出许多不同的奇异单元,图 4.1(a), (b) 是一种节点在裂纹尖端的三角形奇异单元,图 4.1(c) 是一种将裂纹尖端嵌入内部的奇异圆单元。

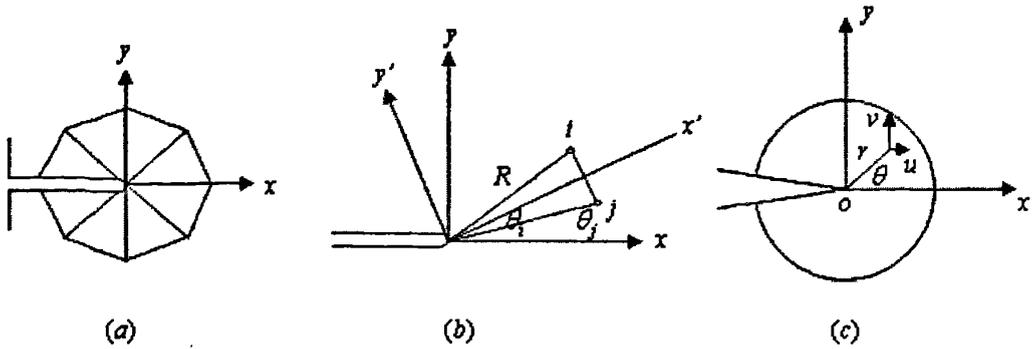


图 4.1 (a)、(b)三角形奇异单元; (c)奇异圆单元

Fig.4.1 (a)、(b)Triangular singular element;(c)Circular singular element

奇异单元法的优点是裂纹尖端处单元划分不必太细，不需要插值能直接算出 K 值，缺点是需要两种单元和单元间存在位移不协调问题。

4.3 奇异等参单元法

奇异等参单元是奇异单元的一种。Henshell 和 Barsoum 最早指出，只要将八节点二次等参元的两个中间节点向裂纹尖端所在的角节点移动至 $1/4$ 边长处，则该单元就构成奇异等参单元（图 4.2），可以证明，沿着单元的两条边线 1-2，1-4，在裂纹尖端所在的角节点处应变、应力具有 $1/\sqrt{r}$ 奇异性。计算时只要采用普通的八节点等参元程度

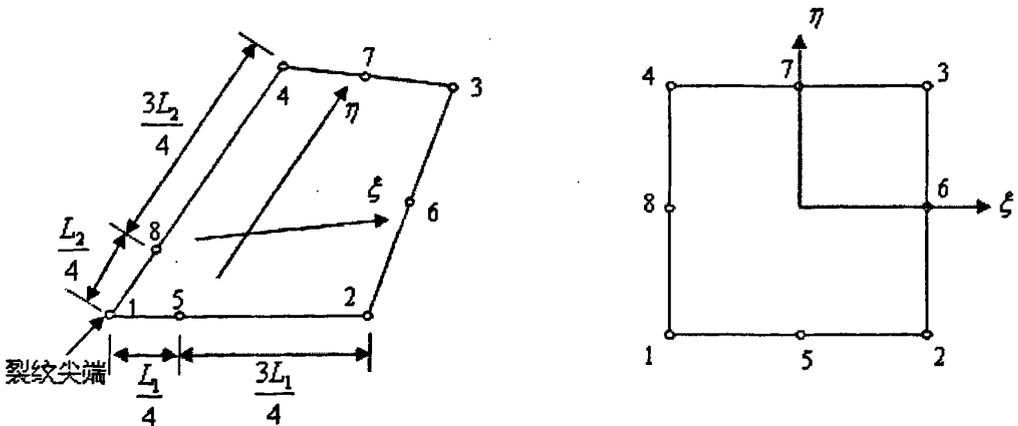


图 4.2 四边形奇异等参单元

Fig.4.2 Quadrilateral singular isoparametric element

划分好单元后，只需将围绕裂纹尖端处的单元作成奇异等参单元就可直接算出 K 值，所有单元之间的位移都是协调的。可见，奇异等参元具有上节的奇异单元的优点，且又克服了它的缺点。

进一步研究证明，对于图 4.2 所示的奇异等参元仅沿边线有奇异性存在，而沿单元内任一条过端点的直线上并不存在这种奇异性，而应变能在端点处却具有奇异性，这是不应该的，因为应变能是受力后贮存于物体中的能量，应该是有界的。这都影响了这种单元的计算精度。实用上更常使用的是一种退化奇异等参元，这种单元是将图 4.2 的四边形单元一条边的三个节点聚为一个节点而构成的（图 4.3），该单元具有以下优良的性质。

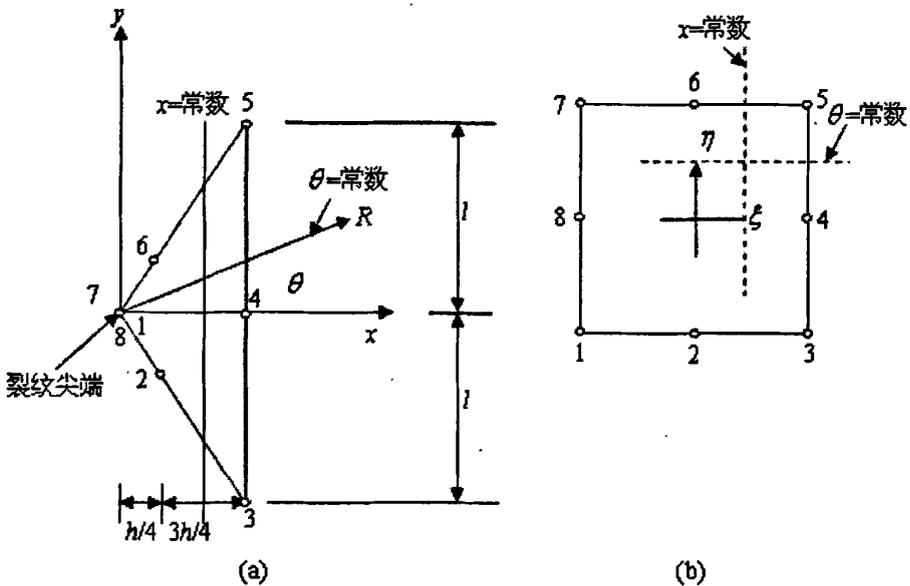


图 4.3 二维退化奇异等参单元

Fig.4.3 Two-dimensional regressive singular isoparametric element

1. 保证了应变能有界的要求。
2. 当使裂纹尖端的三个节点的位移相等时，应变、应力在裂纹尖端具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性，此时用于线弹性应力强度因子的计算。
3. 允许裂纹尖端的三个节点发生相对位移时，应力、应变在裂纹尖端处具有理想塑性断裂力学所要求的奇异性，可用于理想塑性断裂参数的计算，此时裂纹尖端发生钝化。

4. 沿单元内部过裂纹尖端的任一直线上, $r \rightarrow 0$ 时具有上述的奇异性。

该单元的上述优点使计算具有高的精度, 实用计算中应优先采用这种单元。

上面讨论的单元能够方便地推广到三维情况, 这就是可用于三维断裂分析的退化 20 节点奇异等参元 (如图 4.4(b)), 它是由图 4.4(a) 的普通 20 节点等参元退化而成的, 有一个面 ($\xi = -1$ 面) 退化成为一条线 (13-14-15 线), 设该线为裂纹的前缘线, 再将邻近该线的四个中间节点 (9、10、11、12) 移到 $1/4$ 边长处, 就构成了退化 20 节点奇异等参元。

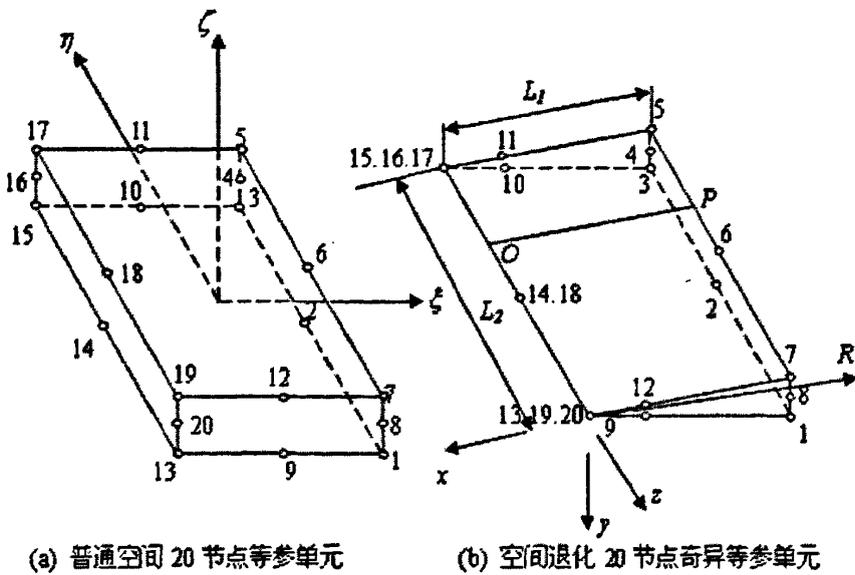


图 4.4 三维退化奇异等参单元

Fig.4.4 Three-dimensional regressive singular isoparametric element

4.4 J 积分法

对于平面问题, Rice 给出的 J 积分公式为

$$J = \int_{\Gamma} W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dS \quad (4.1)$$

当对含裂纹结构完成有限元分析得到位移和应力分布后, 对任一取定的回路线完成上式计算就得到 J 积分值。

在线弹性情况下, J 积分等于能量释放率 G , $J=G$ 。对于 I 型裂纹可由下式求得 K_I 值:

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (\text{平面应变时 } E' = \frac{E}{1+\nu^2}, \text{ 平面应力时 } E' = E) \quad (4.2)$$

对于平面混合型裂纹:

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (4.3)$$

这样由 J 积分值可估计 $K_I^2 + K_{II}^2$, 但不能分别估计 K_I^2 , K_{II}^2 值。公式 (4.2), (4.3) 对于各种能量方法都是成立的。

由于 J 积分与路径无关, 所以计算时可取离开裂纹尖端一定距离的路径, 这样, 在裂纹尖端处单元不必分得很细也能保证高的精度, 这是 J 积分法的主要优点。为计算式 (4.1) 的回线积分值, 需要根据有限元计算时得到的节点位移和应力值进行插值计算, 是 J 积分计算中辅加的较繁杂的工作。

有 Rice 定义的 J 积分公式 (4.1) 只适用于二维问题, 为了扩展到三维情况进行了许多尝试, 提出不同的三维 J 积分表达式, 此时积分是沿一定的曲面进行, 而曲面的位移不易确定, 这是三维 J 积分计算的新增加的困难。

4.5 虚裂纹扩展法

这是一种能量方法, 是通过虚裂纹扩展这一技术求出裂纹的能量释放率 G , 该方法也叫能量释放率法。

能量释放率 G 为

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \approx \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\Delta a} \quad (4.3)$$

$$\Pi = U - W$$

式中 Π 为总势能, U 为应变能, W 为外力功, Π_1 、 Π_2 是裂纹长分别为 a 和 $a + \Delta a$, 而其它条件 (裂纹体几何、载荷、边界条件) 不变的两个裂纹体的总势能。进行有限元计算时, 对这两个裂纹体分别计算后, 根据式 (4.3) 就可计算出 G 值。这需要单独求解两次, 不经济。Parks 和 Hellen 做出了简单的改进, 可以避免这种两次求解, 下面叙述这种方法。令 k 、 u 、 f 分别为具有初始裂纹 a 的结构的刚度矩阵、位移列阵和载荷列阵, Δk 、 Δu 为裂纹长度增加 Δa 时, 刚度矩阵 k 和位移列阵 u 的变化 (载荷 f 保持不变)。对于初始裂纹为 a 的裂纹体, 有

$$ku = f \quad (4.4)$$

该裂纹体具有的总势能为

$$\Pi_1 = U - W = \frac{1}{2}u^T ku - u^T f \quad (4.5)$$

对于裂纹长为 $a + \Delta a$ 的裂纹体，具有的总势能为

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}(n + \Delta u)^T (k + \Delta k)(u + \Delta u) - (u + \Delta u)^T f \quad (4.6)$$

由式(4.5)、(4.6)计算总势能的变化，忽略二次项，并利用式(4.4)，则有

$$\Delta \Pi = \Pi_2 - \Pi_1 = \frac{1}{2}u^T \Delta k u \quad (4.7)$$

显而易见，为确定 $\Delta \Pi / \Delta a$ ，仅需要：

1. 通过一次有限元计算出位移 u 。
2. 计算出裂纹长度改变 Δa 时刚度变化 Δk 。

为使计算 Δk 的工作量最少，可在虚裂纹扩展是仅改变少数几个单元的几何形状。

以二维问题为例，有图 4.5(a)、(b)两种型式，在图 4.5(a)中，结构体分为三个区域，I 区域内各单元几何形状不变，III 区域随裂纹尖端一起平移 Δa 长，其内各单元几何位置也保持不变，所以区域内各单元的 Δk 值为零，仅 II 区域内的单元在裂纹虚拟扩展 Δa 时发生形状变化，存在不为零的 Δk ，所以 Δk 的计算仅需考虑 II 区域内的各单元。当区域 III 减小为零，仅存在 I、II 两个区域时就变为图 4.5 (b)的形式，此时 Δk 的计算仅需要考虑围绕裂纹尖端的一层单元。

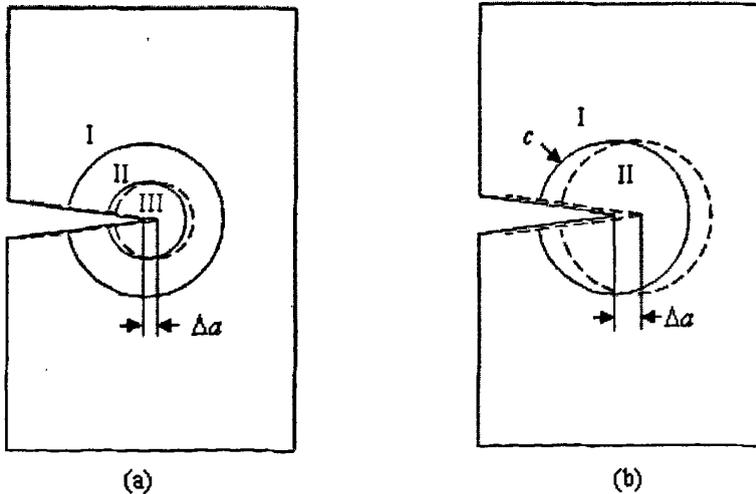


图 4.5 裂纹扩展的区域划分型式

Fig.4.5 Schematic of regional division for crack propagation

可见，虚裂纹扩展法需要进行一次有限元分析，再辅以少数单元的 Δk 计算工作。上节的 J 积分计算虽然只需要一次有限元分析，但要辅以沿路径的积分计算，两者相比，还是虚裂纹扩展法方便，特别是它适宜进行三维计算和用于弹塑性情况计算。对于三维情况，勿需再新增理论方面的内容，前面的理论考虑就够了，此时的能量释放率是指裂纹扩展单位面积时的总势能变化。当裂纹前缘皆给以相同的单位虚裂纹扩展(图 4.6(a)) 则计算出的是平均能量释放率，当依次移动裂纹前缘上的各节点(图 4.6(b))，则计算出的是各点处的局部能量释放率。

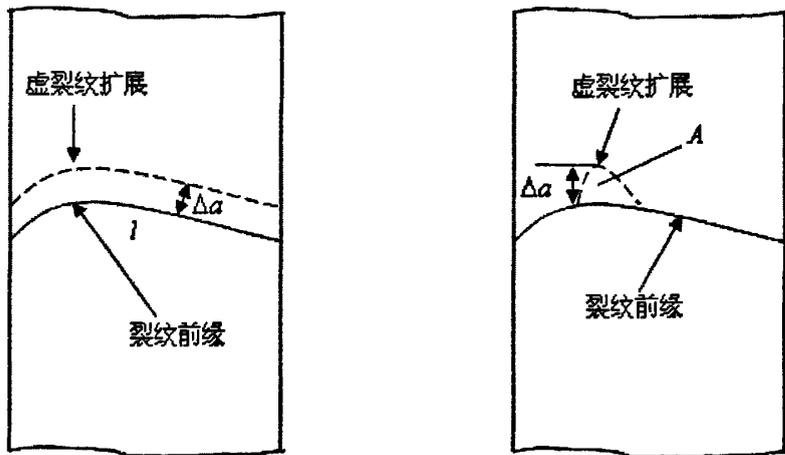


图 4.6 平均和局部能量释放率的虚裂纹扩展

Fig. 4.6 Average and local energy release rate of virtual crack extension

4.6 虚拟裂纹闭合技术

图 4.7 为二维虚裂纹闭合技术有限元分析示意图。虚裂纹闭合技术是基于以下假设：首先，裂纹扩展所释放的能量与使裂纹闭合所需的能量相等，即裂纹从 $a + \Delta a$ 扩展到 $a + 2\Delta a$ 的过程中，所释放的能量 ΔE 与闭合从 j 点到 k 点间的裂纹所需的能量相等。同时，虚裂纹闭合技术假设裂纹从 $a + \Delta a$ (节点 j) 扩展到 $a + 2\Delta a$ (节点 k) 对裂尖的状态没有显著影响，因此，当裂尖位于节点 k 时，裂尖后端 j 节点处的位移与裂尖位于 j 时，裂尖后端 i 点处的位移近似相等。

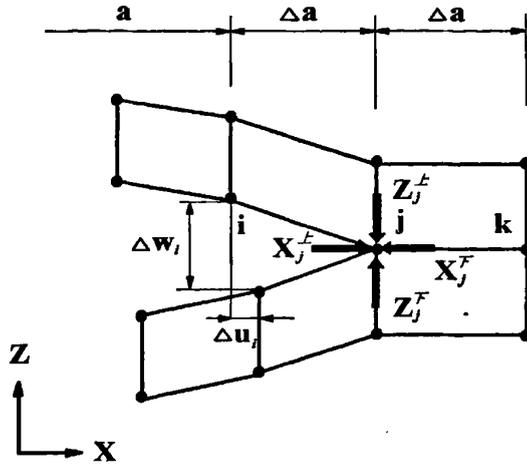


图 4.7 虚裂纹闭合技术的二维有限元分析示意图

Fig.4.7 Schematic of VCCT for 2D analysis

以二维的四节点单元为例（如图 4.7），沿一个单元边缘闭合裂纹所需做的功 ΔE 可通过下式计算

$$\Delta E = \frac{1}{2} [X_j \Delta u_i + Z_j \Delta w_i]$$

式中 X_j 和 Z_j 分别为节点 j 处上下表面间的剪切力与张开力，由平衡关系得：

$X_j = X_j^{\pm} = X_j^{\mp}$ ， $Z_j = Z_j^{\pm} = Z_j^{\mp}$ ，而 Δu_i 和 Δw_i 分别为节点 i 处上下表面的剪切位移差和张开位移差，即 $\Delta w_i = w_i^{\pm} - w_i^{\mp}$ ， $\Delta u_i = u_i^{\pm} - u_i^{\mp}$ 。所以，计算闭合裂纹的能量 ΔE 所需的节点力与节点位移均可由一次有限元计算得到。能量释放率的具体计算方法为 $G = \Delta E / \Delta A$ ，其中 ΔA 为扩展产生的裂纹表面，而能量释放率的各种分量 G_I 和 G_{II} 可用下式表示：

$$G_I = \frac{1}{2\Delta a} Z_j (w_i^{\pm} - w_i^{\mp})$$

$$G_{II} = \frac{1}{2\Delta a} X_j (u_i^{\pm} - u_i^{\mp})$$

图 4.8 为三维的虚裂纹闭合技术有限元分析示意图。其计算能量释放率各种分量的列式可以由二维列式推广得出，为：

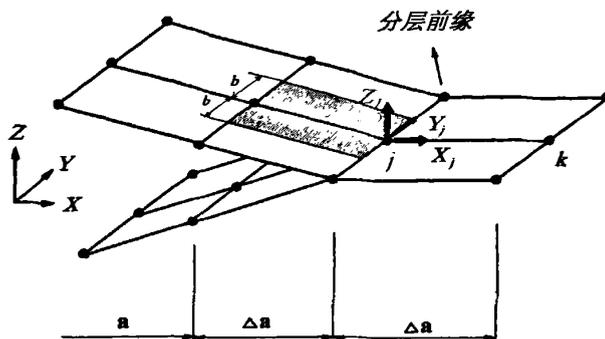


图 4.8 虚裂纹闭合技术的三维有限元分析示意图

Fig.4.8 Schematic of VCCT for 3D analysis

$$G_I = \frac{1}{2\Delta A} Z_j (w_i^{\perp} - w_i^{\top})$$

$$G_{II} = \frac{1}{2\Delta A} X_j (u_i^{\perp} - u_i^{\top})$$

$$G_{III} = \frac{1}{2\Delta A} X_j (v_i^{\perp} - v_i^{\top})$$

其中 $\Delta A = \Delta a b$ ，在这里 ΔA 是节点 j 处分层的虚拟闭合面积， Δa 是分层前缘单元的长度， b 是单元宽度。

虚裂纹闭合技术^[21]在方法上容易实施，计算简便，并且具有对网格划分不敏感，用较粗的网格可得到很好的计算精度的优点。

在应用虚裂纹闭合技术计算两相材料界面分层处能量释放率，并提取各型分量时，需要进行综合的考虑。根据第 3 章有关理论可知，在双材料界面的裂纹前缘附近，呈现出应力的振荡性（图 4.9a）。此时，如果裂纹的闭合长度 Δa 靠近裂纹的应力振荡区，则无法提取出符合实际情况的能量释放率各型分量。避免该现象产生的一种办法就是在两相材料间引入一种极薄的胶层。这样，分层的扩展被控制在一层各向同性材料中，而上述的问题就得到了解决。尽管这种方法比较有效，但是在引入的胶层中，需要划分大量精细的网格，工作量较大。

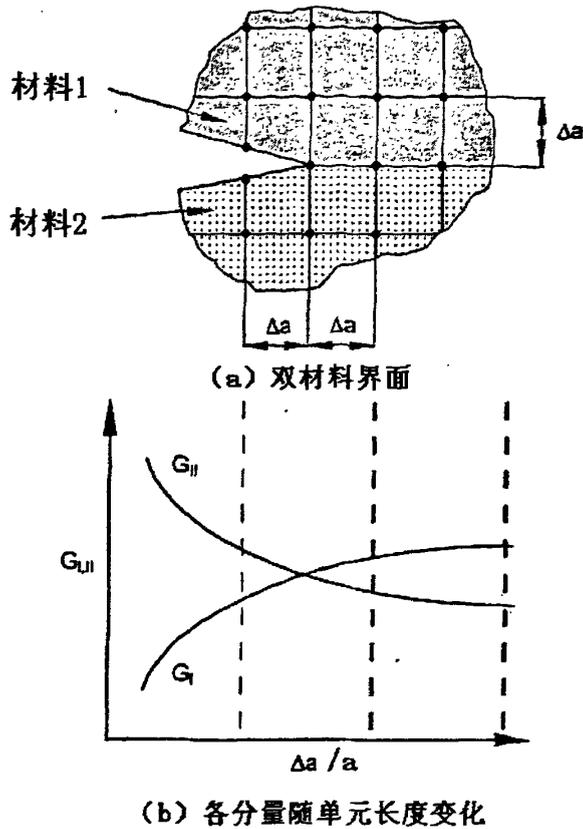


图 4.9 双材料界面及能量释放率随裂尖单元长度变化

Fig.4.9 Bimaterial interface and dependence of energy release rate on element size at crack tip

针对以上问题，可以采用控制网格大小的方式来避免应力振荡区对计算能量释放率的影响。当 $\Delta a/a > 0.05$ (Δa 是虚拟裂纹闭合的长度， a 是裂纹长度) 时，计算出的能量释放率各型分量趋于稳定，而且通过节点力与节点位移计算出的能量释放率在数值上与通过裂纹闭合积分所得的能量释放率相等。同样，采用该方法与采用引入胶层的方法所得结果一致。当 Δa 取值略增大，各分量趋于常量，而当 Δa 非常小时，各分量是裂尖单元长度的函数 (图 4.9b)，但是总能量释放率 G 收敛于一常量。 $\Delta a/a$ 的值用来表示应力振荡的区域，其大小与表征裂纹尖端奇异应力场的列式 $r^{-1/2+\gamma}$ 中的参数 γ 直接相关。

在虚裂纹闭合技术中，能量释放率被定义为一定裂纹闭合长度上的虚拟裂纹闭合积分，其中裂纹闭合的长度即等于裂尖单元的长度。裂尖单元长度 Δa 必须足够精细，从而能够得到收敛的有限元数值解，而在另一方面又不能过于精细，以防止应力振荡区的影响。因此，在计算过程中，当裂尖的单元长度选取适中，能量释放率的数值结果不会受到其长度的较大影响 (图 4.9b)。

5 多材料、多界面体系的断裂分析

5.1 多界面模型

图 5.1 为多材料、多界面模型示意图，根据第三章的界面理论，图中每两种不同材料的结合处都可以视作界面进行分析，在分析过程中，把界面作为理想的平面或曲面进行建模。

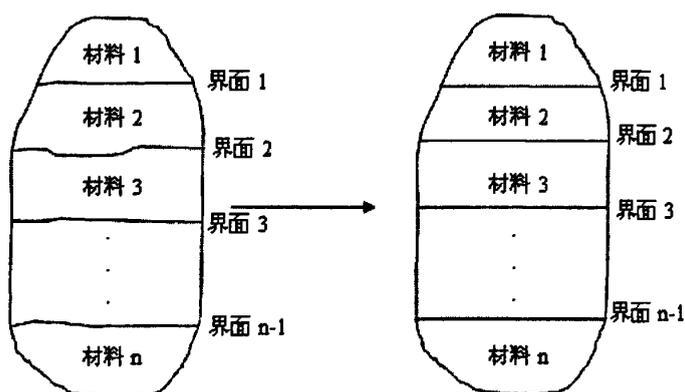


图 5.1 多材料、多界面模型

Fig. 5.1 Model of multi-material and multi-interface

在航空航天结构中，为了达到减震，缓冲和吸收能量等目的，往往在金属与复合材料之间附设橡胶层，形成由金属-橡胶-复合材料组成的多材料构件连接区（如图 5.2）。由于呈现出了较多的几何与物理间断面，该区域在外载作用下受力分析十分复杂，另外，由于不同材料性质的失配，同时金属-橡胶和橡胶-复合材料的界面端部的应力奇异性，在界面端部区域将很易形成裂纹，而裂纹的扩展会导致整个结构的失效。

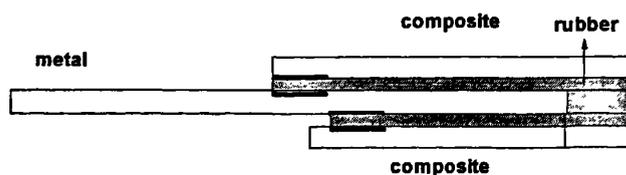


图 5.2 金属-橡胶-复合材料多材料构件连接区

Fig.5.2 Joint-structure with metal-rubber-composite multi-material

在金属-橡胶-复合材料组成的多材料体系中，橡胶材料在受外载过程中具有材料非线性，几何大变形和不可压缩性的性质。在断裂分析中，若采用 J 积分和虚裂纹扩展法分析其计算量较大，而且精度不高^[3, 4]。因此为了精确而高效地进行断裂特性分析，必须采用合理有效的理论工具。

根据第二章的理论，从能量释放率和应力强度因子角度的到断裂准则分别为：

$$K = K_C$$

$$G = G_C$$

但是在多材料、多界面体系中，由于每种材料匹配下裂纹的断裂韧性各不相同，在建立裂纹起裂准则时，需考虑多种界面位置和不同材料匹配的影响。

5.2 改进的虚裂纹闭合技术

为了能够找到一种合理有效的理论工具，能够同时考虑到橡胶的材料非线性，几何大变形和不可压缩性的影响，本文在虚裂纹闭合技术的基础上，采用逐步线性化的增量法策略，在求解过程中，根据收敛要求，将载荷分级加载，通过增量计算，得到每一增量载荷步内的能量释放率增量值，最后通过累加得到该载荷作用下的非线性能量释放率的值，其表达式为：

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta A} F_1 u_1 (n=1) \\ \frac{1}{2\Delta A} \sum_{i=1}^n \Delta F_i \Delta u_i + \sum_{i=2}^n F_{i-1} \Delta u_i (n>1) \end{cases}$$

5.3 算例及讨论

5.3.1 双裂纹纯剪橡胶试件的断裂分析

为了验证改进的虚裂纹闭合技术的计算精度和效率，本文采用双裂纹纯剪橡胶试件进行断裂计算，所得结果与已有文献进行了对照。

图 5.3 是双裂纹纯剪橡胶试件示意图，试件可以被分为三个区域，A 表示未变形区域，B 区域包含裂尖，处于复杂的应变状态，C 表示处于纯剪状态的区域，当裂纹较长时应变能释放率与裂纹长度无关，正是这个特征使得纯剪试件特别适合于在实验中采用。

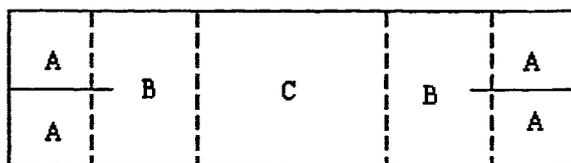


图 5.3 含双裂纹橡胶材料试件撕裂能的计算模型

Fig.5.3 Compute model for rubber specimen with double side cracks

本文采用的双裂纹纯剪橡胶试件的几何尺寸为：长 185mm，宽 12.9mm，两边的裂纹长度为 35mm，橡胶材料的本构表达式为^[11]：

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{02}(\bar{I}_1 - 3)^2$$

其中材料常数为： $C_{10} = 0.163\text{MPa}$ ， $C_{01} = 0.085\text{MPa}$ ， $C_{11} = -0.229\text{kPa}$ ， $C_{20} = -6.456\text{kPa}$ ， $C_{02} = 0.611\text{kPa}$ ， λ 为主伸长量。

表 5.2 给出了 $\lambda = 1.103$ 时，随增量步数的增加，含裂纹橡胶材料能量释放率的收敛过程。由表可见，当增量步达到 20 步以上可得到收敛解，且与文献[10]中的结果基本一致。在分析中应注意，随橡胶变形增大，几何和物理非线性影响越来越明显，此时增量步数也应相应增多。

表 5.1 橡胶撕裂能随增量步数增加变化

Tab.5.1 Variation of value of tearing energy $G(\text{KJ/m}^2)$ with incremental step

增量步数	本文结果	文献[10]
1	0.1198	
2	0.1257	
5	0.1274	0.1293
10	0.1276	
20	0.1277	

图 5.4 分别给出了在平面应力情况下撕裂能随主伸长量 ($1 \leq \lambda \leq 1.3$) 的变化趋势，比较文献[10]和本文以及和通常采用的 VCCT 法 (线性) 结果可知，本文结果和文献[10]结果吻合很好。

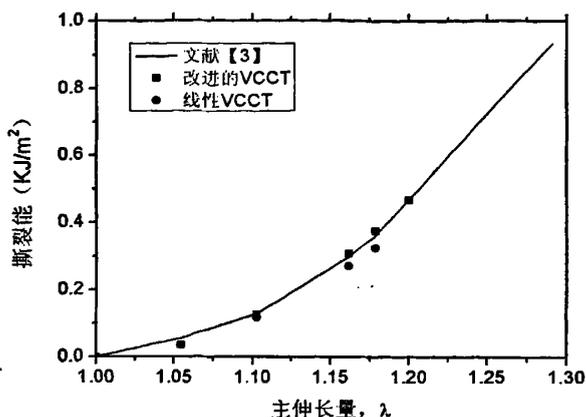


图 5.4 平面应力情况下撕裂能随主伸长量的变化

Fig.5.4 Variations of value of tearing energy with stretch ratio for rubber specimen with double side cracks

5.3.2 多材料 SLB 构件分析

5.3.2.1 SLB 模型简介

在研究复合材料分层前缘能量释放率各型分量的变化规律时, Krueger^[23, 24]等人采用了 SLB 模型。图 5.5 是复合材料层合板 SLB 构件的示意图, 在施以图中所示的约束条件和外部载荷后, 将产生 I 型, II 型混合的分层模式。

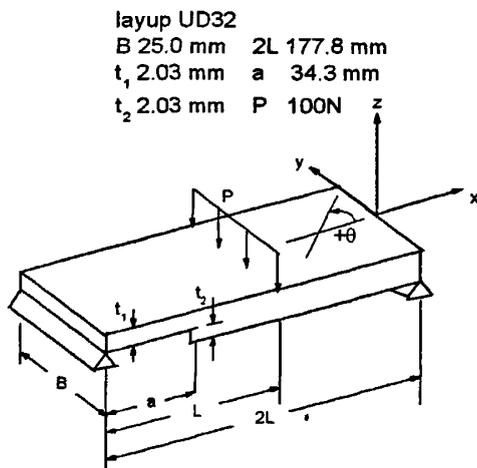


图 5.5 复合材料层合板 SLB 模型

Fig.5.5 SLB specimen for Laminates

本文采用铺设角均为 0° 的复合材料层合板 SLB 模型^[9], 其几何参数和加载条件如

图所示。设单层板的材料性质为 $E_{11} = 146.9GPa$, $E_{22} = E_{33} = 10.6GPa$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.33$, $G_{12} = G_{13} = 5.45GPa$, $G_{23} = 3.99GPa$ 。表 5.1 分别给出了本文与文献[23]得到的分层前缘中点的 I 型和 II 型能量释放率的计算结果, 通过比较, 两者符合很好。

表 5.2 与文献[23]的数值比较及误差

Tab.5.2 Comparison of present results with Ref.[23] and error

能量释放率	文献[23]	本文	误差
$G_I (kJ/m^2)$	0.01453	0.01487	2.3%
$G_{II} (kJ/m^2)$	0.00887	0.00886	-0.1%

为了研究多种材料匹配下, 分层前缘 I, II 型能量释放率的变化趋势, 本文在 SLB 单一材料模型中, 引入橡胶夹层, 分析了橡胶层对总能量释放率及其分量的影响。

图 5.6 为含橡胶夹层复合材料层合板和金属板的 SLB 试件, 其加载形式与原始尺寸均与图 5.5 相同, 引入的橡胶夹层厚度为 0.76mm, 橡胶材料的 5.3.1 节所示的双裂纹纯剪试件相同。金属材料性质为 $E = 72GPa$, $\nu = 0.3$ 。

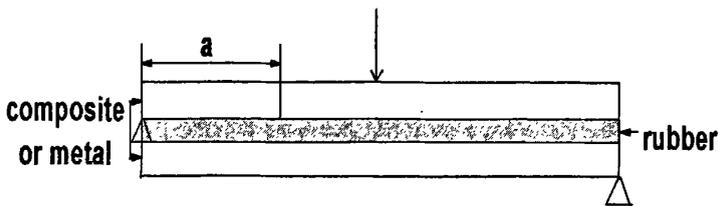


图 5.6 含橡胶夹层的复合材料层合板 SLB 试件

Fig.5.6 SLB specimen for laminates/rubber/laminates sandwich with double side cracks

表 5.3 分别给出了以上两种 SLB 试件分层前缘中点的 I 型, II 型, 总能量释放率及其比值, 为了讨论橡胶夹层的影响, 表中还列出了无橡胶夹层的 SLB 试件的结果。由表可以看到, 由于橡胶夹层的引入, 使试件的能量释放率 I 型分量减少, 而 II 型分量增大, 且试件总能量释放率增大, 这说明橡胶层的引入造成了材料的不匹配程度增大, 其增大的程度与橡胶夹层材料性质和厚度有关。

表 5.3 不同材料匹配下 SLB 试件分层前缘中点的能量释放率

Tab.5.3 Energy release rate at the middle node of delamination front for SLB specimen with different material match

能量释放率	$G_I(kJ/m^2)$	$G_{II}(kJ/m^2)$	$G(kJ/m^2)$	G_I/G	G_{II}/G
复合材料/复合材料	0.01487	0.00886	0.02373	0.6269	0.3731
复合材料/橡胶/复合材料	0.00233	0.03253	0.03486	0.0668	0.9332
金属/金属	0.02948	0.01584	0.04532	0.6506	0.3494
金属/橡胶/金属	0.0050	0.0769	0.0819	0.0611	0.9389

在表 5.4 中, 以金属/橡胶匹配试件为例, 讨论了裂纹长度 a 对能量释放率的影响。可见, 试件的能量释放率总量及分量均随裂纹长度增加而增大。

表 5.4 能量释放率随裂纹长度变化

Fig.5.4 Variation of value of energy release rate with crack length

能量释放率	$a=29.3mm$	$a=34.3mm$	$a=39.3mm$
$G_I(kJ/m^2)$	0.0027	0.0050	0.0082
$G_{II}(kJ/m^2)$	0.0651	0.0769	0.0893
$G(kJ/m^2)$	0.0678	0.0819	0.0975

5.3.3 多材料、多界面构件数值分析

本文以一典型的具有界面端边缘裂纹的金属-橡胶-复合材料多材料连接构件为例, 讨论其断裂特性。

设一构件内径为 460mm 的复合材料/橡胶/金属/橡胶/复合材料组成的多材料圆柱壳体连接构件, 分别预设裂纹位于各界面的端部。由于左右对称, 在图 5.7 中只给出纵向截面的 1/2 示意图, 同时根据连结构件轴对称特征, 本文可采用周向 1/32 三维模型进行分析, 如图 5.8 所示。

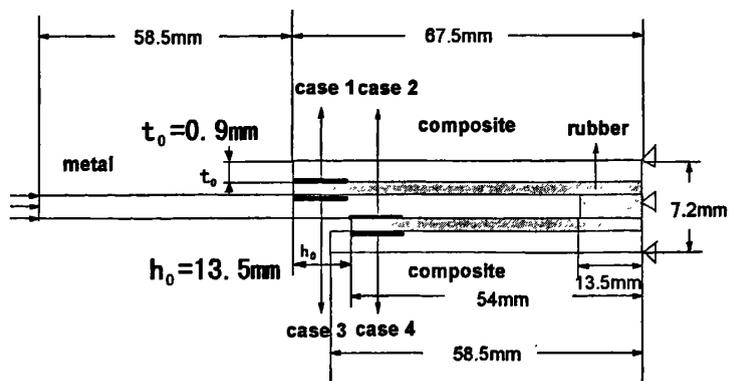


图 5.7 多材料圆柱壳体连接构件 1/2 截面图

Fig.5.7 Schematic of half cross-section for cylindrical joint shell with multi-material system

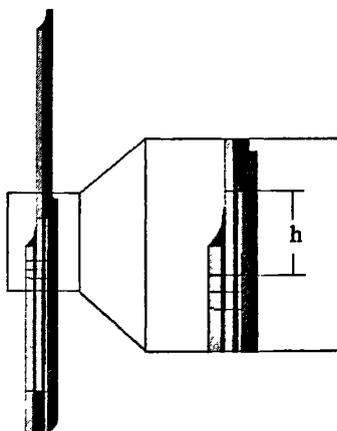


图 5.8 构件周向 1/32 分析模型与局部放大图

Fig.5.8 1/32 circumferential model and partial enlarged detail

连接构件金属壳体的材料性质见 5.3.2 节多材料 SLB 试件，而橡胶层材料采用二参数的 *Mooney-Rivlin* 模型^[25]，材料常数为 $C_{10}=3.2\text{MPa}$ ， $C_{01}=0.8\text{MPa}$ ，复合材料壳体材料参数分别为： $E_{11}=45\text{GPa}$ ， $E_{22}=E_{33}=3.5\text{GPa}$ ， $\nu=0.33$ ， $G_{12}=G_{23}=G_{31}=1.5\text{GPa}$ 。设平行于壳体轴线方向为铺设角的参考轴，则内层纤维铺设顺序为 $[0/90/0/90/0/90/0/90/0]$ ，而外层纤维铺设顺序为 $[0/90/0]$ 。根据界面裂纹预设位置不同，分别研究图 5.7 所示的 case 为 1-4 的四种模式。图 5.7 给出了这四种模式下构件裂纹前缘的总能量释放率随轴压不断

增大的变化趋势，其中图中横轴表示为金属构件顶端圆周单位长度上的荷载值。通过对图 5.9 中各条曲线的比较可知：当裂纹出现在位置 2 时（即内径较小的金属—橡胶界面端），其总能量释放率最大。

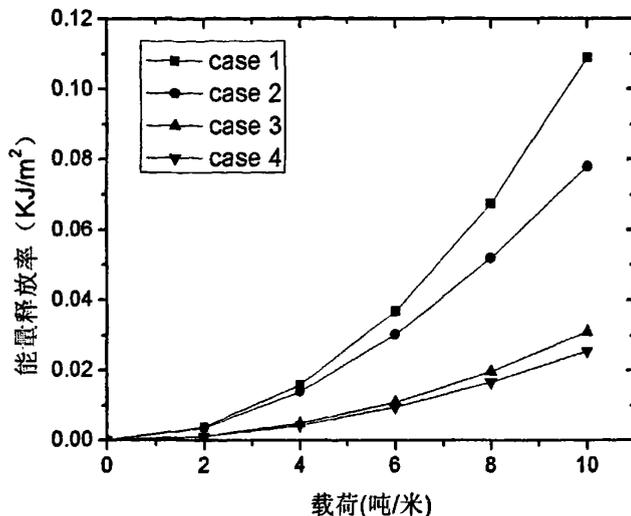


图 5.9 不同裂纹位置下能量释放率总量的变化趋势

Fig.5.9 Variation of value of total energy release rate with crack position

图 5.10 和 5.11 表示裂纹在位置 2 时，在 10 吨/米的轴向荷载作用下，外层纤维缠绕层的几何尺寸变化对裂纹尖端能量释放率的影响，其中 t/t_0 为外层缠绕层厚度与原始厚度 t_0 之比， h/h_0 为外层缠绕层与内层橡胶层端部的相对距离与原始距离 h_0 之比（见图 5.7）。比较图 5.10 和 5.11 可见，随着 t/t_0 与 h/h_0 的增加，裂纹前缘的能量释放率将随之降低，其中缠绕层 t/t_0 对能量释放率的影响将比 h/h_0 更为显著。

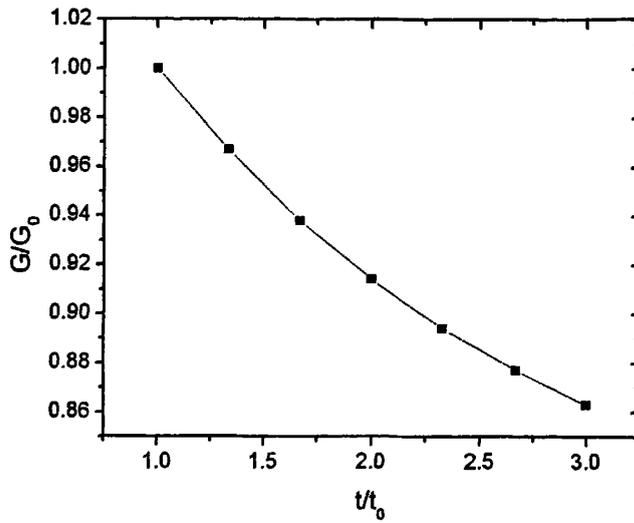


图 5.10 t/t_0 变化对裂纹能量释放率的影响

Fig.5.10 The effect of non-dimension thickness t/t_0 upon value of total energy release rate

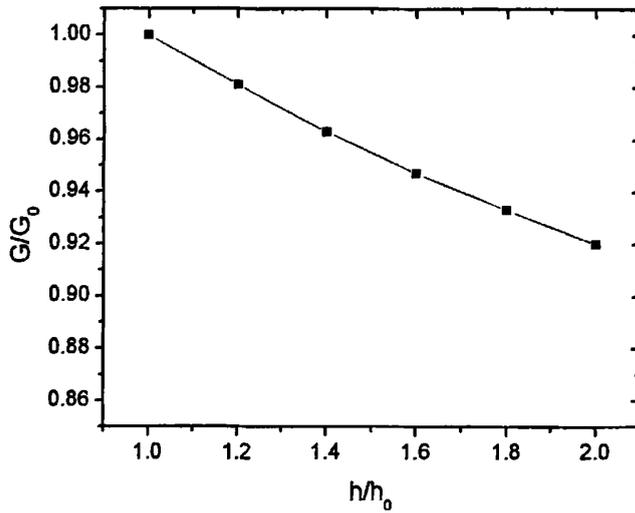


图 5.11 h/h_0 变化对能量释放率的影响

Fig.5.11 The effect of non-dimension distance h/h_0 upon value of total energy release rate

5.4 多材料、多界面构件的裂纹起裂准则

当所在位置的裂纹能量释放率 G 达到或超过其临界值 G_C 时, 则该位置裂纹出现起裂。但是, 构件上哪个位置裂纹先开裂, 就应该根据裂纹能量释放率 G 与其相应的临界值 G_C 之比来确定, 其中, 比值越大, 则开裂越早。

结 论

本文对多材料、多界面体系的断裂特性进行了比较系统的研究，通过数值计算和讨论，得到了以下几个结论：

(1) 为了使虚裂纹闭合技术能够解决同时含有材料非线性与几何非线性的断裂问题，本文采用逐步线性化的方法对其进行了改进，该计算方法简便实用。通过对橡胶材料断裂区的能量释放率总量及其分量的计算，并与已有文献的对比可知，在橡胶构件的一定伸长量范围内，该方法具有较高的计算精度和计算效率。

(2) 在复合材料层合板 SLB 模型中，橡胶层的加入增强了材料间的不匹配性，使分层前缘能量释放率的总量增大，而 II 型分量所占的比例大大提高。同时，能量释放率总量及其分量的数值均随裂纹长度的增加而增加。

(3) 在对金属-橡胶-复合材料组成的多材料圆柱壳构件的断裂特性分析中，内层界面前缘的能量释放率要明显大于外层界面前缘的能量释放率，而缠绕层几何尺寸的改变对各分层能量释放率产生了影响，缠绕层厚度改变对裂纹能量释放率影响要比外层缠绕层的高度变化大。

基于本文的研究内容，可开展以下几项后续的工作：

a) 为了更贴近构件的实际工作环境，可对多材料、多界面结构施加温度荷载，并对其断裂特性展开研究。

b) 在高温情况下，橡胶材料将表现出粘弹性性质，在分析含橡胶界面断裂特性的工作中，应予以考虑。

多材料结构中，界面裂纹的进一步扩展很有可能导致整个结构的失效，因此，对裂纹的扩展行为进一步研究是未来工作的重点之一。

参 考 文 献

- [1] Williams M L. The stress around a fault or crack in dissimilar media [J]. Dull Seism Soc Am, 1959, 49:199-208.
- [2] Bogy D B. Edge bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loadings [J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 35:146-154.
- [3] Comininou M. The interface crack in a combined tension-compression and shear field [J]. Journal of Applied Mechanics; 1979, 46:345-352.
- [4] Dundurs J, Gaudesen A K. An opportunistic analysis of the interface crack [J]. International Journal of Fracture, 1988, 36:151-159.
- [5] Shih C F, Asaro R J. Elastic-plastic analysis of cracks in biomaterial interface [J]. Journal of Applied Mechanics, 1988, 55:299-316.
- [6] Rice J. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks [J]. Journal of Applied Mechanics, 1988, 55:98-103.
- [7] 许金泉. 界面力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [8] 张鸿, 宋迎东. 陶瓷基复合材料基体裂纹偏转能量释放率研究 [J]. 航空动力学报, 2007, 22:1730-1737.
- [9] Chang J H. On the calculation of energy release rate for curved cracks of rubbery material [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1994, 17:323-338.
- [10] Pidaparti R M V, Pontula G. Three-dimensional analysis of interface cracks in rubber materials [J]. International Journal of Fracture, 1995, 68: 315-332.
- [11] Hocine N A, Abdelaziz M N, Ghfiri H and Mesmacque G [J], Engineering Fracture Mechanics, 1996, 55:919-933.
- [12] Dean G, Crocker L, Read B and Wright L [J]. International Journal of Adhesion & Adhesives, 2004, 24:295-306.
- [13] 高剑虹, 杨晓翔, 李晓芳, 郭金泉. 橡胶-钢双材料界面断裂的非线性有限元分析 [J]. 福州大学学报, 2006, 34: 863-867
- [14] Parks D M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors [J]. Int J of Fracture, 1974, 10(4):487-502.
- [15] Hellen T K. On the method of virtual crack extensions. Int J num Meth in Eng. 1975, 9:187-207.
- [16] Irwin G R, Fracture I, Handbuch der Physik VI, Flugge (ed), Springer Verlag, Berlin, Germany. 1958, 558-590.
- [17] Raju IS, Crews JH, and Aminpour MA, Convergence of strain energy release rate components for edge-delaminated composite laminates, Eng. Fract. Mech. 1988, 20(3):383-396.

- [18] Hwu C and Hu J, Stress intensity factors and energy release rates of delaminations in composite laminates [J]. 1992, Eng Fract. Mech, 42(6):977-988.
- [19] Glaessgen EH, Riddell WT, and Raju IS. Effect of shear deformation and continuity on delamination modeling with plate elements, 39rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. 1998.
- [20] Shen F, Lee K H, Tay T E. Modeling delamination growth in laminated composite[J]. Composites Science and Technology, 2001, 61:1237-1251.
- [21] Krueger R. Virtual crack closure technique: History, approach, and applications [J]. Applied Mechanics Reviews, 2004, 57(2): 109-143.
- [22] 李洪生, 周承芳. 工程断裂力学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1990.
- [23] Krueger R, O' Brien T K. A shell/3D modeling technique for the analysis of delaminated composite laminates [J]. Composites: Part A, 2001, 32: 25-44.
- [24] Krueger R. Three dimensional finite element analysis of multidirectional composite DCB, SLB and ENF specimens [R]. ISD-Report No. 94/2, December 1994.
- [25] 朱艳峰, 刘锋, 黄小清, 李丽娟. 橡胶材料的本构模型 [J]. 橡胶工业, 2006, 53: 119-125.

攻读硕士学位期间发表学术论文情况

- 1 陈浩然, 徐 浩. 多材料构件连接区的断裂特性, 第 15 届全国复合材料大会, 哈尔滨, 中国, 2008. (本硕士学位论文第五章)

致 谢

本人在攻读硕士学位期间，得到了多位老师和同学的帮助，在此表示由衷的感谢。

首先，感谢我的导师陈浩然老师，在跟随陈老师进行学习与科研的三年时光中，他在我的学业、生活乃至为人处世上，给予了多方面的照顾与帮助。在我的科研进程陷入困境时，陈老师多次提出了建设性的意见，使我能够看到新的希望并有勇气坚持下去。我在硕士期间所写的每一篇论文，都是陈老师工作到很晚，逐字逐句修改而成的。除此之外，陈老师经常向我们讲述如何做学问，如何在激烈的竞争中发挥自己的优势等等，并且身体力行，使我切实感受到了什么是责任，什么是认真严谨的治学态度。

同时，我还要感谢任明法和白瑞祥两位老师，作为教书育人的教师，同时也是可亲可敬的师兄，两位老师对我的学习和生活给予了许多实实在在的帮助。从任老师身上，我体会到了包容与乐观的可贵精神，在三年愉快的相处过程中，他使我体会到了如何用一颗淡然的心去面对繁杂的世界。白瑞祥老师在面临巨大困难时所表现出的坚韧与乐观，为我提供了一个良好的榜样，使我感受到了一个人所蕴含的力量与征服困难的无限可能。

教研室的兄弟姐妹们，每个人都有着独特而可爱的性格，在综合实验楼 610 的三年时光，我从未感觉到空虚和寂寞。感谢你们的照顾与帮助，也希望大家都能够有一个美好的前程。

感谢寝室的三位兄弟，三年里，没有一点纷争，没有一次矛盾。友好的戏谑，善意的玩笑，三年的点点滴滴我永远不会忘记，祝你们越混越好。

最后感谢我的父母，由于情感意味深长，在此暂不诉诸文字，只希望以我个人之力使他们生活幸福、快乐。